Mécanique du Point Matériel

Mohamed EL KACIMI

Université Cadi Ayyad - Faculté des Sciences Semlalia
Département de Physique

Année Universitaire 2016/2017

Chapitre II : Cinématique du point matériel et changement de référentiel

Sommaire

Chapitre II : Cinématique du point matériel et changement de référentiel

Introduction

La cinématique est l'étude du mouvement du point matériel sans tenir compte des causes qui en sont à l'origine.

Rappelons que la notion de mouvement est tout à fait relative car elle dépend du repère par rapport auquel elle est définie.

Chapitre II : Cinématique du point matériel et changement de référentiel

Généralités

Point matériel

Nous appelons par point matériel tout objet dont les dimensions peuvent être négligées et le mouvement se ramène à celui de son centre de masse.

Le mouvement de rotation du point matériel sur lui même n'a aucune incidence sur le mouvement du point matériel.

A chaque instant, la position du point matériel peut être repérée par

- x, y, z : les coordonnées cartésiennes, ou bien
- ρ, φ, z : les coordonnées cylindriques ou bien
- r, θ, φ : les coordonnées sphériques.

Generalités

Référentiel

Un référentiel est un repère d'espace spatial lié à un observateur doté d'une horloge pour mesurer le temps.
Le mouvement d'un point matériel dépend du référentiel choisi pour l'observer.

En mécanique classique, comme les vitesses qui sont mises en jeu sont négligeables par rapport à celle de la lumière, le temps est indépendant du référentiel choisi. On dit que le temps est universel.

Generalités

Trajectoire

La trajectoire d'un point matériel est définie par l'ensemble des positions occupées par le point matériel au cours de son mouvement. Ell est notée (C).

Chaque position du point matériel M sur sa trajectoire est repérée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

Chapitre II : Cinématique du point matériel et changement de référentiel

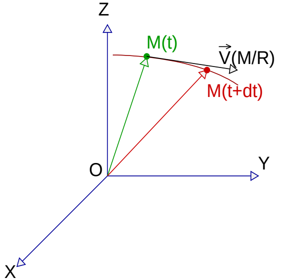
Vitesse

Définition

La position d'un point M est repéré dans un référentiel $\mathcal{R}(O, X, Y, Z)$ par le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Le vecteur vitesse du point M est défini par

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \lim_{dt \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \left.\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$$



L'expression explicite de $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ dépend du système de coordonnées que l'on utilise.

Si $\|\vec{V}\| = \text{Cte} \Longrightarrow$ Mouvement uniforme.

Vitesse

Composantes du vecteur vitesse : coordonnées cartésiennes

La base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est solidement liée à $\mathcal{R}$ et de ce fait ses vecteurs sont fixes.

Le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
On rappelle que

$$\frac{d}{dt} = \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Le vecteur vitesse est définie dans la base cartésienne par :

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{i} + \dot{z}\vec{k}. \end{aligned}$$

Vitesse

Composantes du vecteur vitesse : coordonnées polaires

Ces coordonnées sont bien adaptées lorsque le mouvement du point matériel est plan. 2 coordonnées suffisent pour décrire la trajectoire : (ρ, φ). Le vecteur rotation de la base polaire par rapport à $\mathcal{R}$ est $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$.

Le vecteur position $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho$ et le vecteur vitesse est défini par

$$\begin{aligned}
\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\
&= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\rho \\
&= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi.
\end{aligned}$$

Vitesse

Composantes du vecteur vitesse : coordonnées cylindriques

Rappelons que la dérivée droite par rapport au temps dans ce système de coordonnées s'écrit comme

$$\frac{d}{dt} = \dot{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \dot{\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{z}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Le vecteur rotation de la base cylindrique par rapport à $\mathcal{R}$ est $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$.
Le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}$, ce qui donne pour le vecteur vitesse :

$$\begin{aligned}
\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \dot{z}\vec{k} \\
&= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\rho + \dot{z}\vec{k} \\
&= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}.
\end{aligned}$$

Vitesse

Composantes du vecteur vitesse : coordonnées sphériques

La dérivée droite par rapport au temps dans ce système de coordonnées s'écrit comme

$$\frac{d}{dt} = \dot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Le vecteur rotation de la base sphérique par rapport à $\mathcal{R}$ est
$\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi = \dot{\varphi}(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi$.

