Mécanique du Point Matériel

Mohamed EL KACIMI

Université Cadi Ayyad - Faculté des Sciences Semlalia
Département de Physique

Année Universitaire 2016/2017

Chapitre I : Rappels et Compléments Mathématiques

Sommaire

Chapitre I: Rappels et Compléments Mathématiques

Introduction

La mécanique newotonienne est l'une des premières théories les plus abouties.

Elle constitue un cadre mathématique complet qui définit les outils de calcul permettant de déterminer le mouvement d'un point. Elle est élaborée à partir du formalisme vectoriel.

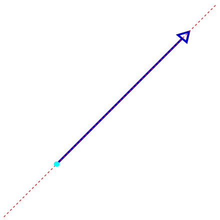
Ainsi nous allons d'abord passer en revue des notions sur les vecteurs et le calcul vectoriel, le calcul opératoriel, les équations différentielles,les repères, les systèmes de coordonnées et enfin la différentiation d'un vecteur.

Chapitre I: Rappels et Compléments Mathématiques

Notions de vecteurs
Définition

c'est une grandeur caractérisée par quatre propriétés :

- intensité : le module ou la norme du vecteur ;
- direction ;
- sens ;
- et éventuellement l'origine.



Une grandeur est dite scalaire lorsqu'elle est décrite par un nombre : masse, température, $\cdots$

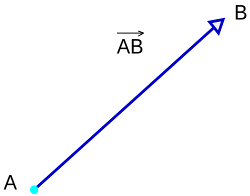
Notions de vecteurs

Classes de vecteurs

Vecteur lié

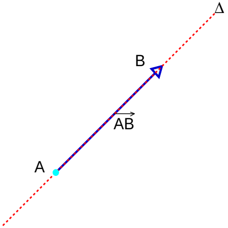
$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur lié si son support et son point d'application A sont fixes.

Exemples : Vitesse, Accélération, $\cdots$



Vecteur glissant

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur glissant si son origine peut prendre n'importe quelle position sur son support (Δ).

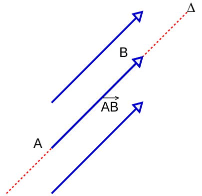


Notions de vecteurs

Classes de vecteurs (II)

Vecteur libre

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur libre si son origine et son support (Δ) ne sont pas fixes. On obtient ainsi une infinité de configurations dites équipollentes au vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Remarques

- Dans les figures précédentes, $\overrightarrow{AB}$ a son origine au point A et son extrémité au point B, sa direction est celle de la droite (Δ) et son module $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.
- Toutes les grandeurs vectorielles dépendent du repère d'observation.

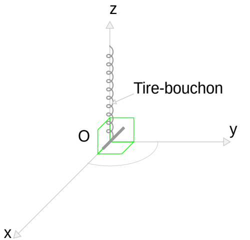
Repères et réferentiels

Le temps et la position

La connaissance du mouvement d'un point matériel nécessite la connaissance de l'évolution de ses positions en fonction du temps. Aussi, il faut repérer les positions et mesurer le temps correspondant à chacune d'elles.

Le temps :
il est mesuré par une horloge. L'unité du temps dans le système international (SI) est la seconde.

La position :
elle est déterminée dans un repère d'espace, ou trièdre, et exprimée dans un système de coordonnées. Le repère est constitué de 3 axes Ox, Oy et Oz orthogonaux deux à deux et concourants au point O appelé l'origine. Le repère est noté alors $\mathcal{R}(O, x, y, z)$. Le repère est dit droit si la règle du tire-bouchon s'applique pour ces axes.



Repères et réferentiels

Notion de base de l'espace des positions

Chaque axe du repère est muni d'un vecteur unitaire qui indique l'orientation de l'axe et l'unité de mesure sur cet axe. Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les trois vecteurs unitaires portés respectivement par les axes (Ox, Oy, Oz). $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forment une base orthonormée du repère $\mathcal{R}(O, x, y, z)$.

Dans la suite de ce cours toutes les bases seront orthonormées et directes.

