UNIVERSITE MOHAMMED V de RABAT

FACULTE DES SCIENCES

Cours d'Analyse I

Par

Pr. A. ZOGLAT

SMIA, S1

Automne 2020

Ces notes de cours sont destinées aux étudiants de S1 de la filière SMIA. Elles ont été rédigées, conformément au nouveau programme accrédité, dans le but d'aider les étudiants à consolider leurs acquis mathématiques et à maîtriser les nouvelles notions introduites dans ce cours.

Je serai reconnaissant à tout lecteur qui aura l'amabilité de me signaler des erreurs que peut comporter ce manuscrit ou de me suggérer une idée pour le parfaire.

A. Zoglat.

Table des matières

CHAPITRE 3

Fonctions réelles d'une variable réelle

3.1 Introduction

Au chapitre précédent, nous avons défini une suite comme étant une fonction particulière définie sur $\mathbb{N}$. Dans ce chapitre nous étudions les fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$. Les suites s'avèrent un outils précieux dans cette étude. Les fonctions réelles servent souvent à modéliser des cas concrets et cela constitue la raison principale qui motive leur exploration.

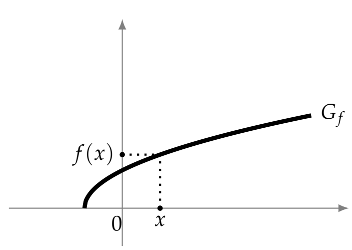
Généralement une fonction décrit le comportement d'un objet à travers le temps ou l'espace. Le choix d'une bonne fonction pour modéliser un tel comportement est souvent un compromis entre des fonctions dont le comportement est chaotique et celles qui possèdent quelques "bonnes" propriétés qui facilitent leur utilisation. Une partie de ces propriétés sera explorée dans ce chapitre.

Définition 1. Soient $E \subset \mathbb{R}$, $F \subset \mathbb{R}$ et f une relation qui à chaque élément x de E associe un **unique** élément de F noté $f(x)$. On dit que f est une *fonction* de E dans F.
L'ensemble E s'appelle le **domaine de définition** de f et est souvent noté D_f et l'ensemble de points $G_f = \{(x, f(x)), x \in D_f\}$ s'appelle le graphe de f.

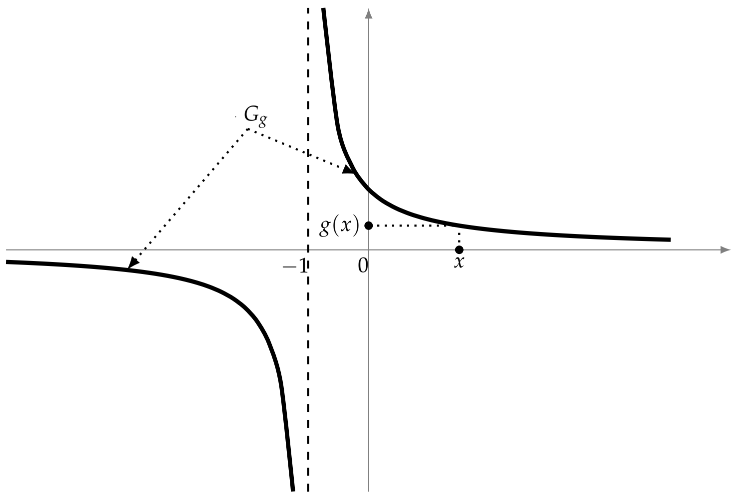
Remarque 1. Une fonction f de $E \subset \mathbb{R}$ dans $F \subset \mathbb{R}$ est aussi dite *fonction réelle définie* sur E ou *fonction définie* sur E à valeurs dans F. On note $f : E \to F$.

Exemple 1.

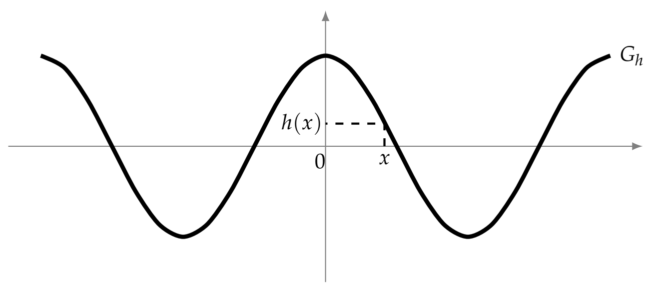
1- La fonction f qui à un réel x associe $f(x) = \sqrt{x+1}$ est définie sur $D_f = [-1, \infty[$. Elle est représentée par le graphe ci-après



2- La fonction g qui à un réel x associe $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ est définie sur $D_g =]-\infty, -1[\cup]-1, \infty[$. Elle est représentée par le graphe ci-après



3- La fonction h qui à un réel x associe $h(x) = 2\cos x$ est définie sur $D_h = \mathbb{R}$. Elle est représentée par le graphe ci-après



Définition 2. Soit $f : E \to F$ une fonction.

- On dit que f est une injection de E dans F (ou que f est injective) si

$$\forall\ (x, x') \in E \times E, \quad x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x').$$

- On dit que f est une surjection de E dans F (ou que f est surjective) si

$$\forall\ y \in F, \exists\ x \in E \text{ tel que } y = f(x).$$

- On dit que f est une bijection de E dans F (ou que f est bijective) lorsqu'elle est à la fois injective et surjective.

Exemple 2.

- La fonction $h : \mathbb{R} \to [-2, 2]$, définie par $h(x) = 2\cos x$, est surjective mais elle n'est pas injective (pourquoi ?)
- La fonction $g :]-\infty, -1[\cup]-1, \infty[\to \mathbb{R}$, définie par $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$, est injective mais elle n'est pas surjective (pourquoi ?)
- La fonction $f : [-1, \infty[\to [0, \infty[$, définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$, est bijective (pourquoi ?)

3.1.1 Opérations sur les fonctions

Sur l'ensemble des fonctions réelles on définit de manière naturelle les opérations algébriques telles que la somme, le produit ou le quotient de deux fonctions.

Définition 3. Soient f et g deux fonctions réelles sur $E \subset \mathbb{R}$.

- La fonction $f+g$ est définie sur E par : $\forall\ x \in E,\ (f+g)(x) = f(x)+g(x)$.
- La fonction $f \times g$ est définie sur E par : $\forall\ x \in E,\ (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.
- La fonction $\dfrac{f}{g}$ est définie, pour tout $x \in E$ tel que $g(x) \neq 0$, par : $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

La composée $f \circ g$ est la fonction définie par : $\forall x \in E$ tel que $g(x) \in D_f$, $\quad f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$.

