Mécanique du Point Matériel

Mohamed EL KACIMI

Université Cadi Ayyad - Faculté des Sciences Semlalia
Département de Physique

Année Universitaire 2016/2017

Chapitre III : Dynamique d'un point matériel

Sommaire

Chapitre III : Dynamique d'un point matériel

Introduction

Ce chapitre traite les relations fondamentales de la dynamique sur lesquelles le formalisme de la mécanique est construit.

Les lois qui seront abordées et qui sont à la base de la mécanique sont exprimées sous forme vectorielle, manière élégante de regrouper plusieurs relations physiques dans la même équation.

Les lois de la dynamique permettent d'étudier le mouvement d'un corps en reliant les causes, qui sont à l'origine de ce mouvement, à ses caractéristiques.

Chapitre III : Dynamique d'un point matériel

Masse et forces

Masse

Les point matériels sont caractérisés par une grandeur scalaire positive que l'on appelle la masse, notée m.

L'unité de la masse dans le système internation (SI) est le kilogramme (Kg).

Dans le domaine des vitesses que l'on traite dans le cadre de ce cours, la masse est une constante et reste invariante dans un changement de référentiel.

De même on confond ce que l'on appelle la masse inerte, caractéristique dynamique, et la masse gravitation, caractéristique du point matériel à réagir à la force gravitationnelle.

Masse et forces

Forces : Différentes catégories de forces

L'unité de la force est le Newton ($1N=1kg\ m\ s^{-2}$).

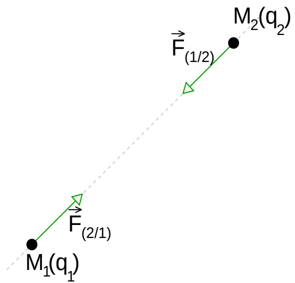
On distingue deux classes de force :

- les forces à interaction à distance que l'on appelle les forces fondamentales. Elles sont au nombre de quatre, citées dans le sens décroissant de leurs intensités ou couplages : force forte,force électromagnétique, force faible et force gravitationnelle
- les forces de frottements : qui représentent une manifestation des forces fondamentales à l'échelle macroscopique.On en cite les forces de frottement solides, les forces de frottement visqueux, poussée d'archimède, force de tension$\cdots$.

Masse et Forces

Forces : forces fondamentales

- **Force forte :** assure la cohésion des noyaux. N s.



- **Force électromagnétique :** unifie la force électrique et la force magnétique, appelée aussi la force de Lorentz. Elle interagit entre particules chargées électriquement.

Force électrique :

$$\boxed{\vec{F}_{1/2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}}$$

où $\vec{F}_{1/2}$ est l'action de la particule (1) sur la particule (2) et $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

Les charges électriques q_1 et q_2 sont exprimées en Coulomb (C), et la constante ϵ_0, appelée la permitivité électrique dans le vide, est reliée à la vitesse de la lumière dans le vide c et à la perméabilité magnétique μ_0 dans le vide par $\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$, $c = 2.998 10^8 ms^{-1}$, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} S.I$ et $\epsilon_0 = 8.854 10^{-12} S.I$.

Masse et Forces

Forces : Force électromagnétique

La force électrique est attractive si les deux charges sont de signes opposées et répulsive dans le cas contraire.

La force magnétique : se manifeste lorsqu'un point matériel ayant une charge (q) se déplace avec une vitesse $\vec{V}$ dans une région ou règne un champs magnétique $\vec{B}$. Elle est de la forme

$$\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}.$$

Quand une particule chargée (q) se déplace avec une vitesse $\vec{V}$ dans une région ou règnent un champs magnétique $\vec{B}$ et un champs électrique $\vec{E}$, elle est soumise à la force dite de Lorentz, qui est la résultatnte de la force électrique et de la force magnétique,

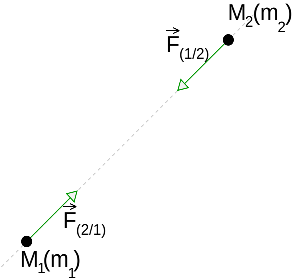
$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}\right).$$

Masse et Forces

Forces : forces fondamentales

- **Force faible : responsable de l'interaction des neutrinos avec la matière.**

- **Force gravitationnelle : Elle interagit entre des particules ayant des masses m_1 et m_2 selon**



$$\boxed{\overrightarrow{F}_{1/2} = K_G \frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}.}$$

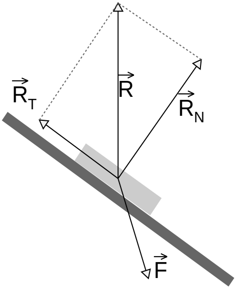
où $\vec{F}_{1/2}$ est l'action de la particule (1) sur la particule (2).