Remarque

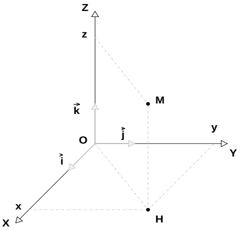
Tout vecteur $\vec{v}$ s'écrit sur la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ comme

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$$

où (v_1, v_2, v_3) sont les composantes de $\vec{v}$ respectivement selon $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.
La position d'un point M peut être repérée à l'aide du vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

(x, y, z) sont les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Opérations sur les vecteurs

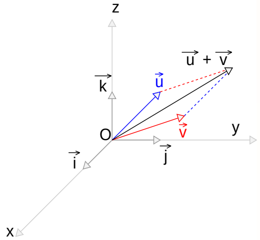
Addition de deux vecteurs et multiplication par un réel

Les vecteurs seront exprimés dans la base cartésienne sauf mention contraire.

Addition

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} \\ \vec{v} &= v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} \end{aligned}$$



alors la somme des deux vecteurs est donnée par

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1)\vec{i} + (u_2 + v_2)\vec{j} + (u_3 + v_3)\vec{k}$$

Multiplication par un scalaire

Soit λ un nombre réel. On a

$$\lambda \times \vec{u} = (\lambda \times u_1)\vec{i} + (\lambda \times u_2)\vec{j} + (\lambda \times u_3)\vec{k}$$

Opérations sur les vecteurs

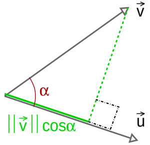
Produit scalaire

Le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2 + u_3 \times v_3 \\ &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha). \end{aligned}$$

C'est un scalaire qui peut être positif , négatif ou nul selon α.
$\vec{u}\cdot\vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ est par définition la norme ou le module du vecteur $\vec{u}$. Ainsi

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$



Remarques

- A chaque vecteur non nul $\vec{v}$, on peut associer un vecteur unitaire $\vec{u}_v$ tel que

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Opérations sur les vecteurs
Produit scalaire

Remarques II

- Le produit scalaire ne dépend pas de la base dans laquelle les vecteurs sont exprimés. Il est invariant dans un changement de base.
- $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Les composantes d'un vecteur sont constituées par ses projections sur les vecteurs de la base :

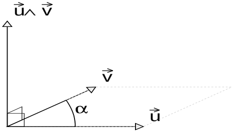
$$\left\{ \begin{array}{lllllll} u_1 & = & \vec{u} \cdot \vec{i} & \quad & v_1 & = & \vec{v} \cdot \vec{i} \\ u_2 & = & \vec{u} \cdot \vec{j} & & v_2 & = & \vec{v} \cdot \vec{j} \\ u_3 & = & \vec{u} \cdot \vec{k} & & v_3 & = & \vec{v} \cdot \vec{k} \end{array} \right.$$

Opérations sur les vecteurs

Produit vectoriel ou produit extérieur

Le produit vectoriel entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est un vecteur défini par :

- son module
$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \mid \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \mid = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \mid \sin\alpha \mid$;
- sa direction est orthogonale au plan formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- son sens est tel que le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est droit.



En utilisant les coordonnées cartésiennes de chacun des vecteurs, l'expression du produit vectoriel est donnée par

$$\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} &= (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}) \wedge (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}) \\
&= (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

qui peut être donc mise sous la forme d'un déterminant développé suivant la première ligne.

Opérations sur les vecteurs

Produit vectoriel ou produit extérieur

Propriétés

- antisymétrie : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$;
- distributivité par rapport à l'addition : $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \wedge \vec{v} = (\vec{u}_1 \wedge \vec{v}) + (\vec{u}_2 \wedge \vec{v})$;
- multiplication par un scalaire : $\lambda \vec{u}_\wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \lambda \vec{v} = \lambda\,(\vec{u} \wedge \vec{v})$;
- non associativité : $\vec{u}_1 \wedge (\vec{u}_2 \wedge \vec{v}) \neq (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \wedge \vec{v}$.