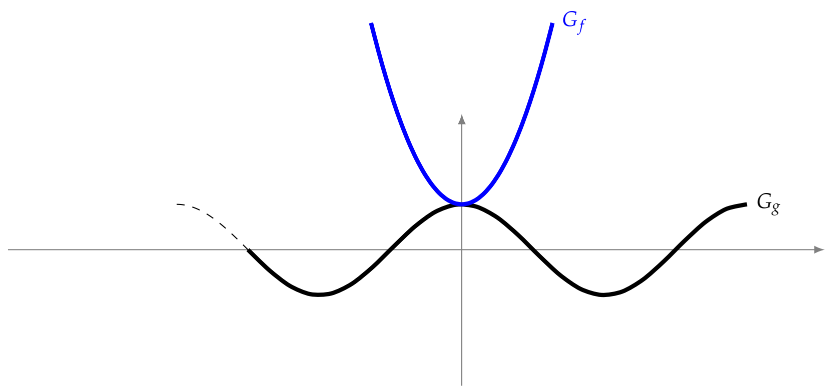
Exemple 3. Soient f et g deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+1$ et $g(x) = \cos x$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = x^2+1+\cos x$ et $f \times g(x) = (x^2+1)\cos x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos x \neq 0$, $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{x^2+1}{\cos x}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ g(x) = f(\cos x) = \big(\cos x\big)^2 + 1$.

La relation d'ordre "$\leq$" est aussi naturellement définie sur l'ensemble des fonctions réelles.

Définition 4. Soient f et g deux fonctions réelles définies sur $E \subset \mathbb{R}$. On dit que f est inférieure ou égale à g sur E, et on note $f \leq g$ si $\forall x \in E$, $f(x) \leq g(x)$. Si cette inégalité est stricte, on dit que f est strictement inférieure à g sur E.

Exemple 4. Soient f et g les fonctions réelles définies par, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2+1$ et $g(x) = \cos x$. Il est clair que $g \leq f$.



3.1.2 Fonction croissante, décroissante, majorée ou minorée

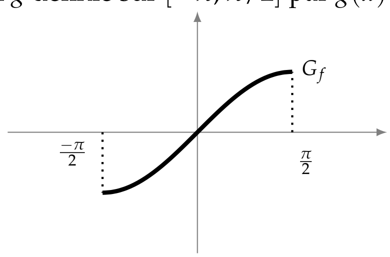
Les notions de croissance, décroissance, majoration ou minoration que nous avons définies pour les suites s'étendent naturellement aux fonctions réelles.

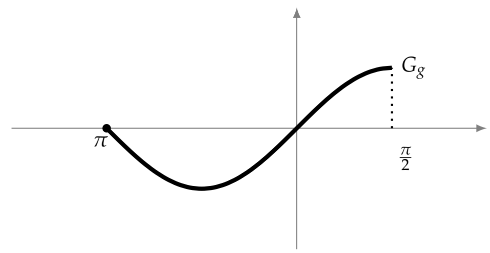
Définition 5. Soient f une fonction réelle définie sur $E \subset \mathbb{R}$.

- La fonction f est croissante pour tout $x \in E$ et tout $x' \in E$ on a : $x \leq x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x')$. Lorsque ces inégalités sont strictes, on dit que f est strictement croissante.
- La fonction f est décroissante pour tout $x \in E$ et tout $x' \in E$ on a : $x \leq x' \Longrightarrow f(x') \leq f(x)$. Lorsque ces inégalités sont strictes, on dit que f est strictement décroissante.
- La fonction f est dite constante s'il existe un réel c tel que pour tout $x \in E$ on a : $f(x) = c$. Si $c = 0$, on dit que la fonction f est nulle.

Exemple 5.

- La fonction f définie sur $[-\pi/2, \pi/2]$ par $f(x) = \sin x$ est croissante.
- La fonction g définie sur $[-\pi, \pi/2]$ par $g(x) = \sin x$ n'est ni croissante ni décroissante.

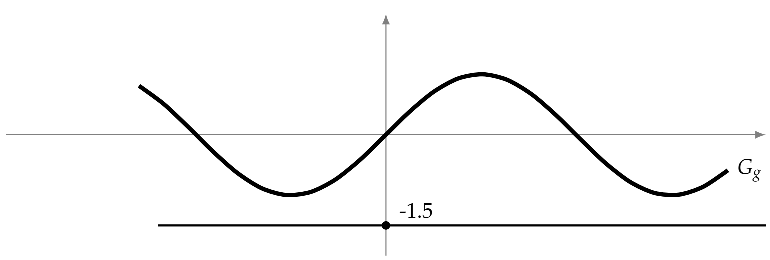




Définition 6. Soient f une fonction réelle définie sur $E \subset \mathbb{R}$.

- On dit que f est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \geq m$.
- On dit que f est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \leq M$.
- Lorsque f est à la fois minorée et majorée, on dit qu'elle est bornée.

Exemple 6. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin x$ est minorée par -1.5.

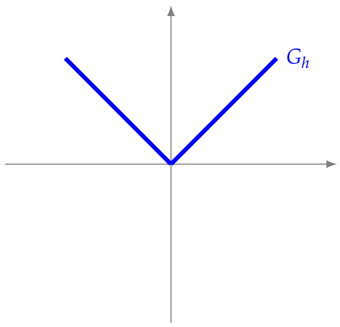


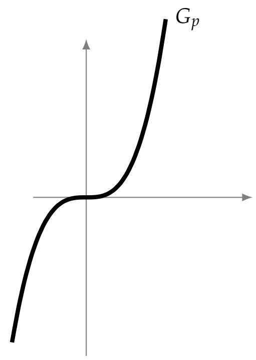
3.1.3 Fonction paire, impaire ou périodique

Définition 7. Soient f une fonction réelle définie sur $E \subset \mathbb{R}$. On suppose que E est symétrique, c'est à dire $x \in E \Longrightarrow -x \in E$.

- On dit que f est paire si pour tout $x \in E$, $f(x) = f(-x)$.
- On dit que f est impaire si pour tout $x \in E$, $f(x) = -f(x)$.

Exemple 7. La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = |x|$ est paire. La fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x^3$ est impaire.

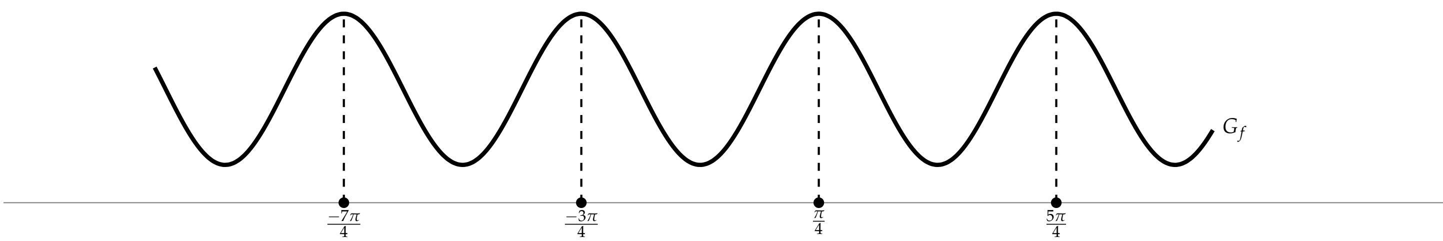




Remarque 2. Si f est une fonction paire alors le graphe de f admet l'axe des "y" comme axe de symétrie. Si f est une fonction impaire alors il le graphe de f admet l'origine comme centre de symétrie.

