UNIVERSITE MOHAMMED V
Faculté des Sciences - Rabat

Année universitaire 2020-2021
MODULE M 5 (Semestre S1)
Filière **SMIA**

THERMODYNAMIQUE (TD 1)

Différentielle, fonction à plusieurs variables : dérivées partielles, différentielle totale exacte

EXERCICE 1 :

Ecrire la différentielle de la fonction : $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

EXERCICE 2 :

Soit la fonction à deux variables : $f(x, y) = x^5 + 3xy^4 + 2y^2 + 1$

1/ Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

2/ En déduire l'expression de la différentielle df.

3/ Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

EXERCICE 3 :

En thermodynamique, on rencontre des équations différentielles de type: $\delta F = A(x, y).dx + B(x, y).dy$ où $A(x,y)$ et $B(x,y)$ sont deux fonctions à deux variables x et y indépendantes. (δF représente une variation infinitésimale de la fonction F(x,y)). Donner une condition nécessaire et suffisante pour que δF soit une différentielle totale exacte. Dans ce cas, F sera alors une propriété du système et on notera sa différentielle dF.

1/ Montrer que la forme $\delta F = y.dx + x.dy$ correspond à une différentielle totale
exacte.

2/ Déterminer alors la fonction F(x,y).

3/ Calculer $\int_{(0,0)}^{(1,1)} dF$ suivant les trois chemins suivants :

i/ (x = 0 puis y = 1) ; ii/ (y = 0 puis x = 1) ; iii/ y = x . Conclure.

EXERCICE 4 :

On considère la fonction : $P(V,T) = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$ (a, b et R sont des constantes)

Calculer les dérivées partielles de P et en déduire sa différentielle. Vérifier que cette différentielle est totale exacte.

EXERCICE 5 :

1/ Donner les expressions différentielles des relations suivantes :

$PV = cste$; $PV - RT = cste$ (R est une constante)

2/ Déterminer la relation en P et V en considérant l'écriture différentielle suivante :

$V dP + \gamma P dV = 0$ (γ est une constante)

EXERCICE 6 : (Fonction implicite)

Dans certaines conditions, $f(x,y,z) = 0$ permet de définir x comme fonction de y, z ; ou y comme fonction de x, z ; ou z comme fonction de x, y.

1/ Montrer les deux relations suivantes :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z} \quad (1) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \quad (2)$$

2/ En déduire que : $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$ (3)

3/ Application : $f(P, V, T) = PV - RT = 0$ (R est une constante)

- - - - ----- -- -- - -- -- ---- -- -- -- -- -- -- -- - --

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

- - - - ----- ----- -- -- - -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- --

EXERCICE 1 :

Soit la forme différentielle suivante : $\delta F = (x - y)\, dx + (x + y)\, dy$. S'agit-il d'une différentielle totale exacte ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 2 :

On considère la relation : $f(P, V, T) = P - \dfrac{RT}{V-b} + \dfrac{a}{V^2} = 0$ (a, b et R sont des constantes). Calculer $\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_P$.

Excercice 1 : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Dérivée : $f'(x) = \dfrac{-(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-2x}{(1+x)^2}$

Différentielle : $df = f'(x)\,dx$

$$\Rightarrow df = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

Excercice 2 : $f(x,y) = x^5 + 3xy^4 + 2y^2 + 1$

1/ Dérivées partielles :

$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 5x^4 + 3y^4$; $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_x = 12xy^3 + 4y$

2/ Différentielle : $df = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$

$$\Rightarrow df = \{5x^4 + 3y^4\}\,dx + \{12xy^3 + 4y\}\,dy$$

3/ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\{5x^4 + 3y^4\} = 20x^3$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\{12xy^3 + 4y\} = 36xy^2 + 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\{5x^4 + 3y^4\} = 12y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\{12xy^3 + 4y\} = 12y^3$$

xercice 3 :

$$\delta F(x,y) = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$

δF est une différentielle totale escacte

$$\Leftrightarrow \quad A(x,y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y \;;\; B(x,y) = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x$$

et $\dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{\partial B}{\partial x}$

c'est à dire : $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$$

Dans ce cas, on notera cette différentielle dF

$\Rightarrow F(x,y)$ est une fonction d'état,

1/ $\delta F(x,y) = y\,dx + x\,dy$

$A(x,y) = y$ et $B(x,y) = x$

$\dfrac{\partial A}{\partial y} = 1 \;;\; \dfrac{\partial B}{\partial x} = 1$

$\dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{\partial B}{\partial x} \Rightarrow \delta F$ est une différentielle totale escacte et sera notée dF

$\Rightarrow F(x,y)$ esciste,

2/ $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y \quad (1) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x \quad (2) \end{cases}$