Remarques

- Deux vecteurs non nuls sont parallèles si leur produit vectoriel est nul $\vec{u}//\vec{v} \Longrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Les vecteurs de la base cartésienne vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{j} & = & 0 \\ \vec{j} \cdot \vec{k} & = & 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{i} & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{j} & = & \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} & = & \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} & = & \vec{j} \end{cases} \qquad \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1.$$

Opérations sur les vecteurs
Double produit vectoriel et produit mixte

Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel est un vecteur défini comme suit

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \quad = \quad (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}.$$

C'est un vecteur qui appartient au plan engendré par $(\vec{v}, \vec{w})$.

Produit mixte

On appelle le produit mixte entre trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ le scalaire, noté $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et défini par

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \quad = \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}).$$

Si l'on explicite l'expression en fonction des coordonnées cartésiennes des trois vecteurs :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} \\ \vec{v} &= v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} \\ \vec{w} &= w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

Chapitre I: Rappels et Compléments Mathématiques

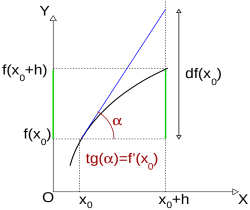
Différentielle et Calcul opératoriel

Différentielle

Cas d'une fonction à une seule variable $f(x)$

Dérivée : On rappelle que la dérivée de $f(x)$ en x_0 est donnée par

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$



Remarque

- Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$ est donné par $\mathrm{tg}(\alpha) = f'(x_0)$.

Différentielle : On rappelle que la différentielle de $f(x)$ en x_0 est donnée par

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)h = f'(x_0)dx \quad \text{avec } h = dx.}$$

Remarque

- $f(x_0+h) - f(x_0) = df(x_0) + h\epsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$
$\Longrightarrow f(x_0+h) - f(x_0) \neq df(x_0)$.

Différentielle et Calcul opératoriel

Différentielle

Cas d'une fonction à deux variables $f(x,y)$

Dérivée partielle : On définit la dérivée partielle de $f(x,y)$ par rapport à x en (x_0,y_0) par

$$\frac{\partial f(x,y_0)}{\partial x}\Big|_{x=x_0} = \lim_{h_x\to 0}\frac{f(x_0+h_x,y_0)-f(x_0,y_0)}{h_x}$$

Remarques

- On fixe y et on dérive f par rapport à x et le résultat est évalué en (x_0,y_0).
- **Exemple :** $f(x,y)=\log(x)\,(2y+1) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\big|_{x=x_0} = \frac{2y_0+1}{x_0}$

Différentielle : On définit la différentielle de $f(x,y)$ en (x_0,y_0) par

$$df(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{x_0,y_0}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{x_0,y_0}dy$$

Remarques

- **Exemple :** $f(x,y)=\log(x)\,(2y+1) \Longrightarrow df(x_0,y_0) = \frac{2y_0+1}{x_0}dx + 2\log(x_0)dy$
- La différentielle est utilisée dans le calcul des incertitudes.

Différentielle et Calcul opératoriel

Forme différentielle totale exacte

Forme différentielle : elle est définie par

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy}$$

La forme différentielle est dite totale exacte (d.t.e) s'il existe une fonction $g(x,y)$ telle que $dg(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$.

Une condition nécessaire et suffisante pour une d.t.e : **condition de Schwarz** :

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0}$$

Théorème de Green :

$$\boxed{\oint_{(C)} (Mdx + Ndy) = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right) dxdy}$$

$\Longrightarrow$ Si $(Mdx + Ndy)$ est une d.t.e alors son intégrale sur un chemin fermé est nul.

$\Longrightarrow$ L'intégrale d'une d.t.e entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi.

Exemple de d.t.e : Les fonctions d'état en thermodynamique : U, H, S, $\cdots$.

Différentielle et Calcul opératoriel

Opérateurs

Opérateur nabla $\vec{\nabla}$: L'opérateur $\vec{\nabla}$ est un vecteur défini dans la base cartésienne par

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}}$$

Gradient : Le gradient d'un scalaire $f(x, y, z)$ est défini dans la base cartésienne par

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f) = \vec{\nabla}(f) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}}$$

Divergence : La divergence d'un vecteur $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ est définie par

$$\boxed{\div(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}$$

Rotationel : Le rotationel d'un vecteur $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ est défini par

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\vec{k} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}}$$

Différentielle et Calcul opératoriel

Eléments de calcul opératoriel

Quelques relations du calcul opératoriel Soit $\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$,