Définition 8. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel. On dit que f est périodique de période T si T est le **plus petit** réel tel que $\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x)$.

Exemple 8. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{3}{2} + \sin 2x$ est périodique de période π.



Exercices

1- Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Déterminer D_f, le domaine de définition de f. Déterminer les sous-ensembles de D_f où f est croissante ou décroissante.

2- Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 2x^n + 1$, où n est une entier positif. Pour quels valeurs de n la fonction g est-elle paire ? Pour quels valeurs de n est-elle croissante ?

3- Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = x - [x]$ où $[x]$ désigne la partie entière de x. Montrer que h est périodique et déterminer sa période.

3.2 Limite d'une fonction

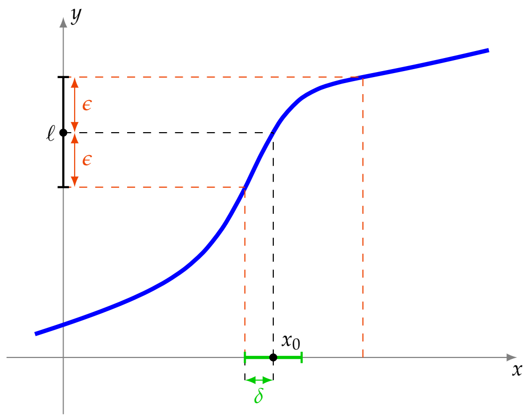
Les limites jouent un rôle central dans la description du comportement d'une fonction réelle. Intuitivement la limite d'une fonction f en un point x_0 décrit le comportement de $f(x)$ lorsque x s'approche de x_0.

3.2.1 Définitions

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

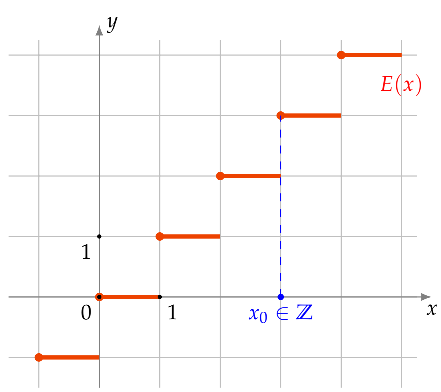
Définition 9. On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est la limite de f en x_0 (ou que f admet ℓ comme limite en x_0) et on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$



Exemple 9.

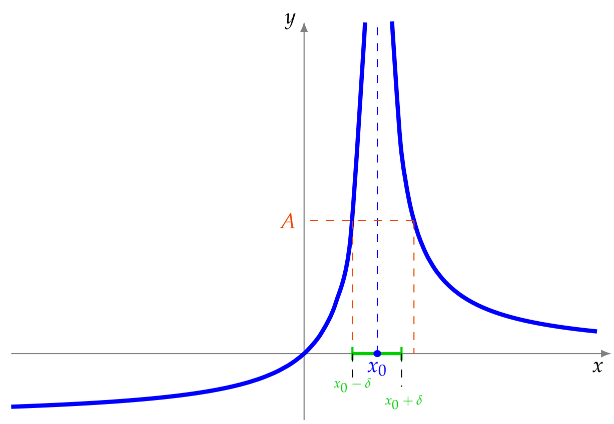
— la fonction partie entière E n'a pas de limite aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$.



Définition 10.

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0, et on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A.$$



— On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0, et on note $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A.$$

— Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$, et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

— Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$, et on note $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x < -B \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) > A.$$

— On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$, et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, si

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) < -A.$$

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$, et on note $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x < -B \implies f(x) > A.$$

— On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$, et on note $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, si

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x < -B \implies f(x) < -A.$$

Limite à gauche et à droite

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Définition 11.

— On dit que ℓ est la limite à droite en x_0 de f, et on note $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$, si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < x - x_0 < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

— On dit que ℓ est la limite à gauche en x_0 de f, et on note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$, si

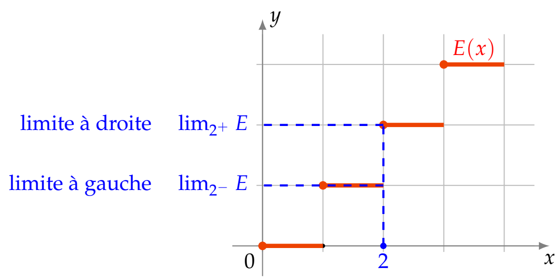
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Exemple 10. Considérons la fonction partie entière au point $x = 2$:

— comme pour tout $x \in]2, 3[$ on a $E(x) = 2$, on a $\lim\limits_{2^+} E = 2$,

— comme pour tout $x \in [1, 2[$ on a $E(x) = 1$, on a $\lim\limits_{2^-} E = 1$.

Ces deux limites étant différentes, on en déduit que E n'a pas de limite en 2.



3.3 Propriétés

Proposition 1. Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

Démonstration. La démonstration est similaire à celle de l'unicité de la limite pour les suites. Elle est laissée comme exercice. □

Soient deux fonctions f et g. On suppose que x_0 est un réel, ou que $x_0 = \pm\infty$.

Proposition 2. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$, alors :

— $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot \ell$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

— $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = \ell + \ell'$

— $\lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x) = \ell \times \ell'$

— si $\ell \neq 0$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$

De plus, si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Démonstration. Ces propriétés se démontrent de la même manière que leurs analogues pour les suites. Montrons par exemple que si f tend en x_0 vers une limite ℓ non nulle, alors $\dfrac{1}{f}$ est bien définie dans un voisinage de x_0 et tend vers $\dfrac{1}{\ell}$.

Supposons $\ell > 0$, le cas $\ell < 0$ se montrerait de la même manière. Montrons tout d'abord que $\dfrac{1}{f}$ est bien définie et est bornée dans un voisinage de x_0 contenu dans I. Par hypothèse

$$\forall \epsilon' > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \implies \ell - \epsilon' < f(x) < \ell + \epsilon'.$$

Si on choisit ϵ' tel que $0 < \epsilon' < \ell/2$, alors on voit qu'il existe un intervalle $J = I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tel que pour tout x dans J, $f(x) > \ell/2 > 0$, c'est-à-dire, en posant $M = \ell/2$:

$$\forall x \in J \quad 0 < \frac{1}{f(x)} < M.$$

Fixons à présent $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in J$, on a

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - f(x)|}{f(x)\ell} < \frac{M}{\ell}\,|\ell - f(x)|\,.$$

Donc, si dans la définition précédente de la limite de f en x_0 on choisit $\epsilon' = \dfrac{\ell\epsilon}{M}$, alors on trouve qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in J \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \implies \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| < \frac{M}{\ell}\,|\ell - f(x)| < \frac{M}{\ell}\epsilon' = \epsilon.$$

□

Exemple 11. On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geq 1$:

— $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

— $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x^n}\right) = 0$.