K_G **étant la constante gravitationnelle universelle** ($= 6.6726\ 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$) **avec** $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$. **La relation est parfaitement symétrique.**

Masse et Forces

Forces : forces de contact : forces de frottement solides

• **Force de frottement solides :** force de contact $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$ entre deux solides en mouvement. On distingue :



• Pas de mouvement relatif entre les deux solides : **Pas de glissement**.
$|R_T| < k_s|R_N|$: condition de frottement statique. k_s est appelé le coefficient de frottement statique.

• Mouvement relatif d'un solide par rapport à un autre : **on dit qu'il y a glissement**. La composante tangentielle est reliée à la composante normale par $|R_T| = k_d|R_N|$, appelée **loi de Coulomb**. k_d est appelé le coefficient de frottement dynamique.

Masse et Forces

Forces : forces de contact

- **Forces de frottement visqueux** : ce frottement s'applique à un solide se déplaçant dans un milieu fluide, gazeux ou liquide. La force de frottement est généralement de la forme $\vec{F} = -k\vec{v}$ ou $\vec{F} = -k\|v\|\vec{v}$ où k est une constante positive.

- **Poussée d'Archimède** : elle se manifeste lorsqu'un solide est plongé dans un fluide. Elle est dirigée vers le haut et égale au poids du liquide déplacé :

$$\boxed{\vec{F}_{ar} = \rho \times V \times g \times \vec{k}}$$

où ρ est la masse volumique du fluide, V est le volume du solide, g est l'accélération de la pesanteur et $\vec{k}$ est le vecteur unitaire dirigé vers le haut selon la verticale.

- **les forces de tension** : comme exemple, l'on peut citer la force de rappel d'un ressort ou la force de tension d'un fil élastique. Généralement, l'intensité de cette catégorie de forces est en première approximation proportionnelle à l'allongement.

Chapitre III : Dynamique d'un point matériel

Quantité de mouvement

Définition

C'est une grandeur qui joue un rôle central dans la dynamique. Nombre de phénomènes peuvent se comprendre de manière aisée si l'on comprend l'effet des forces sur la quantité de mouvement.

Définition

On définit par la quantité de mouvement d'un point matériel de masse m et animé d'une vitesse $\vec{V}$ la quantité

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{V}}$$

La quantité de mouvement augmente avec la vitesse et la masse. Elle est exprimée dans le système international (SI) en kilogramme mètre par seconde ($\mathrm{Kg\ m\ s^{-1}}$). Notons que la quantité de mouvement dépend du référentiel dans lequel elle est exprimée, étant donnée que la vitesse l'est.

Chapitre III : Dynamique d'un point matériel

Principe fondamental de la dynamique : PFD

Ennoncé

La définition de la quantité de mouvement permet de donner l'énnoncé exact du principe fondamental de la dynamique.
Ce principe ou cette loi n'est valable que dans un référentiel galiléen, qui sera défini ultérieurement.

Le PFD peut être énoncé soit sous sa forme différentielle
la variation de la quantité de mouvement est égale au produit de la force exterieure appliquée sur le point matériel par le temps pendant lequel cette force est appliquée :

$$\boxed{d\vec{p} = \vec{F}_{ext} dt}$$

Le principe peut être exprimé aussi sous sa forme de dérivée

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{ext}.}$$

Si plusieurs forces sont appliquées à la masse m, c'est la résultante des forces qu'il faut prendre en compte.