- $df = \overrightarrow{\mathbf{grad}}(f) \cdot \vec{dl}$
- $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})f + f\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \overrightarrow{\mathbf{grad}}(f) \cdot \vec{A} + f \div (\vec{A})$
- $\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A}\vec{\nabla}) \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot (\vec{\nabla}\vec{A})$
- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0 \quad \textbf{soit} \quad \div (\overrightarrow{\mathbf{rot}} A) = 0$
- $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

  $\textbf{soit} \quad \overrightarrow{\mathbf{rot}}(\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\mathbf{grad}}(\div \vec{A}) - \Delta\vec{A}$

Δ étant le laplacien défini par

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Equations différentielles

Premier ordre

Equation différentielle de premier ordre

$$\boxed{y' + f(x)y = g(x)}$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions de x bien définies.

Remarque : Linéarité de l'équation$\Longrightarrow$ la solution complète = la solution générale sans second membre y_{sm}, $y'_{sm} + f(x)y_{sm}(x) = 0$, + une solution particulière y_p

$$\boxed{y = y_{sm} + y_p.}$$

Solution générale sans second membre y_{sm}

$$\boxed{y' + f(x)y = 0 \Longrightarrow y_{sm} = Ke^{-\int f(x)dx} \quad \textbf{K est une constante réelle}}$$

Solution particulière y_p : Méthode de la variation de la constante $y = K(x)y_{sm}$

$$\boxed{y_p = \left(\int g(x)e^{F(x)}dx\right)e^{-F(x)} \quad \textbf{où} \quad F(x) = \int f(x)dx}$$

Equations différentielles
Premier ordre

Solution complète

$$\boxed{y = y_{sm} + y_p = \left(K + \left[\int g(x)e^{F(x)}dx\right]\right) e^{-F(x)} \quad \textbf{où} \quad F(x) = \int f(x)dx.}$$

Exemple : $y' + \sin(x)y = \sin(x)$

équation sans second membre $y' + \sin(x)y = 0$, **ainsi** $f(x) = \sin(x)$ **alors**
$F(x) = -\cos(x) \Longrightarrow y_{sm} = C_1 e^{\cos(x)}$

$$\int g(x)e^{F(x)}dx = \int \sin(x)e^{-\cos(x)}dx = e^{-\cos(x)} + C_2 \Longrightarrow y_p = C_2 e^{\cos(x)} + 1$$
$$\Downarrow$$

$$y = y_{sm} + y_p = \left(C_1 + C_2 + e^{-\cos(x)}\right) e^{\cos(x)} = 1 + Ke^{\cos(x)} \quad \textbf{avec} \quad K = C_1 + C_2$$

On vérifie bien que $y = 1 + Ke^{\cos(x)}$ **satisfait l'équation différentielle.**

Equation à variables séparées : $f(y)y' = g(x)$

La solution d'une telle équation est

$$\boxed{F(y) = G(x) + K \quad F(y) = \int f(y)dy \quad \textbf{et} \quad G(x) = \int g(x)dx.}$$

Equations différentielles

Second ordre à coefficients constants

L'équation est sous la forme

$$\boxed{ay'' + by' + cy = f(x) \quad \textbf{où} \quad a, b, c \quad \textbf{constantes réelles avec} \quad a \neq 0.}$$

Solution sans second membre : On cherche une solution de la forme $y_{sm} = e^{rx} \Longrightarrow ar^2 + br + c = 0$, appelée l'équation caractéristique dont le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$.

•$\Delta > 0$: 2 solutions réelles $r_1, r_2 \Longrightarrow$

$$\boxed{y_{sm} = K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x}}$$

•$\Delta < 0$: 2 solutions complexes $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta \Longrightarrow$

$$\boxed{y_{sm} = K_1 e^{\lambda_1 x} + K_2 e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x}\left(K_1 e^{i\beta x} + K_2 e^{-i\beta x}\right)}$$

•$\Delta = 0$: racine double réelle r_{12}

$$\boxed{r_{12} \Longrightarrow y_{sm} = e^{r_{12} x}(K_1 + K_2 x)}$$

La solution complète est de la forme

$$\boxed{y = y_{sm} + y_p \quad y_p \ \textbf{étant une solution particulière.}}$$

Chapitre I: Rappels et Compléments Mathématiques

Système de coordonnées

Introduction

On considère le référentiel formé par l'espace physique spatial, par exemple le laboratoire dans lequel on mène une expérience, muni d'une horloge.