Exemple 12. Soient $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, avec $a_n > 0$, un polynôme de degré n et $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, avec $b_m > 0$, un polynôme de degré m.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

Proposition 3. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to \ell} g(x) = \ell'$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = \ell'$.

Exemple 13. Soit $x \mapsto u(x)$ une fonction, $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \to 2$ lorsque $x \to x_0$. Posons $f(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{u(x)^2} + \ln u(x)}$. Si elle existe, quelle est la limite de f en x_0 ?

— Tout d'abord comme $u(x) \to 2$ alors $u(x)^2 \to 4$ donc $\dfrac{1}{u(x)^2} \to \dfrac{1}{4}$ (lorsque $x \to x_0$).

— De même comme $u(x) \to 2$ alors, dans un voisinage de x_0, $u(x) > 0$ donc $\ln u(x)$ est bien définie dans ce voisinage et de plus $\ln u(x) \to \ln 2$ (lorsque $x \to x_0$).

— Cela entraîne que $1 + \dfrac{1}{u(x)^2} + \ln u(x) \to 1 + \frac{1}{4} + \ln 2$ lorsque $x \to x_0$. En particulier $1 + \dfrac{1}{u(x)^2} + \ln u(x) \geq 0$ dans un voisinage de x_0 donc $f(x)$ est bien définie dans un voisinage de x_0.

— Et par composition avec la racine carrée alors $f(x)$ a bien une limite en x_0 et $\lim_{x \to x_0} f(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{4} + \ln 2}$.

Comme pour les limites des suites réelles, les opérations sur les limites ne s'appliquent qu'en l'absence des formes indéterminées. Rappelons qu'on appelle formes indéterminées les formes suivantes :

$$\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}.$$

Proposition 4.

- Si $f \leq g$ et si $\lim_{x \to x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \to x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $f \leq g$ et si $\lim_{x \to x_0} f = +\infty$, alors $\lim_{x \to x_0} g = +\infty$.
- Si $f \leq g$ et si $\lim_{x \to x_0} g = -\infty$, alors $\lim_{x \to x_0} f = -\infty$.
- Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim_{x \to x_0} f = \lim_{x \to x_0} h = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \to x_0} g = \ell$.

Exercices

1. En utilisant la définition de la limite, montrer que $\lim_{x \to 2}(3x+1) = 7$.
2. Montrer que si f admet une limite finie en x_0 alors il existe $\delta > 0$ tel que f soit bornée sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.
3. Déterminer, si ça existe, $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - x - 2}{3x^2 + 2x + 2}$ et $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x - 2}{3x^2 + 2x + 2}$
4. Déterminer, si ça existe, la limite de $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et la limite de $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ en ∞.
5. Déterminer, si ça existe, $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$ et $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$.

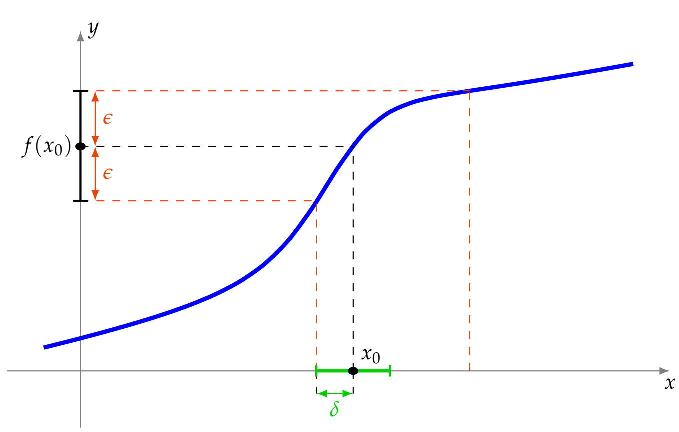
3.4 Continuité en un point

3.4.1 Définition

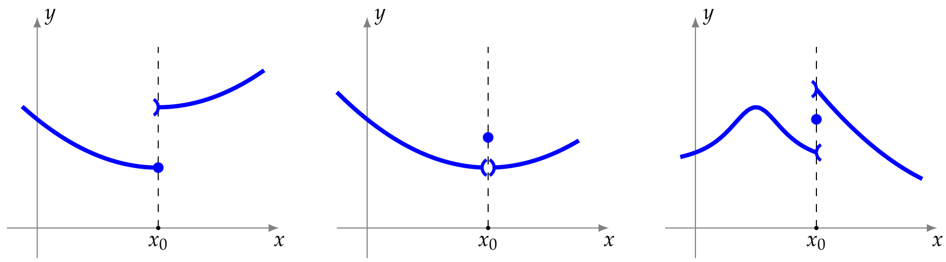
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 12.

- On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.



Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si son graphe est constitué d'un seul morceau. Voici des exemples de fonctions qui ne sont pas continues en un point x_0 :



Exemple 14. Les fonctions suivantes sont des exemples de fonctions continues :

— une fonction constante sur un intervalle,

— la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$,

— les fonctions sin et cos sur $\mathbb{R}$,

— la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$,

— la fonction exp sur $\mathbb{R}$,

— la fonction ln sur $]0, +\infty[$.

Par contre, la fonction partie entière E n'est pas continue aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$, puisqu'elle n'admet pas de limite en ces points. Pour $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, elle est continue en x_0.

Remarque 3. D'après la définition de la continuité, une fonction f est continue en $x_0 \in I$ si, et seulement si, $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Exemple 15. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

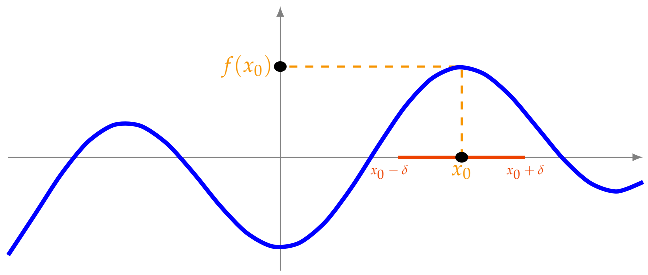
Il suffit de montrer que f est continue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point donné et $\epsilon > 0$. On a $|x^n - x_0^n| = |x - x_0| |\sum_{k=0}^{n-1} x_0^k x^{n-k}| \leq |x - x_0| \sum_{k=0}^{n-1} |x_0|^k |x|^{n-k} \leq |x - x_0| (|x_0| + |x|)^{n-1}$. Ainsi pour tout $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ on a $|x| \leq |x_0| + 1$. D'où $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1] \implies |x^n - x_0^n| \leq |x - x_0|(2|x_0| + 1)^{n-1}$. Pour $\delta = \min(1, \frac{\epsilon}{(|x_0| + 1)^n})$, on a bien $|x - x_0| < \delta \implies |x^n - x_0^n| < \epsilon$.