Chapitre III : Dynamique d'un point matériel

Principe de l'action et de la réaction

Ennoncé

Quand 2 corps interagissent, la force $\vec{F}_{1/2}$ exercée par le premier corps sur le second est égale et opposée à la force $\vec{F}_{2/1}$ engendrée par le deuxième corps sur le premier :

$$\boxed{\vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = \vec{0}.}$$

Exemple : m_1 **et** m_2 **intéragissent entre eux, aucune force extérieure n'est mise en jeu. Appliquons le PFD**

$$\left\{ \begin{array}{lcccc} \textbf{PFD à } m_1 & \Longrightarrow & d\vec{p}_1 & = & \vec{F}_{2/1}dt \\ \textbf{PFD à } m_1 & \Longrightarrow & d\vec{p}_2 & = & \vec{F}_{1/2}dt \end{array} \right. \Longrightarrow d\vec{p}_1 + d\vec{p}_2 = (\vec{F}_{2/1} + \vec{F}_{1/2})dt$$

Comme le principe de l'action et de la réaction implique $\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$ **cela implique que** $d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{0}$. **On définit la quantité de mouvement totale** $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. **La relation précédente montre que** $d\vec{P} = \vec{0}dt \Longrightarrow \vec{P} = \vec{Cte}$. **On en conclue que la quantité de mouvement totale d'un système isolé est constante.**

Ce résultat reste valable lorsque l'on a N corps interagissant entre eux. La quantité de mouvement totale du système reste constante au cours du temps.

Chapitre III : Dynamique d'un point matériel

Les lois de Newton

Première loi : Principe d'inertie

Cette loi peut être énnoncée de plusieurs manières.

1^{er} énnoncé : Un corps isolé, sur lequel aucune force n'agit, se déplace avec une vitesse constante ou reste au repos selon son état initial.

$$\boxed{\vec{F} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{V} = \overrightarrow{Cte} = \vec{V}_0 \qquad 1^{\text{ère}} \text{ loi.}}$$

$2^{ème}$ énnoncé : Il existe un référentiel priviligié $\mathcal{R}$ par rapport auquel tout point matériel M isolé a un mouvement rectiligne uniforme, si sa vitesse initiale est non nulle, ou au repos si c'est le cas contraire.

Aussi faut-il définir ce référentiel privilégié qui fait partie d'une catégorie de référentiels dits gallil éens.

Les lois de Newton

Deuxième loi : Loi fondamentale de la dynamique

Ennoncé : La force totale $\vec{F}$ appliquée à un corps est égale au produit de sa masse m par son accélération

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{\gamma}.}$$

Notons que cette loi, n'est valable que pour des corps ayant des masses constantes.

Remarques :

• Lorsque les vitesses mises en jeu sont faibles par rapport à la vitesse de la lumière, les masses des particules sont constantes et la deuxième loi de Newton est applicable. C'est le cas dans ce cours

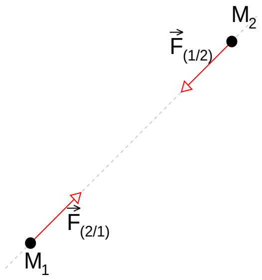
• Si les vitesses sont voisines de celle de la lumière : c'est le domaine relativiste. La masse varie avec la vitesse de la particule et la deuxième loi de Newton n'est plus valable.

Les lois de Newton

Troisième loi : Action et réaction

Quand 2 corps interagissent, la force $\vec{F}_{1/2}$ *exercée par le premier corps sur le second est égale et opposée à la force* $\vec{F}_{2/1}$ *engendrée par le deuxième corps sur le premier :*

$$\boxed{\vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = \vec{0}.}$$



Chapitre III : Dynamique d'un point matériel

Réferentiels galiléens

La première loi et la deuxième loi de Newton ne sont valables que dans un référentiel non accéléré, que l'on appelle un référentiel galiléen ou référentiel inertiel.

Remarque

• un point matériel a la même accélération dans deux référentiels en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.

On peut énoncer que les lois de Newton sont valables dans les référentiels en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

• La terre est animée d'un mouvement composé par une rotation sur elle même avec une vitesse angulaire $\omega = 7.6 \times 10^{-5} \simeq 10^{-4} rds^{-1}$, et d'un mouvement orbital elliptique autour du soleil.

♠ Pour des problèmes locaux et des temps plus courts que la journée, le référentiel du laboratoire peut être pris pour un référentiel galiléen.