Le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$, ce qui donne pour le vecteur vitesse :

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\left.\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\vec{\Omega}\wedge\vec{e}_r \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\left[\dot{\varphi}(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi\right]\wedge\vec{e}_r \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + \dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

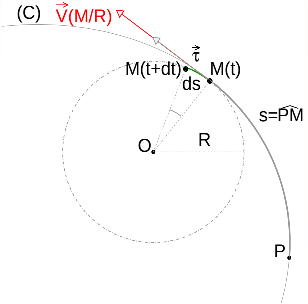
Vitesse

Composantes du vecteur vitesse : coordonnées curvilignes

Le repère associé à ces coordonnées s'appelle le repère de Fresnet.
La position de M est repérée par l'abscisse curviligne s : la longueur de l'arc de la trajectoire à partir d'un point origine P.
Le vecteur vitesse est défini par

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \lim_{dt\to 0}\frac{\overrightarrow{OM}(t+dt)-\overrightarrow{OM}(t)}{dt}\\ &= \lim_{dt\to 0}\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\\ &= \frac{ds}{dt}\vec{\tau}\end{aligned}$$

avec $\|\vec{V}(M/\mathcal{R})\| = \frac{ds}{dt}$
et $\vec{\tau} = \frac{\vec{V}(M/\mathcal{R})}{\|\vec{V}(M/\mathcal{R})\|}$.



Chapitre II : Cinématique du point matériel et changement de référentiel

Accélération

Définition

Le vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ du point M par rapport à $\mathcal{R}$ est défini par la dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R}$ de $\vec{V}(M/\mathcal{R})$:

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}}.$$

Remarque

Mouvement uniforme $\Longrightarrow \|\vec{V}(M/\mathcal{R})\| = $ Cte d'où

$$\begin{aligned} \frac{d\|\vec{V}(M/\mathcal{R})\|^2}{dt} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt} = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}) = 0 \quad \forall t \end{aligned}$$

Nous allons exprimer le vecteur accélération dans les différents systèmes de coordonnées.

Accélération

Composantes du vecteur accélération : coordonnées cartésiennes

L'accélération est donnée par

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\
&= \left.\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\right)\right|_{\mathcal{R}} \\
&= \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}.
\end{aligned}$$

Accélération

Composantes du vecteur accélération : coordonnées polaires

Dans le cas où le mouvement de M est plan, l'accélération en coordonnées polaires est donnée par

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\
&= \left.\frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\right)\right|_{\mathcal{R}} \\
&= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}
\end{aligned}$$

or $\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ et $\dot{\vec{e}}_\varphi = \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho$, ce qui implique

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi.$$

Accélération

Composantes du vecteur accélération : coordonnées cylindriques

L'expression de l'accélération est obtenue en dérivant le vecteur vitesse exprimé dans la base cylindrique par rapport à $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}\right)\Big|_{\mathcal{R}} \\
&= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\Big|_{\mathcal{R}} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\Big|_{\mathcal{R}} + \ddot{z}\vec{k} \\
&= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{k}.
\end{aligned}$$

Accélération

Composantes du vecteur accélération : coordonnées sphériques

De la même manière, on dérive par rapport au temps dans $\mathcal{R}$ le vecteur vitesse exprimé en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi\right)\Big|_{\mathcal{R}} \\
&= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt}\Big|_{\mathcal{R}} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\Big|_{\mathcal{R}} + \\
&\quad + (\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\Big|_{\mathcal{R}}
\end{aligned}$$

Accélération

Composantes du vecteur accélération : coordonnées sphériques

Or

$$\left.\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\left.\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\varphi}\cos\theta\vec{e}_\varphi - \dot{\theta}\vec{e}_r$$

$$\left.\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = -\dot{\varphi}\left(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta\right)$$

$$\Longrightarrow \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{e}_\theta + $$
$$+ \left(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi$$

Chapitre II : Cinématique du point matériel et changement de référentiel

Accélération en coordonnées curvilignes

Base de Fresnet

Comme indiqué auparavant, la base associée à ces coordonnées est la base de Fresnet $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ telle que

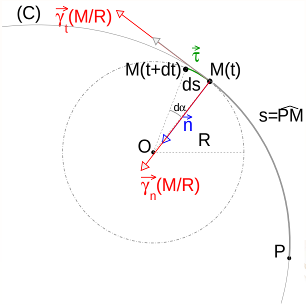
• $\vec{\tau}$: tangent à la trajectoire (C) au point M dans le sens du mouvement.

• $\vec{n}$: $\perp$ à $\vec{\tau}$ tel que $d\tau = d\alpha\vec{n}$;

• $\vec{b}$ tel que $\vec{\tau} \wedge \vec{n} = \vec{b}$ et $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ forme une base orthonormée.