3.4.2 Propriétés

La continuité assure par exemple que si la fonction n'est pas nulle en un point (qui est une propriété ponctuelle) alors elle n'est pas nulle autour de ce point (propriété locale). Voici l'énoncé :

Lemme 1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I. Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\quad f(x) \neq 0.$$



Démonstration. Pour $\epsilon = \dfrac{|f(x_0)|}{2}$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ on a $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Or on a $||f(x)| - |f(x_0)|| < |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, pour tout $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. On en déduit que $|f(x)| > |f(x_0)| - \epsilon = \dfrac{|f(x_0)|}{2} > 0$, pour tout $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. □

La continuité se comporte bien avec les opérations élémentaires. Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates des propositions analogues sur les limites.

Proposition 5. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors

— $\lambda \cdot f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$),

— $f + g$ et $f \times g$ sont continues en x_0,

— si $f(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue en x_0.

Exemple 16. La proposition précédente permet de vérifier que d'autres fonctions usuelles sont continues :

— les fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto a_n x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \in \mathbb{R}$.

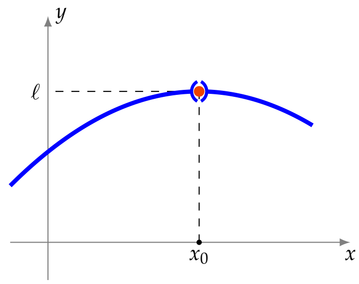
— les fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$,

— les fractions rationnelles $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont des fonctions polynômes, sont continues sur tout intervalle où le polynôme $Q(x)$ ne s'annule pas.

Proposition 6. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

3.4.3 Prolongement par continuité

Définition 13. Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0. La fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in I$ par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0. \end{cases}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.



Dans la pratique, on continuera souvent à noter f à la place de $\tilde{f}$.

Exemple 17. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Voyons si f admet un prolongement par continuité en 0 ?

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $|f(x)| \le |x|$, on en déduit que f tend vers 0 en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3.4.4 Suites et continuité

Proposition 7. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de I. Alors

f est continue en x_0 $\iff$ pour toute suite (u_n) qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ *On suppose que f est continue en x_0 et que (u_n) est une suite qui converge vers x_0 et on veut montrer que $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.*

Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue en x_0, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Pour ce δ, comme (u_n) converge vers x_0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies |u_n - x_0| < \delta.$$

On en déduit que, pour tout $n \geq N$, comme $|u_n - x_0| < \delta$, on a $|f(u_n) - f(x_0)| < \epsilon$ et donc $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ *On va montrer la contraposée :* supposons que f n'est pas continue en x_0 et montrons qu'il existe une suite (u_n) qui converge vers x_0 et telle que $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(x_0)$.

Par hypothèse, comme f n'est pas continue en x_0 :

$$\exists \epsilon_0 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists x_n \in I \quad \text{tel que} \quad |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(x_0)| > \epsilon_0.$$

Ainsi la suite $(x_n)_n$ converge vers x_0 mais la suite $(u_n = f(x_n))_n$ ne converge pas vers $f(x_0)$.

$\square$

Remarque. Notons que lorsqu'une suite récurrente, définie à partir d'une fonction f continue par $u_{n+1} = f(u_n)$, converge alors sa limite ℓ vérifie la relation $f(\ell) = \ell$.

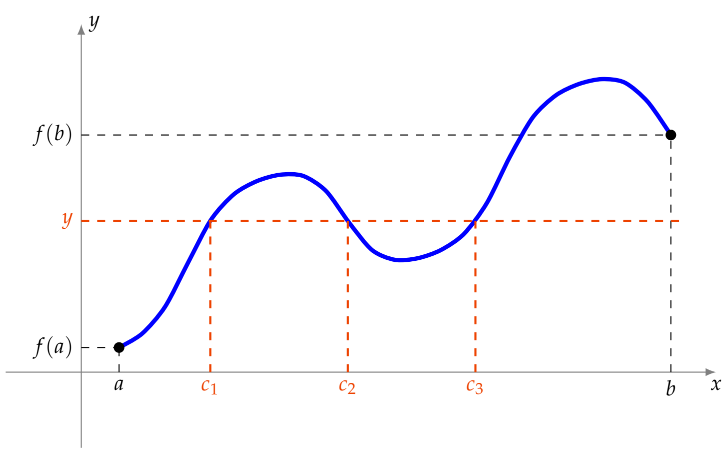
Exercices

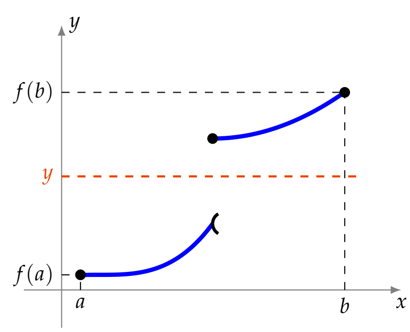
1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction $f(x) = \begin{cases} x+a & \text{si } x < 1 \\ 1+x+bx^2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$ soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit g une fonction continue telle que $g(x_0) = 1$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que
$$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Longrightarrow g(x) > \frac{1}{2}.$$
3. Étudier la continuité de $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \sin x \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$.
4. La fonction définie par $g(x) = \dfrac{x^3+8}{|x+2|}$ admet-elle un prolongement par continuité en -2 ?
5. Soit la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

3.5 Continuité sur un intervalle

3.5.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

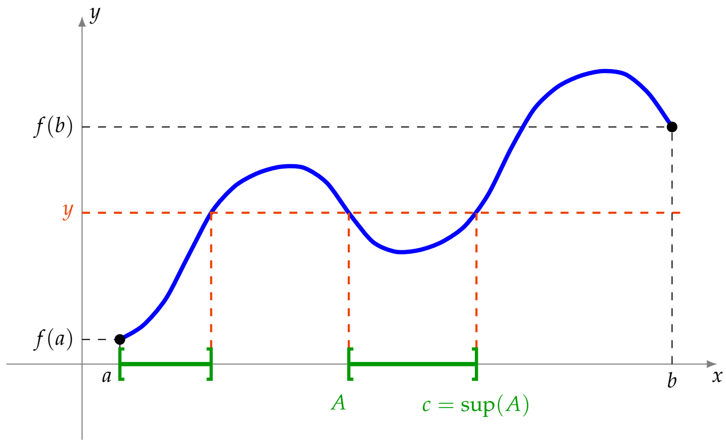
Théorème 1. [Théorème des valeurs intermédiaires] Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.





Démonstration. Remarquons que si $f(a) = f(b)$ alors il n'y a rien à démontrer puisque dans ce cas $y = f(a)$.