Pour étudier le mouvement d'un point matériel, on dote ce référentiel d'un système de coordonnées.

Les systèmes de coordonnées que nous utiliserons sont

- coordonnées cartésiennes (x, y, z) ;
- coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) ;
- coordonnées sphériques (r, θ, φ).

Système de coordonnées

Coordonnées cartésiennes

Considérons un repère $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ d'origine O et d'axes réctangulaires Ox, Oy et Oz. Chacun des axes est muni d'un vecteur unitaire respectivement $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ tel que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forme une base orthonormée directe tels que

$$\left\{\begin{array}{rcccccc} \|\vec{i}\| & = & \|\vec{j}\| & = & \|\vec{k}\| & = & 1 \\ \vec{i} \wedge \vec{j} & = & \vec{k} & & & & \\ \vec{j} \wedge \vec{k} & = & \vec{i} & & & & \\ \vec{k} \wedge \vec{i} & = & \vec{j} & & & & \end{array}\right.$$

Un point M est réperé dans ce système par ses coordonnées cartésiennes x,y et z et par le vecteur $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ peut être représenté par un vecteur colonne comme suit

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$$

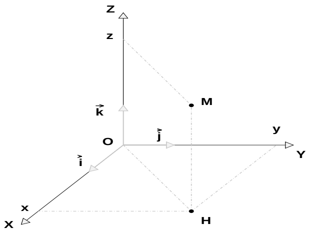
Système de coordonnées

Coordonnées cartésiennes

Les coordonnées peuvent être reconstruites géométriquement.

Soit H la projection du point M sur le plan (x, y) :

- x : la perpendiculaire à l'axe Ox menée de H coupe l'axe Ox en x ;
- y : la perpendiculaire à l'axe Oy menée de H coupe l'axe Oy en x ;
- z : la perpendiculaire à l'axe Oz menée de M coupe l'axe Oz en z ;



Si x,y et z dépendent du temps, alors $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont les équations horaires du mouvement.

Le domaine de variation des coordonnées cartésiennes est

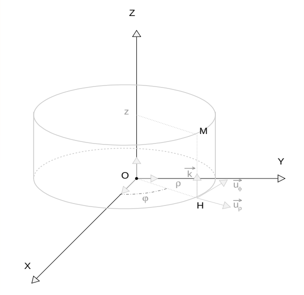
$$\begin{cases} x \in]-\infty, +\infty[\\ y \in]-\infty, +\infty[\\ z \in]-\infty, +\infty[\end{cases}$$

Système de coordonnées

Coordonnées cylindriques

Le point M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) peut être repéré par (ρ, φ, z) définies par

$$M \left\{ \begin{array}{ccc} \|\overrightarrow{OH}\| & = & \rho \\ (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OH}) & = & \varphi \\ z & = & \overline{HM} \end{array} \right.$$



$\rho \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ **et** $z \in]-\infty, +\infty[$.

(ρ, φ, z) **: coordonnées cylindriques du point M :**

$$\overrightarrow{OM} \quad = \quad \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + \mathbf{z}\vec{k}$$

avec $\vec{e}_\rho = \dfrac{\overrightarrow{OH}}{\|\overrightarrow{OH}\|}$

Remarques

- ρ **varie et φ et z constants : M décrit une droite orientée par φ ;**
- φ **varie et ρ et z constants : M décrit un cercle de centre O dans le plan d'équation z =constante ;**
- z **varie et ρ et φ constants : M décrit une droite // à OZ.**

Système de coordonnées

Coordonnées cylindriques : base cylindrique

On peut construire la base cylindrique, orthonormée directe, comme suit :

- $\vec{e}_\rho = \frac{\overrightarrow{OH}}{\|\overrightarrow{OH}\|}$, qui repère les variations de ρ ;
- $\vec{e}_\varphi \perp$ à $\vec{e}_\rho$ et contenu dans le plan (X, Y) : il repère les variations de φ ;
- $\vec{e}_Z = \vec{k}$, qui repère les variations de z.