♠ Pour des problèmes mettant en jeu des mouvements ou des temps à grande échelle, un référentiel lié au centre de la terre et les axes orientés vers des étoiles fixes -référentiel géocentrique- reste correct.

♠ Pour des mouvement à très grande échelle, comme le mouvement des planètes, un référentiel lié au centre du soleil et les axes orientés vers des étoiles fixes -référentiel héliocentrique- est bien adapté à la situation.

Réferentiels non galiléens

Expression du PFD

Le but est de reexprimer le PFD dans un référentiel non galiléen.

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen et $\mathcal{R}_1$ un référentiel en mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}$. La relation de composition des accélérations nous permet d'écrire pour un point matériel M

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c.$$

L'expression du PFD dans le référentiel galiléen est

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \\ &= m(\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c) \\ \Longrightarrow \vec{F} - m\vec{\gamma}_e - m\vec{\gamma}_c &= m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) \end{aligned}$$

Réferentiels non galiléens

Expression du PFD

On peut écrire que la masse multipliée par l'accélération de M dans $\mathcal{R}_1$ est égale aux forces extérieures auxquelles on ajoute des termes supplémentaires que l'on appelle les forces d'inertie et qui sont

▷ **la force d'inertie d'entrainement** : que l'on note $\vec{f}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e$;

▷ **la force d'inertie de Coriolis** : que l'on note $\vec{f}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c$.

La relation fondamentale de la dynamique peut s'écrire dans $\mathcal{R}_1$ comme

$$\boxed{m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) = \vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}.}$$

Remarque : Notons que l'on a retrouvé l'usage de la relation fondamentale de la dynamique dans un référentiel non galiléen à condition de rajouter des forces d'inertie qui compensent l'accélération du référentiel non galiléen.

Réferentiels non galiléens

Exemple : $\mathcal{R}_1$ est en rotation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$

M **est en rotation uniforme par rapport** $\mathcal{R}$ **avec** $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\vec{k}$ **et** $\dot{\theta}$ **constante.** $\mathcal{R}_1$ **est lié à la particule** $\Longrightarrow \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) = \vec{0}$ **et** $O_1 \equiv O$.

Forces d'inertie :

- **Accélération de Coriolis :** $\rightarrow \vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) = \vec{0}$.
- **Accélération d'entrainement :**

$\dot{\vec{\Omega}}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \vec{0}$ **et** $O_1 \equiv O \Longrightarrow \vec{\gamma}_e = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \left(\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$.

On utilise la base polaire

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_e &= \dot{\theta}^2\vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}\right)\right] = R\dot{\theta}^2\vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge \left(\|\overrightarrow{MH}\|\vec{k} + R\vec{e}_\rho\right)\right] \\ &= R\dot{\theta}^2\vec{k} \wedge \left(\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho\right) = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho. \end{aligned}$$

H **étant la projection de** M **dans le plan du mouvement, qui dans ce cas le plan** Oxy **avec** $R = \|\overrightarrow{OH}\|$

Appliquer le PFD dans $\mathcal{R}_1$: "le prix" est d'ajouter la force d'inertie d'entrainement

$\vec{f}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e = mR\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho \rightarrow$ **force centrifuge.**

Chapitre III : Dynamique d'un point matériel

Equilibre d'un point matériel dans un référentiel $\mathcal{R}$

Un point matériel est dit en équilibre dans un référentiel $\mathcal{R}$ si ses coordonnées ne dépendent pas explicitement du temps. Une condition nécéssaire et suffisante d'équilibre est que

$$\begin{cases} \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) & = & \vec{0} & \forall t \\ \vec{V}(M/\mathcal{R}) & = & \vec{0} & \textbf{à } t = 0. \end{cases}$$

Une condition nécéssaire et suffisante pour que le point matériel soit en en équilibre dans $\mathcal{R}$ est que la résultante des forces soit nulle.

Notez bien, que si $\mathcal{R}$ n'est pas galiléen, il faut tenir compte des forces d'inertie.