1. Supposons que $f(a) < f(b)$ et soit $y \in]f(a), f(b)[$ fixé. On considère l'ensemble
$$A = \left\{ x \in [a,b] \mid f(x) \leq y \right\}.$$
Puisque A est un ensemble non vide ($a \in A$) majoré ($A \subset [a,b]$), il admet une borne supérieure. Soit $c = \sup A$. Nous allons montrer que $y = f(c)$.



Comme $c = \sup A$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ telle que (u_n) converge vers c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$ et donc $f(u_n) \leq y$. Et puisque f est continue sur $[a, b]$, par passage à la limite on a $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) \leq y$.

Montrons à présent que $f(c) \geq y$. Cela est évident si $c = b$ puisque $f(b) \geq y$. Supposons donc que $c < b$. Pour tout $x \in]c, b]$, comme $x \notin A$, on a $f(x) > y$. Comme $c = \inf]c, b]$, il existe donc une suite $(v_n)_n \subset]c, b]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(v_n) > y$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = c$. On en déduit que $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(v_n) \geq y$.

2. Si $f(a) > f(b)$ et $y \in]f(b), f(a)[$ est un réel fixé, on considère l'ensemble

$$B = \Big\{x \in [a, b] \mid f(x) \geq y\Big\}.$$

L'ensemble B est non vide ($f(a) \in B$) majoré (par b) donc admet une borne supérieure que nous notons c. Il existe donc une suite $(u_n)_n \subset B$ qui converge vers c. Comme f est continue sur $[a, b]$ on a $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) \geq y$.

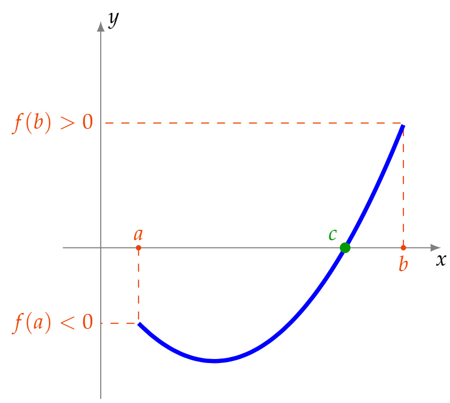
Montrons que $f(c) \leq y$. Cela est évident si $c = b$, car $y \geq f(b) = f(c)$. Supposons que $c < b$. Pour tout $x \in]c, b]$, on a $f(x) < y$. Comme $c = \inf]c, b]$, il existe une suite $(v_n)_n \subset]c, b]$ qui converge vers c et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(v_n) \leq y$. Par passage à la limite on obtient $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) \leq y$.

□

3.5.2 Applications du théorème des valeurs intermédiaires

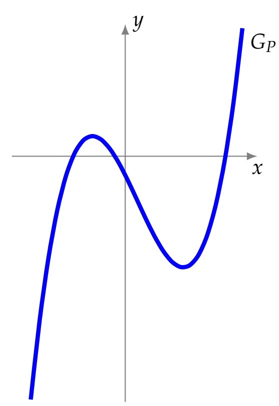
Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 1. Soit f une fonction réelle continue sur l'intervalle $[a, b]$. Si $f(a) \times f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.



Démonstration. Il s'agit d'une application directe du théorème des valeurs intermédiaires avec $y = 0$. L'hypothèse $f(a) \times f(b) < 0$ signifiant que $f(a) < f(b)$ ou $f(b) < f(a)$. □

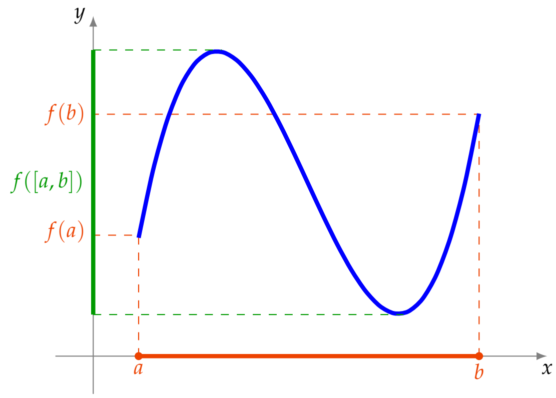
Exemple 18. *Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.*



En effet, un tel polynôme s'écrit $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ avec n un entier impair. On peut supposer que le coefficient a_n est strictement positif. Alors on a $\lim\limits_{-\infty} P = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} P = +\infty$. En particulier, il existe deux réels a et b tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ et on conclut grâce au corollaire précédent.

Corollaire 2. Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Attention! Le résultat ci-dessus **ne signifie pas** que si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.



Démonstration. Soient $y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 \leq y_2$. Montrons que si $y \in [y_1, y_2]$, alors $y \in f(I)$. Par hypothèse, il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ et donc y est compris entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue, il existe donc $x \in I$ tel que $y = f(x)$, et ainsi $y \in f(I)$. $\square$

3.5.3 Fonctions continues sur un segment $[a, b]$

Nous utiliserons le mot *segment* pour désigner un intervalle fermé et borné de la forme $[a, b]$ où a et b sont deux réels tels que $a \leq b$.

Proposition 8. L'image d'un segment $[a, b]$ par une fonction f continue est un ensemble borné.

Démonstration. Nous allons montrer que $f([a, b])$ est un ensemble majoré. La preuve que c'est une ensemble minoré est laissée comme exercice.

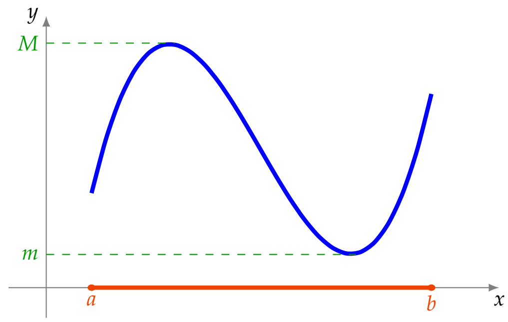
Supposons que $f([a, b])$ ne soit pas majoré. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existerait un $y_n \in f([a, b])$ tel que $y_n \geq n$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists x_n \in [a, b] \quad \text{tel que } f(x_n) = y_n \geq n \quad \text{et donc} \quad \lim_{n \to n} f(x_n) = \infty.$$

La suite $(x_n)_n \subset [a, b]$ est bornée, elle admet donc une sous-suite $(x_{n_k})_{n_k}$ qui converge vers $\ell \in [a, b]$. Comme f est continue sur $[a, b]$, on a $\lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(\ell)$. Cela est en contradiction avec $\lim_{n \to n} f(x_n) = \infty$. $\square$

Théorème 2. Soit f une fonction réelle continue sur un segment $[a, b]$. Alors il existe deux réels m et M tels que $f([a, b]) = [m, M]$.

Autrement dit, l'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé.