$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ **est la base cylindrique et** $\mathcal{R}(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ **est le repère d'origine** O **muni de cette base.**

Notons que quand M se déplace, les vecteurs de la base varient.
La base cylidrique est une base mobile.

Relations entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques

$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}$, **exprimons** $\vec{e}_\rho$ **dans la base cartésienne :**

$$\vec{e}_\rho \quad = \quad \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & \rho\cos\varphi \\ y & = & \rho\sin\varphi \\ z & = & z \end{array} \right.$$

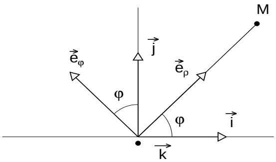
Un vecteur $\vec{V}$ **peut s'exprimer dans la base cylindrique comme suit** $\vec{V} = V_\rho\vec{e}_\rho + V_\varphi\vec{e}_\varphi + V_z\vec{k}$
où V_ρ,V_φ **et** V_z **sont les composantes cylindriques de** $\vec{V}$.

Système de coordonnées

Cas particulier : coordonnées polaires

Lorsque M se déplace dans un plan d'équation $z =$constante, son mouvement peut être repéré seulement par ρ et φ que l'on appelle les coordonnées polaires :

$$M \left\{ \begin{array}{lll} \rho & = & \|\overrightarrow{OM}\| \quad \text{rayon polaire} \\ \varphi & = & (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) \quad \text{angle polaire} \end{array} \right.$$



Ainsi

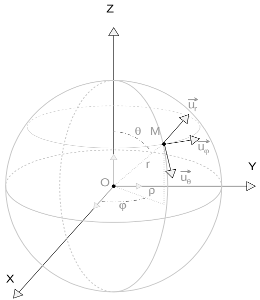
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \rho\cos\varphi\vec{i} + \rho\sin\varphi\vec{j} \\ &= x\vec{i} + y\vec{j} \Longrightarrow \tan\varphi = \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Un vecteur $\vec{V}$ peut se décomposer comme $\vec{V} = V_\rho \vec{e}_\rho + V_\varphi \vec{e}_\varphi$, V_ρ est la composante radiale et V_φ est la composante orthoradiale.

Système de coordonnées
Coordonnées sphériques

Un point M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou cylindriques (ρ, φ, z), peut être repéré par les coordonnées sphériques (r, θ, φ) définies par

$$M \begin{cases} r = \|\overrightarrow{OM}\| & r \geq 0; \\ \theta = (\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM}) & \theta \in [0, \pi]; \\ \varphi = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OH}) & \varphi \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$



Remarques

- Si r varie et θ et φ sont constants, M décrit la droite orientée par θ et φ ;
- Si φ est variable et r et θ sont constants alors M décrit un cercle de rayon $r\sin\theta$;
- Si θ est variable et r et φ sont constants, M décrit le demi cercle méridien passant par M.

Système de coordonnées
Coordonnées sphériques

Le trièdre $(\vec{e}_r, \vec{r}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ définit la base sphérique telle que :

$\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ repère les variations de r ;

$\vec{e}_\theta$ tangent en M au méridien dans le sens croissant de θ ;

$\vec{e}_\varphi$ tangent en M à la parallèle dans le sens croissant de φ.

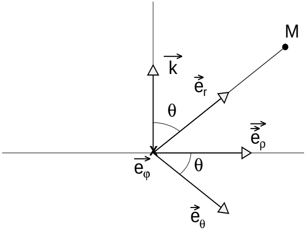
Relations entre les coordonnées catésiennes, cylindriques et sphériques

On exprime $\vec{e}_r$ dans la base cartésienne et on le substitue dans $\overrightarrow{OM}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= r\vec{e}_r = r\cos\theta\vec{k} + r\sin\theta\vec{e}_\rho \\
&= r\cos\theta\vec{k} + r\sin\theta\left(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}\right) \\
&= r\sin\theta\cos\varphi\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\vec{j} + r\cos\theta\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\varphi = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = z = r\cos\theta \end{cases}$$