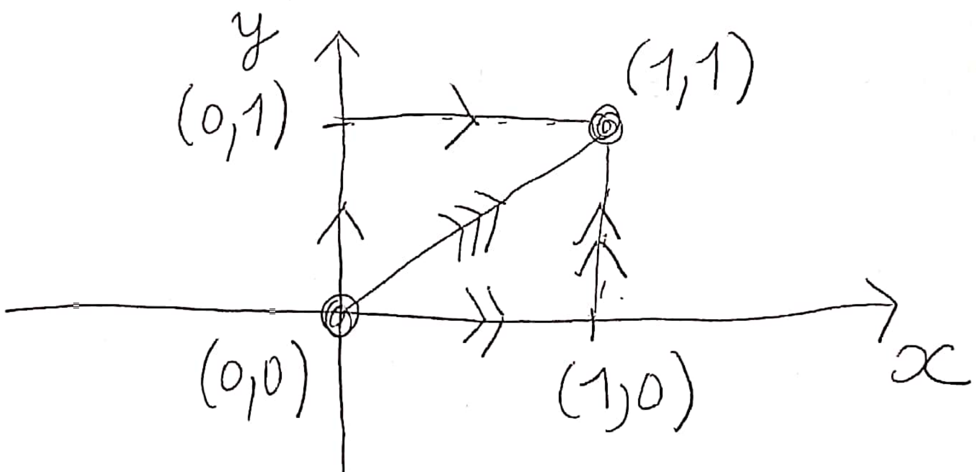
$$(1) \Rightarrow F = xy + \varphi(y)$$

$$(2) \Rightarrow x + \frac{d\varphi(y)}{dy} = x$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = cste$$

$$\Rightarrow F = xy + cste$$

3/ Calcul de $\int_{(0,0)}^{(1,1)} dF$ suivant trois chemins différents



Suivant le chemin (1) : ($x = 0$ puis $y = 1$)

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} dF = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \{ y \cdot dx + x \cdot dy \}$$

$$= \int_{(0,0)}^{(0,1)} \{ y \cdot dx + x \cdot dy \} + \int_{(0,1)}^{(1,1)} \{ y \cdot dx + x \cdot dy \}$$

$$= 0 + \int_0^1 1 \cdot dx = [x]_0^1 = 1$$

uivant le chemin (2) : ($y=0$ puis $x=1$)

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} dF = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \{y \cdot dx + x \cdot dy\}$$

$$= \int_{(0,0)}^{(1,0)} \{y \cdot dx + x \cdot dy\} + \int_{(1,0)}^{(1,1)} \{y \cdot dx + x \cdot dy\}$$

$$= 0 + \int_0^1 1 \cdot dy = [y]_0^1 = 1$$

Suivant le chemin (3) : ($y=x$) $\Rightarrow dy = dx$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} dF = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \{y \cdot dx + x \cdot dy\} = \int_0^1 2x\,dx$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

$$\int_{(1)} dF = \int_{(2)} dF = \int_{(3)} dF = 1 = F(1,1) - F(0,0)$$

Même résultat pour les trois chemins.

Scanné avec CamScanner

Exercice 4 : $P(V,T) = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{-RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} \\ \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow dP = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \cdot dV + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \cdot dT$$

$$dP = \left\{ \frac{2a}{V^3} - \frac{RT}{(V-b)^2} \right\} \cdot dV + \left\{ \frac{R}{V-b} \right\} \cdot dT$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial T \partial V} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right) = \frac{-R}{(V-b)^2}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial V \partial T} = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right) = \frac{-R}{(V-b)^2}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 P}{\partial V \partial T}$$

Exercice 5 :

1/ • $PV = cste \Rightarrow d(PV) = 0$

$\Rightarrow V dP + P dV = 0$

ou encore : $\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = 0$

• $PV - RT = 0 \Rightarrow d(PV - RT) = 0$

$\Rightarrow P dV + V dP - R dT = 0$

Scanné avec CamScanner

2/ $V\,dP + \gamma P\,dV = 0 \Rightarrow \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$

$\Rightarrow \ln(P) + \gamma \ln(V) = cste$

$\Rightarrow \ln(PV^\gamma) = cste \Rightarrow P.V^\gamma = cste$

Excercice 6 : $f(x,y,z) = 0$

1/ $\begin{cases} x = x(y,z) \Rightarrow dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z . dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y . dz \quad (*) \\ y = y(x,z) \Rightarrow dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z . dx + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x . dz \quad (**) \end{cases}$

(**) dans (*)

$\Rightarrow dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z . \left\{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x dz\right\} + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz$

$\Rightarrow dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z . \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx + \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z . \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y\right\} dz$

Identification

$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z . \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1 \quad (***) \\ \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z . \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 0 \quad (****) \end{cases}$

$(***) \Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z} \quad (1)$

$(****) \Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z . \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \quad (2)$

2/ L'utilisation de (1) dans (2)

$\Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z . \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = \frac{-1}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y}$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z . \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x . \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \quad (3)$

3/ Application : $f(P, V, T) = PV - RT = C$

On pourra vérifier (par escemple) que :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \left(-\frac{RT}{V^2}\right)\left(-\frac{RT}{P^2}\right)$$

$$= \left(\frac{RT}{PV}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \left(-\frac{RT}{V^2}\right)\left(\frac{R}{P}\right)\left(\frac{V}{R}\right)$$

$$= -\frac{RT}{PV} = -1$$