Remarque 4. Comme on sait déjà par le théorème des valeurs intermédiaires que $f([a, b])$ est un intervalle, le théorème précédent signifie exactement que

Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est bornée sur $[a, b]$ et elle atteint ses bornes.

Donc m est le minimum de la fonction sur l'intervalle $[a, b]$ alors que M est le maximum.

Démonstration. D'après la proposition ci-dessus $f([a, b])$ est un ensemble borné, il existe donc deux réels m et M tels que $m = \inf f([a, b])$ et $M = \sup f([a, b])$. Nous allons montrer que $m \in f([a, b])$. La preuve que $M \in f([a, b])$ est laissée en exercice.

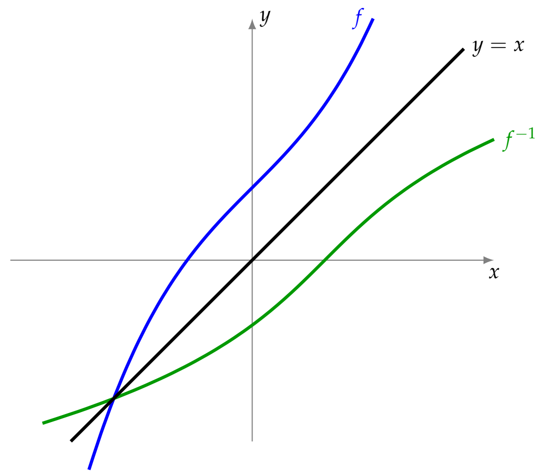
Puisque $m = \inf f([a, b])$, il existe une suite $(y_n)_n \subset f([a, b])$ telle que $\lim\limits_{n\to n} y_n) = m$. Soit $(x_n)_n \subset [a, b]$ une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = y_n$. La suite $(x_n)_n$ est bornée, donc admet une sous-suite $(x_{n_k})_{n_k}$ qui converge vers $\ell \in [a, b]$. Comme f est continue, on a $\lim\limits_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(l)$. L'unicité de la limite implique que $m = \lim\limits_{n\to n} y_n = \lim\limits_{n\to n} f(x_{n_k}) = f(l)$. $\square$

Exercices

1. Soit $P(x) = x^5 - 3x - 2$ un polynôme sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]1, 2[$ tel que $P(x_0) = 0$
2. Montrer qu'il existe $x > 0$ tel que $2^x + 3^x = 5^x$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Tracer son graphe si $f(\mathbb{R}) = [0, 1]$, et si $f(\mathbb{R}) =]0, 1[$.
4. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que $\forall x \in [0, 1]\ f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1]\ f(x) + m < g(x)$. Ce résultat est-il vrai si on remplace $[0, 1]$ par $\mathbb{R}$?
5. Soit f une fonction continue sur $[1, 5]$. On suppose que les seules solutions à l'équation $f(x) = 6$ sont $x = 1$ et $x = 4$. Montrer que si $f(2) = 8$ alors $f(3) > 6$.

3.5.4 Fonctions monotones et bijections

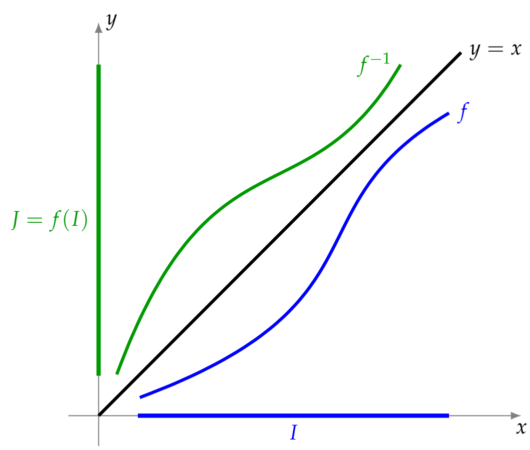
Pour tout ensemble $E \subset \mathbb{R}$ on notera Id_E la fonction *identité* sur E définie par : $x \mapsto \mathrm{Id}_E(x) = x$. Rappelons que si $f : E \to F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$La fonction g est la bijection réciproque de f et se note f^{-1}. Dans un repère orthonormé les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.



Voici un résultat important qui permet d'obtenir des fonctions bijectives.

Théorème 3. [Théorème de la bijection] Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors

1. f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,
2. la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.



En pratique, si on veut appliquer ce théorème à une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$, on découpe l'intervalle I en sous-intervalles sur lesquels la fonction f est strictement monotone.

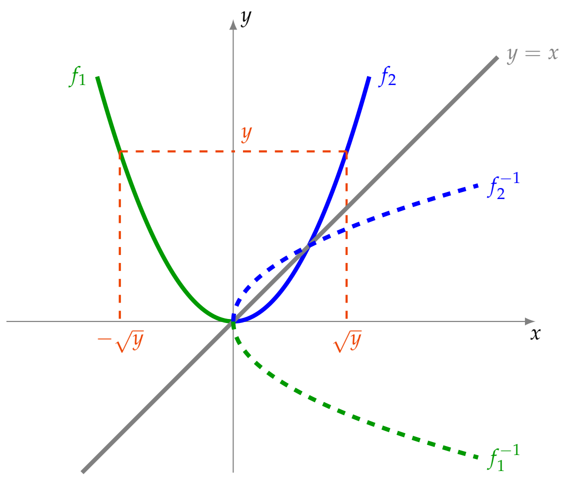
Exemple 19. Considérons la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. La fonction f n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$, d'ailleurs, on voit bien qu'elle n'est pas injective. Cependant, en restreignant son ensemble de définition à $]-\infty, 0]$ d'une part et à $[0, +\infty[$ d'autre part, on définit deux fonctions strictement monotones (les ensembles de départ sont différents) :

$$f_1 : \begin{cases}]-\infty, 0] \longrightarrow [0, +\infty[\\ \quad x \longmapsto x^2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f_2 : \begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[\\ \quad x \longmapsto x^2 \end{cases}$$

On remarque que $f(]-\infty,0]) = f([0,+\infty[) = [0,+\infty[$. D'après le théorème précédent, les fonctions f_1 et f_2 sont des bijections. Déterminons leurs fonctions réciproques $f_1^{-1} : [0,+\infty[\to]-\infty,0]$ et $f_2^{-1} : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$. Soient deux réels x et y tels que $y \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = x^2 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{y} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{y}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire y admet deux antécédents, l'un dans $[0,+\infty[$ et l'autre dans $]-\infty,0]$. Et donc $f_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ et $f_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$. On retrouve bien que chacune des deux fonctions f_1 et f_2 a le même sens de variation que sa réciproque.



On remarque que la courbe totale en pointillée (à la fois la partie bleue et la verte), qui est l'image du graphe de f par la symétrie par rapport à la première bissectrice, ne peut pas être le graphe d'une fonction : c'est une autre manière de voir que f n'est pas bijective.

Généralisons l'exemple précédent.