• le vecteur rotation des vecteurs de la base de Fresnet par rapport à $\mathcal{R}$ est $\vec{\Omega} = \dot{\alpha}\vec{b}$ avec $ds = Rd\alpha$.

• Le plan qui contient $(\vec{\tau}, \vec{n})$ contient localement la trajectoire au point M : plan osculateur. Le cercle de rayon R tangent à la trajectoire au point M est dit le cercle osculateur et R est le rayon de courbure de la trajectoire au point M.



Accélération en coordonnées curvilignes

Composantes du vecteur accélération

La dérivée droite par rapport au temps dans ce système de coordonnées est donnée par

$$\frac{d}{dt} = \dot{s}\frac{\partial}{\partial s} + \dot{\alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Pour calculer l'accélération, on dérive le vecteur vitesse dans $\mathcal{R}$ exprimé en coordonnées curvilignes :

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d(\dot{s}\vec{\tau})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\left.\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \quad \textbf{avec} \quad \left.\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\alpha}\vec{b}\wedge\vec{\tau} = \dot{\alpha}\vec{n}$$

et $\dot{s} = \|\vec{V}(M/\mathcal{R})\| = V = R\dot{\alpha} \Longrightarrow \dot{\alpha} = V/R$, ce qui donne finalement

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{n} = \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\mathcal{R}}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R}\vec{n}.$$

Accélération en coordonnées curvilignes

Composantes du vecteur accélération

- $\gamma_t = \dot{V}$ est appelée l'accélération tangentielle
- $\gamma_n = V^2/R$ est appelée l'accélération normale.

Rayon de courbure

Le rayon de courbure au point M peut être déduit comme suit

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{V^2}{R} = \left\| \vec{\tau} \wedge \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \right\| \\ &= \left\| \frac{\vec{V}(M/\mathcal{R})}{V} \wedge \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \right\| \\ \Longrightarrow R &= \frac{V^3}{\left\| \vec{V}(M/\mathcal{R}) \wedge \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \right\|} \end{aligned}$$

Accélération en coordonnées curvilignes

Nature du mouvement : accéléré, retardé ou uniforme ?

On peut déterminer la nature du mouvement grâce au produit scalaire entre le vecteur vitesse et le vecteur accélération, en décomposant cette dernière dans la base de Fresnet :

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}) &= (\gamma_t \vec{\tau} + \gamma_n \vec{n}) \cdot V\vec{\tau} \\ &= V \left.\frac{dV}{dt}\right|_R\end{aligned}$$

comme $V = \|\vec{V}(M/\mathcal{R})\| > 0$**, le signe du produit scalaire entre l'accélération et la vitesse du point M nous renseigne sur le mouvement :**

$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}) > 0$ **alors** $dV/dt > 0$ **et le mouvement est accéléré ;**

$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}) < 0$ **alors** $dV/dt < 0$ **et le mouvement est décéléré ;**

$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}) = 0$ **alors** $dV/dt = 0$**, la vitesse est constante et le mouvement est uniforme.**

Chapitre II : Cinématique du point matériel et changement de référentiel

Changement de référentiel

Introduction

Le mouvement d'un point matériel peut s'avérer parfois simple si l'on peut passer par un repère intermédiaire. Exemple : Chute libre d'une bille dans un train :

- Observateur sur le train : trajectoire rectiligne ;
- Observateur sur le quai de la gare : trajectoire parabolique ;

Considérons deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre. Le premier référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$ d'origine O est muni de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le deuxième référentiel est noté $\mathcal{R}_1(O_1, x_1y_1z_1)$ d'origine O_1 et muni de la base orthonormée $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$.

On se propose d'établir les relations respectivement entre

- $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et $\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$
- $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ et $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1)$

On pose $\mathcal{R}(O, xyz)$, Repère absolu, et $\mathcal{R}_1(O_1, x_1y_1z_1)$, Repère relatif.

Changement de référentiel

Composition des vitesses

La position de M est donnée par

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} \\ &= \overrightarrow{OO_1} + x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1\end{aligned}$$

(x_1, y_1, z_1) étant les coordonnées cartésiennes du point M dans le repère relatif.

