Université Mohammed V de Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Exercice 1.

1- Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r \times x \notin \mathbb{Q}$.

2- Soient r et r' deux rationnels tels que $r < r'$. Montrer que $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) \notin \mathbb{Q}$.

3- En déduire qu'entre deux rationnels distincts il y a au moins un irrationnel.

Exercice 2. Soient $a > 0$ et $b \geq 0$ deux réels.

1- Montrer que l'ensemble $S = \{n \in \mathbb{N} : n\ a > b\}$ est non vide et admet un plus petit élément que l'on notera p.

2- On pose $r = b - (p-1)a$. Montrer que $r < a$.

3- En déduire que $\forall x > 0$ et $\forall y \geq 0$, il existe un couple $(q, r) \in \mathbb{N} \times [0, x[$ tel que $y = qx + r$. Montrer que ce couple est unique.

Exercice 3. Déterminer (s'ils existent) les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[1,2] \cap \mathbb{Q}, \qquad [1,2[\cap \mathbb{Q}, \qquad \mathbb{N}, \qquad \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1}\right\}.$$

Exercice 4. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles **A** et **B** où **A**$= \{0.2; 0.22; 0.222; 0.2222; \ldots\}$ et **B** est l'ensemble des nombres décimaux compris entre 0 et 1 et dont les seuls chiffres sont des 0 et des 1.

Exercice 5. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note $A + B = \{a + b : (a, b) \in A \times B\}$. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 6. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles suivants :

1- $\mathbf{A} = \left\{\dfrac{n}{n+m}; m, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

2- $\mathbf{B} = \left\{\dfrac{n}{m} + \dfrac{4m}{n}; m, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Indication : $\forall a, b > 0,\ a + b > 2\sqrt{ab}$.

Exercices Facultatifs

Exercice 7. Montrer que $x = 310.712\,3256\,3256\,3256\,3256\ldots\ 3256\ldots$ est un rationnel.

Exercice 8 (CF Automne 2017)**.** Soient A une partie de $\mathbb{R}$ minorée et $B \neq \emptyset$ un sous-ensemble de A. Montrer que : $\inf A \leq \inf B$.

Exercice 9. Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} : 1 < x \text{ et } x^2 < 2\}$.

1- Montrer que A est une partie non vide et majorée dans $\mathbb{Q}$.

2- Soit $r \in A$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n(2 - r^2) > 2r + 1$. En déduire que $r' = r + \dfrac{1}{n} \in A$.

3- Soit $M \in \mathbb{Q}$ un majorant de A. Montrer que $M > \sqrt{2}$.

4- En déduire que $\sup A \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 10. Soient a et b deux nombres réels. Montrer l'implication suivante :

$$\Big[a < b + \epsilon,\ \forall \epsilon > 0\Big] \Longrightarrow a \leq b.$$

Que peut-on dire de la réciproque ?

Exercice 11. Étant donné $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux ensembles de réels strictement positifs, on définit

$$\mathbf{A.B} = \{z = xy : x \in \mathbf{A}, y \in \mathbf{B}\}, \text{ et } \frac{1}{\mathbf{A}} = \{z = \frac{1}{x} : x \in \mathbf{A}\}.$$

1- Montrer que $\sup(\mathbf{A.B}) = \sup \mathbf{A} \sup \mathbf{B}$.

2- Montrer aussi que si $\inf \mathbf{A} > 0$, alors $\sup \dfrac{1}{\mathbf{A}} = \dfrac{1}{\inf \mathbf{A}}$.

Exercice 12. Soient α un nombre irrationnel et n un entier strictement positif. Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on pose $\alpha_k = k\alpha - [k\alpha]$.

1- Montrer que, $\exists\, i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tel que : $\alpha_j - \alpha_i < \dfrac{1}{n}$.

2- Montrer qu'il existe un entier $q_n > 0$ et un entier p_n tels que

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{n\, q_n}.$$