Exemple 20. Soit $n \geq 1$. Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ définie par $f(x) = x^n$. Alors f est continue et strictement croissante. Comme $\lim_{+\infty} f = +\infty$ alors f est une bijection. Sa bijection réciproque f^{-1} est notée : $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ (ou aussi $x \mapsto \sqrt[n]{x}$) : c'est la fonction racine n-ième. Elle est continue et strictement croissante.

3.5.5 Démonstration

On établit d'abord un lemme utile à la démonstration du théorème précédent.

Lemme 2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I, alors f est injective sur I.

Démonstration. Soient $x, x' \in I$ tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$. Si on avait $x < x'$, alors on aurait nécessairement $f(x) < f(x')$ ou $f(x) > f(x')$, suivant que f est strictement croissante, ou strictement décroissante. Comme c'est impossible, on en déduit que $x \geq x'$. En échangeant les rôles de x et de x', on montre de même que $x \leq x'$. On en conclut que $x = x'$ et donc que f est injective. □

Démonstration du théorème.

1. D'après le lemme précédent, f est injective sur I. En restreignant son ensemble d'arrivée à son image $J = f(I)$, on obtient que f établit une bijection de I dans J. Comme f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, l'ensemble J est un intervalle.

2. Supposons pour fixer les idées que f est strictement croissante.

   (a) Montrons que f^{-1} est strictement croissante sur J. Soient $y, y' \in J$ tels que $y < y'$. Notons $x = f^{-1}(y) \in I$ et $x' = f^{-1}(y') \in I$. Alors $y = f(x)$, $y' = f(x')$ et donc

   $$\begin{aligned} y < y' &\implies f(x) < f(x') \\ &\implies x < x' \qquad \text{(car } f \text{ est strictement croissante)} \\ &\implies f^{-1}(y) < f^{-1}(y'), \end{aligned}$$

   c'est-à-dire f^{-1} est strictement croissante sur J.

   (b) Montrons que f^{-1} est continue sur J. On se limite au cas où I est de la forme $]a, b[$, les autres cas se montrent de la même manière. Soit $y_0 \in J$. On note $x_0 = f^{-1}(y_0) \in I$. Soit $\epsilon > 0$. On peut toujours supposer que $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subset I$. On cherche un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in J$ on ait

   $$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \implies f^{-1}(y_0) - \epsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \epsilon$$

   c'est-à-dire tel que pour tout $x \in I$ on ait

   $$y_0 - \delta < f(x) < y_0 + \delta \implies f^{-1}(y_0) - \epsilon < x < f^{-1}(y_0) + \epsilon.$$

   Or, comme f est strictement croissante, on a pour tout $x \in I$

   $$\begin{aligned} f(x_0 - \epsilon) < f(x) < f(x_0 + \epsilon) &\implies x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon \\ &\implies f^{-1}(y_0) - \epsilon < x < f^{-1}(y_0) + \epsilon. \end{aligned}$$

   Comme $f(x_0 - \epsilon) < y_0 < f(x_0 + \epsilon)$, on peut choisir le réel $\delta > 0$ tel que

   $$f(x_0 - \epsilon) < y_0 - \delta \quad \text{et} \quad f(x_0 + \epsilon) > y_0 + \delta$$

   et on a bien alors pour tout $x \in I$

   $$\begin{aligned} y_0 - \delta < f(x) < y_0 + \delta &\implies f(x_0 - \epsilon) < f(x) < f(x_0 + \epsilon) \\ &\implies f^{-1}(y_0) - \epsilon < x < f^{-1}(y_0) + \epsilon. \end{aligned}$$

   La fonction f^{-1} est donc continue sur J.

□

Exercices

1. Montrer que chacune des hypothèses « continue » et « strictement monotone » est nécessaire dans l'énoncé du théorème.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x$. Montrer que f est bijective, tracer le graphe de f et de f^{-1}.
3. Soit $n \geq 1$. Montrer que $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ définit une bijection de l'intervalle $[0,1]$ vers un intervalle à préciser.
4. Existe-t-il une fonction continue : $f : [0,1[\to]0,1[$ qui soit bijective ? $f : [0,1[\to]0,1[$ qui soit injective ? $f :]0,1[\to [0,1]$ qui soit surjective ?
5. Pour $y \in \mathbb{R}$ on considère l'équation $x + \exp x = y$. Montrer qu'il existe une unique solution y. Comment varie y en fonction de x ? Comme varie x en fonction de y ?

3.5.6 Continuité uniforme

Définition 14. Soit $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *uniformément continue* sur D si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad \forall x' \in D \quad |x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Remarque 5.

— Dans cette écriture logique, α dépend de ϵ, mais ne dépend ni de x ni de x'. d'où l'origine du mot uniforme.

— Il est évident qu'une fonction uniformément continue sur D est continue sur D.

— Une fonction $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *lipschitzienne* s'il existe une constante k telle que

$$\forall x \in D \quad \forall x' \in D \quad |f(x) - f(x')| < k\,|x - x'|.$$

Il est clair qu'une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Exemple 21. La fonction f définie sur $]0, \infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas uniformément continue. En effet, supposons qu'elle l'est et soit $\epsilon > 0$ un réel fixé. Il existe donc un $\delta > 0$ tel que

$$|x - x'| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}'} \right| < \epsilon.$$

Pour $x' = 2x$, on aurait alors, $|x| < \delta \Longrightarrow \left| \dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2x}} \right| < \epsilon$. Or ceci est impossible car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2x}} = \infty$.

En général, il n'y a pas une équivalence entre la continuité et la continuité uniforme d'une fonction. Le théorème suivant précise les conditions pour une telle équivalence.

Théorème 4. [Théorème de **Heine**] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f une fonction réelle **continue sur** $[a, b]$. Alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Démonstration. On suppose que f n'est pas uniformément continue, donc

$$\exists\epsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists x_n, y_n \in [a,b] \quad |x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \text{ mais } |f(x_n) - f(x'_n)| > \epsilon.$$

La suite $(x_n)_n \subset [a,b]$ est bornée, donc admet une sous-suite $(x_{n_k})_{n_k}$ qui converge vers $x \in [a,b]$. Comme f est continue, on a $\lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$.

D'autre part on a $|x'_{n_k} - x| \leq |x_{n_k} - x| + |x'_{n_k} - x_{n_k}| \leq |x_{n_k} - x| + \frac{1}{n_k}$. On en déduit que la sous-suite $(x'_{n_k})_{n_k}$ qui converge vers $x \in [a,b]$ et par conséquent on a $\lim_{n_k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(x)$.

Nous avons ainsi deux sous-suites $(x_{n_k})_{n_k}$ et $(x'_{n_k})_{n_k}$ telles que $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| > \epsilon$ pour tout $n_k \in \mathbb{N}^*$ et $\lim_{n_k\to\infty} f(x'_{n_k}) = \lim_{n_k\to\infty} f(x'_{n_k})$. Ceci est évidemment impossible. $\square$