La vitesse du point M par rapport à $\mathcal{R}$ est égale à

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{V}(O_1\mathcal{R}) + \dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1 + \dot{z}_1\vec{k}_1 + \\ &\quad + x_1\left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + y_1\left.\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + z_1\left.\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right|_{\mathcal{R}}.\end{aligned}$$

Changement de référentiel
Composition des vitesses

Or, en notant par $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})$ le vecteur rotation de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}$:

$$\left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{i}_1, \quad \left.\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{j}_1, \quad \left.\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{k}_1.$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \vec{V}(O_1\mathcal{R}) + \dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1 + \dot{z}_1\vec{k}_1 + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge (x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1) \\ &= \vec{V}(O_1\mathcal{R}) + \dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1 + \dot{z}_1\vec{k}_1 + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}\end{aligned}$$

Ainsi le vecteur vitesse peut être décomposé dans les deux repères par

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}_e(M) + \vec{V}_r(M) \left\{ \begin{array}{lcl} \vec{V}_r(M) &=& \dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1 + \dot{z}_1\vec{k}_1 = \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) \\ \vec{V}_e(M) &=& \vec{V}(O_1/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M} \end{array} \right.$$

- $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ **: vitesse absolue ;**
- $\vec{V}_r$ **: vitesse relative ;**
- $\vec{V}_e$ **: vitesse d'entrainement ;**

Changement de référentiel
Composition des vitesses

Remarques

• la dérivée de n'importe quel vecteur $\vec{A}$ par rapport à $\mathcal{R}$ peut se décomposer comme suit

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{A}.$$

• $\mathcal{R}_1$ **est en translation par rapport à** $\mathcal{R}$ **si** $\vec{i}_1//\vec{i}$, $\vec{j}_1//\vec{j}$ **et** $\vec{k}_1//\vec{k}$
$\Longrightarrow \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \vec{0}$ **et** $\vec{V}_e = \vec{V}(O_1/\mathcal{R})$.

• **Soit** F **un point fixe dans** $\mathcal{R}_1 \Longrightarrow (d/dt)\overrightarrow{O_1F}|_{\mathcal{R}_1} = 0$ **et**

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{OF}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}} &= \vec{V}(O_1/\mathcal{R}) + \frac{d\overrightarrow{O_1F}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1F} \\ &= \vec{V}(O_1/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1F} \equiv \vec{V}_e(M = F)\end{aligned}$$

La vitesse d'entrainement est la vitesse d'un point fixe dans $\mathcal{R}_1$ **qui coincide à l'instant** t **avec** M**.**

Changement de référentiel
Composition des accélérations

Le vecteur accélération du point M par rapport à $\mathcal{R}$ est donné par

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{d\vec{V}_e(M)}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$$

avec

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \left.\frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}_r(M) \\ &= \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}_r(M)\end{aligned}$$

Changement de référentiel
Composition des accélérations

et

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d\vec{V}_e(M)}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \left.\frac{d\vec{V}(O_1/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{d\left(\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})\wedge\overrightarrow{O_1M}\right)}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\
&= \vec{\gamma}(O_1/\mathcal{R}) + \dot{\vec{\Omega}}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M} + \\
&\quad + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \left(\left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M} \right) \\
&= \vec{\gamma}(O_1/\mathcal{R}) + \dot{\vec{\Omega}}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}_r(M) + \\
&\quad + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}).
\end{aligned}
$$

Changement de référentiel

Composition des accélérations

La loi de composition des accélérations peut s'écrit alors comme suit

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M)\\ &= \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) + \vec{\gamma}(O_1/\mathcal{R}) + \dot{\vec{\Omega}}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M} + \\ &\quad + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \left(\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) + \\ &\quad + 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}_r(M)\end{aligned}$$

- $\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1)$

$\rightarrow$ **accélération relative**

- $\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}(O_1/\mathcal{R}) + \left.\dfrac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \left(\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$

$\rightarrow$ **accélération d'entrainement**

- $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}_r(M)$

$\rightarrow$ **accélération de Coriolis.**

Changement de référentiel

Composition des accélérations

Remarques

• L'accélération d'entrainement est l'accélération d'un point **fixe** dans $\mathcal{R}_1$ qui coincide à l'instant t avec M.

• Noter que $\vec{\gamma}_e \neq \left.\frac{d\vec{V}_e}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$

• **Mouvement de translation :**

$\Longrightarrow \vec{\Omega} = 0 \Longrightarrow \vec{\gamma}_c = \vec{0}$ **et** $\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}(O_1/\mathcal{R})$

• **Mouvement de translation rectiligne uniforme :**

$\Longrightarrow \vec{\Omega} = 0 \Longrightarrow \vec{\gamma}_c = \vec{0}$ **et** $\vec{\gamma}_e = \vec{0} \Longrightarrow \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1)$

L'accélération reste la même dans tous les référentiels en translation rectiligne uniforme les un par rapport aux autres.

