

Examen (session de rattrapage) (1h30min)
(Structures, Polynômes et Fractions Rationnelles)

Questions de cours.

1. Rappeler la définition d'un homomorphisme de groupes.
2. Rappeler la définition du noyau d'un homomorphisme d'anneaux et montrer que c'est un idéal.
3. Déterminer, en le justifiant, l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau de polynômes $K[X]$ où K est un corps.

Exercice 1

On munit $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ de la loi de composition interne \star définie par :

$$\forall ((a, e), (b, f)) \in E^2, (a, e) \star (b, f) = (ab, af + e).$$

1. Montrer que (E, \star) est un groupe. Est-il commutatif?
2. L'ensemble suivant $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$ est-il un sous-groupe de E .
3. Montrer que $\{1\} \times \mathbb{Q}$ est un sous-groupe de E isomorphe à $(\mathbb{Q}, +)$.

Exercice 2

Trouver le polynôme $P \in \mathbb{R}_6[X]$ vérifiant $(X - 1)^3$ divise $P + 1$ et X^4 divise $P + 2$.

Exercice 3

Décomposer $F(X) = \frac{4}{X(X^2 + 1)^2}$ en éléments simples sur \mathbb{R} .