Chapitre III : Dynamique d'un point matériel

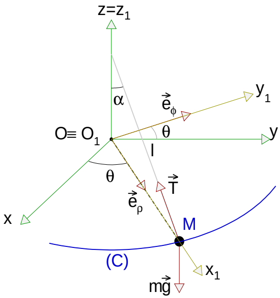
Application du PFD

Point matériel en rotation uniforme

Soit $\mathcal{R}(O, xyz)$ un référentiel galiléen. Considérons un point matériel suspendu par un fil de longueur l incliné de $\alpha > 0$ par rapport à Oz. M est animé d'un mouvement de rotation uniforme par rapport $\mathcal{R}$ dans le plan (xy)

$\mathcal{R}_1(Ox_1y_1z_1)$ lié au point matériel M tel que $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\vec{k}$, $\dot{\theta} = \omega =$ constante.

Calculons la valeur de la tension T et trouvons la condition sur la pulsation ω pour qu'un tel mouvement soit possible.



Application du PFD

Point matériel en rotation uniforme : PFD dans $\mathcal{R}_1$

$\mathcal{R}_1$ non galiléen : calculons les forces d'inerties.

$$\begin{cases} \mathcal{R} \quad \textbf{lié à } M \Longrightarrow \vec{V}_r = \vec{0} \quad \textbf{et} \quad \vec{\gamma}_r = \vec{0} \\ \vec{V}_r = \vec{0} \Longrightarrow \vec{\gamma}_c = \vec{0} \\ \dot{\omega} = 0 \Longrightarrow \vec{\gamma}_e = l\omega^2 \sin\alpha \vec{k} \wedge \left(\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho\right) = -l\omega^2 \sin\alpha \vec{e}_\rho \end{cases}$$

La seule force d'inertie non nulle est la force d'inertie d'entrainement $\vec{f}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e = ml\omega^2 \sin\alpha \vec{e}_\rho$.

Le PFD dans $\mathcal{R}_1$, sachant que les forces extérieures s'exerçant sur M sont son poids $m\vec{g}$ et la tension du fil $\vec{T}$, s'écrit alors comme

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{f}_{ie} = m\vec{\gamma}_r \Longrightarrow (-mg + T\cos\alpha)\vec{k} - (T\sin\alpha - ml\omega^2 \sin\alpha)\vec{e}_\rho = \vec{0}.$$

Application du PFD

Point matériel en rotation uniforme : PFD dans $\mathcal{R}_1$

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \textbf{Projection selon } Oz : & T\cos\alpha - mg & = & 0 \Longrightarrow T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} \\ \textbf{Projection selon } Ox_1 : & T\sin\alpha - ml\omega^2\sin\alpha & = & 0 \Longrightarrow T = ml\omega^2 \end{array}\right. \quad \textbf{pour } \sin\alpha \neq 0$$

et donc $\alpha \neq 0$ ce qui est verifié.

La première équation détermine la valeur de T en fonction de la masse et de l'angle α. Pour avoir la condition qu'un tel mouvement soit permis, il suffit de procéder comme suit

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} \quad \textbf{et} \quad T = ml\omega^2 \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}$$

comme $0 < \alpha < \pi/2 \Longrightarrow 0 < \cos\alpha \leq 1$ et donc la racine carrée est bien définie et ω doit vérifier $\omega \geq \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, ω_0 est appelée la pulsation propre du système.

Pour que le mouvement puisse avoir lieu, il faut que la pulsation imposée au système soit supérieure à sa pulsation propre.

Application du PFD

Point matériel en rotation uniforme : PFD dans $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OM}\right|_{\mathcal{R}} \\
&= l\text{sin}\alpha\left.\frac{d^2}{dt^2}\vec{e}_\rho\right|_{\mathcal{R}} = l\omega^2\text{sin}\alpha\vec{k}\wedge\left(\vec{k}\wedge\vec{e}_\rho\right) \\
&= -l\text{sin}\alpha\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho = -l\omega^2\text{sin}\alpha\vec{e}_\rho
\end{aligned}$$

et le PFD est

$$m\vec{g}+\vec{T} = m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = -ml\omega^2\text{sin}\alpha\vec{e}_\rho$$

qui est la même équation que dans le paragraphe précédent. Il suffit d'adopter la même démarche pour solutionner le problème.

Remarque

Dans ce cas particulier, l'usage direct de $\mathcal{R}$ s'avère plutôt simple que celui de $\mathcal{R}_1$. Toutefois, en présence de mouvement complexe, il est intéressant de décomposer le mouvement et passer par un référentiel non galiléen.