Chapitre II : Cinématique du point matériel et changement de référentiel

Application

Coordonnées cylindriques : Vitesse

$\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: **référentiel absolu ;**

$\mathcal{R}_1(O,\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$: **référentiel relatif avec** $\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_1) = \dot{\varphi}\vec{k}$.

Vitesse

Vitesse relative :

$$\vec{V}_r(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{z}\vec{k}.$$

Vitesse d'entrainement :

$$\begin{aligned}\vec{V}_e(M) &= \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M} \\ &= \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \left(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}\right) \\ &= \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

La vitesse absolue est alors

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M) \\ &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}.\end{aligned}}$$

qui n'est d'autre que la vitesse du point M calculée dans les systèmes de coordonnées cylindriques

Application

Coordonnées cylindriques : Accélération

Accélération relative

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_r(M) &= \left.\frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} \\ &= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \ddot{z}\vec{k}\end{aligned}$$

Accélération d'entrainement

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_e(M) &= \dot{\vec{\Omega}}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}) \\ &= \ddot{\varphi}\vec{k} \wedge (\rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}) + \dot{\varphi}^2\vec{k} \wedge \left(\vec{k} \wedge \left[\rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}\right]\right) \\ &= \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho\end{aligned}$$

Accélération de Coriolis

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_c(M) &= 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}_r(M) \\ &= 2\dot{\varphi}\vec{k} \wedge \left(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{z}\vec{k}\right) \\ &= 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

Application

Coordonnées cylindriques : Accélération

Accélération absolue

En appliquant la loi de composition des accélérations, on obtient

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k} \end{aligned}}$$

qui n'est d'autre que l'accélération de M exprimée dans le système des coordonnées cylindriques.

Remarque

Si $z = 0$, on retrouve l'expression de l'accélération dans le système de coordonnées polaires.

Application

Coordonnées sphériques : Vitesse

$\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: **référentiel absolu ;**

$\mathcal{R}_1(O,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$: **référentiel relatif avec**

$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi = \dot{\varphi}(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi$.

Vitesse

Vitesse relative :

$$\vec{V}_r(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = \dot{r}\vec{e}_r$$

Vitesse d'entrainement :

$$\begin{aligned}\vec{V}_e(M) &= \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M} \\ &= (\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge r\vec{e}_r \\ &= r\dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r \\ &= r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

La vitesse absolue est alors

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M) \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi\end{aligned}}$$

qui n'est d'autre que la vitesse du point M calculée dans les systèmes de coordonnées sphériques

Application

Coordonnées sphériques : Accélération

Calculons d'abord la dérivée par rapport au temps du vecteur rotation :

$$\left.\frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \ddot{\varphi}\vec{k} + \ddot{\theta}\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\left.\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$$
$$= \ddot{\varphi}\vec{k} + \ddot{\theta}\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}(\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_\varphi$$
$$= \ddot{\varphi}\vec{k} + \ddot{\theta}\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{e}_\varphi$$
$$= \ddot{\varphi}\vec{k} + \ddot{\theta}\vec{e}_\varphi - \dot{\theta}\dot{\varphi}(\cos\theta\vec{e}_\theta + \sin\theta\vec{e}_r)$$

et

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_1) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}) = (\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge \left[(\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge r\vec{e}_r\right]$$
$$= (\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge (r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$$
$$= -r\dot{\varphi}^2\sin\theta(\cos\theta\vec{e}_\theta + \sin\theta\vec{e}_r) + r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\vec{e}_\varphi - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

et

$$\dot{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M} = r\ddot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\vec{e}_\varphi.$$

Application

Coordonnées sphériques : Accélération

Accélération relative

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_r(M) &= \left.\frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} \\ &= \ddot{r}\vec{e}_r\end{aligned}$$

Accélération d'entrainement

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_e(M) &= \dot{\vec{\Omega}}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}) \\ &= (-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \\ &\quad +(2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta)\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

Accélération de Coriolis

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_c(M) &= 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_1) \wedge \vec{V}_r(M) \\ &= 2(\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge \dot{r}\vec{e}_r \\ &= 2\dot{r}(\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\vec{e}_\theta)\end{aligned}$$

Application

Coordonnées sphériques : Accélération

Accélération absolue

En appliquant la loi de composition des accélérations, on obtient

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c \\
&= \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \\
&\quad + \left(r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \\
&\quad + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

qui n'est d'autre que l'accélération de M exprimée dans le système des coordonnées sphériques.