Chapitre I: Rappels et Compléments Mathématiques

Différentielle d'un vecteur

Définition

La différentielle d'un vecteur $\vec{A}$ est la modification $d\vec{A}$ engendrée par la variation de l'un ou de plusieurs paramètres dont dépend cette grandeur : temps, angle, longueur,$\cdots$. Considérons une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, alors

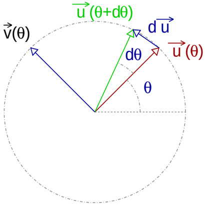
$$\vec{A} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1,3} a_i\vec{e}_i$$

Définition : La différentielle du vecteur $\vec{A}$ est définie par

$$d\vec{A} = \sum_{i=1,3} (da_i\vec{e}_i + a_i d\vec{e}_i)$$

Différentielle d'un vecteur unitaire $\vec{u}$:

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1 \Longrightarrow d\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Longrightarrow d\vec{u} \perp \vec{u}$
- $\|\vec{u}\| = 1 \Longrightarrow$ seule sa direction varie. Soit θ l'angle qui repère sa rotation.
- $d\vec{u} = \vec{u}(\theta + d\theta) - \vec{u}(\theta) = \|d\vec{u}\|\vec{v}$ avec $\vec{v} \perp \vec{u}$.
- $d\theta \to 0$ alors $\|d\vec{u}\| = \|\vec{u}\|d\theta = d\theta$;
- soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée directe



$$\Longrightarrow d\vec{u} = d\theta\vec{v} = \dot{\theta}dt\vec{w} \wedge \vec{u}$$

Différentielle d'un vecteur

Notons par $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{w}$ le vecteur rotation de $\vec{u}$, la différentielle de $\vec{u}$ est alors égale à

$$d\vec{u} = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}dt$$

Revenons au vecteur $\vec{A}$. On peut appliquer le résultat précédent aux vecteur de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et on obtient

$$d\vec{A} = \sum_{i=1,3} \left(da_i\vec{e}_i + a_i\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_i dt \right) = \sum_{i=1,3} da_i\vec{e}_i + dt\vec{\Omega} \wedge \vec{A}$$

$\vec{\Omega}$ étant le vecteur rotation des vecteurs de la base utilisée.

Remarque :

les vecteurs de la base ont le même vecteur rotation puisqu'ils forment un trièdre solide et tournent donc de la même façon.

Notons que la dérivée par rapport au temps d'un vecteur $\vec{A}$ s'obtient en divisant par dt

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{\vec{A}} = \sum_{i=1,3} \dot{a}_i\vec{e}_i + \vec{\Omega} \wedge \vec{A}$$

Chapitre I: Rappels et Compléments Mathématiques

Déplacement élémentaire

Définition

Considérons un déplacement infinitésimale de M en M' par rapport à un repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{dM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$$

Pour déterminer les déplacements élémentaires dans les différents systèmes de coordonnées, nous appliquons les resultats précédents établis sur la différentielle d'un vecteur.

Coordonnées cartésiennes :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, sachant que les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont fixes ce qui implique $d\vec{i} = d\vec{j} = d\vec{k} = \vec{0}$, le déplacement est égal à

$$\overrightarrow{dM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

Déplacement élémentaire

Définition

Coordonnées cylindriques :

$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + \vec{k}$, **sachant que le vecteur rotation de la base cylindrique est** $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$, **le déplacement est**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dM} &= d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\vec{e}_\rho + dz\vec{k} \\ &= d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{k}\wedge\vec{e}_\rho + dz\vec{k} \\ &= d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{k}\end{aligned}$$

Coordonnées sphériques :

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ **et le vecteur rotation de la base sphérique est**

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\vec{k} = \dot{\theta}\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\left(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta\right).$$

Le déplacement s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dM} &= dr\vec{e}_r + rd\vec{e}_r \\ &= dr\vec{e}_r + r\left[d\theta\vec{e}_\varphi + d\varphi\left(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta\right)\right]\wedge\vec{e}_r \\ &= dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + rd\varphi\sin\theta\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$