UNIVERSITE MOHAMMED V
Faculté des Sciences - Rabat

Année universitaire 2020-2021
MODULE M 5 (Semestre S1)
Filière **SMIA**

THERMODYNAMIQUE (TD 5)

Entropie - Source de chaleur - Cycle moteur

EXERCICE 1 :

Deux corps solides (1) et (2), de même masse m, de même chaleur massique c constante et de températures T_1 et T_2 respectivement, sont mis en contact thermique. L'ensemble est supposé isolé. Calculer la température finale d'équilibre T_f et la variation totale d'entropie $(\Delta S)_t$. Vérifier que : $(\Delta S)_t \geq 0$

EXERCICE 2 :

On plonge un corps de masse m, de chaleur massique c (constante) et ayant une température initiale T_1 dans une source de chaleur de température T_0.

1/ Déterminer la variation d'entropie du corps; montrer qu'elle peut être positive, négative ou nulle.

2/ Calculer la variation totale d'entropie $(\Delta S)_t$. Montrer qu'elle est positive ou nulle. Conclusion.

3/ Le corps est un métal de masse m = 1kg, de chaleur massique c= 880 $J.kg^{-1}.K^{-1}$ et de température initiale T_1 = 28°C. Le thermostat (source de chaleur) a une température T_0 = 100°C. Calculer la variation totale d'entropie de l'ensemble (métal + source de chaleur). En déduire la création d'entropie.

EXERCICE 3 :

Dans un récipient parfaitement calorifugé contenant une masse m_1 = 1 kg d'eau à la température T_1 = 20°C, on place un bloc de glace de masse m_2 = 500 g à 0°C. On constate qu'à l'équilibre, la glace n'a pas totalement fondu et il y a un mélange de glace et d'eau.

1/ Déterminer la composition du mélange à l'équilibre. On désignera par x la masse de la glace fondue.

2/ Calculer la variation d'entropie de la masse d'eau : **a/** initialement à l'état liquide $(\Delta S)_1$. **b/** initialement à l'état solide $(\Delta S)_2$. Que peut-on dire de cette transformation?

Données : A la pression atmosphérique :
- chaleur massique de l'eau à l'état liquide: c_e = 4,2 kJ. kg^{-1}. K^{-1}
- chaleur latente massique de fusion de la glace à 0 °C : L_f = 336 kJ . kg^{-1}

EXERCICE 4 :

Une masse m d'un gaz parfait décrit un cycle ABCA constitué des transformations réversibles suivantes :

- une compression isotherme AB ,
- un refroidissement isochore BC ,
- un échauffement isobare CA ,

Données : m = 2 kg ; M = 29 g . mol^{-1} ; T_A= 600 K ; $T_C = T_A / 2$;

$$R = 8,32 \; J.mol^{-1}.K^{-1} \quad ; \quad \frac{c_p}{c_V} = \gamma = 1,4$$

1/ Tracer l'allure du cycle ABCA dans le diagramme de Clapeyron P = P (V) et dans le diagramme entropique T = T (S). S'agit-il d'un cycle moteur ou d'un cycle récepteur ?

2/ Déterminer la variation d'entropie pour chaque transformation du cycle.

3/ Vérifier le deuxième principe de la thermodynamique pour le cycle.

EXERCICE 5 :
Soit un gaz parfait décrivant un cycle moteur de CARNOT (Cycle ABCDA) formé de deux transformations isothermes réversibles (AB et CD) et deux transformations adiabatiques réversibles (BC et DA). Au cours du cycle, il reçoit une quantité de chaleur Q_1 d'une source chaude à la température T_1 (transformation AB), cède une quantité de chaleur Q_2 à une source froide de température T_2 ($T_2 < T_1$) (transformation CD), et fourni au milieu extérieur un travail W_{Cycle} .

1/ Donner le schéma de principe de fonctionnement du moteur de CARNOT.
2/ Représenter le cycle ABCDA (cycle de CARNOT) dans le diagramme de Clapeyron P = P (V) et dans le diagramme entropique T = T (S). Dans quel sens est décrit le cycle ?
3/ En appliquant le premier principe de la thermodynamique au cycle, retrouver la relation entre Q_1 , Q_2 et W_{Cycle} .
4/ Par application du deuxième principe de la thermodynamique au cycle, montrer que :

$$\frac{Q_2}{Q_1} = - \frac{T_2}{T_1}$$

5/ Donner la définition du rendement η_{CARNOT} de ce moteur.
6/ Exprimer ce rendement en fonction des quantités de chaleur Q_1 et Q_2 , puis en fonction des températures T_1 et T_2 des deux sources de chaleur.
7/ Calculer η_{CARNOT} pour $T_1 = 250$ °C et $T_2 = 25$°C

EXERCICE 6 :
On fait subir à une masse m = 1kg de gaz parfait, un cycle ABCDA formé par les transformations réversibles suivantes :

- une compression adiabatique AB ,
- un échauffement isochore BC ,
- une détente adiabatique CD ,
- un refroidissement isochore DA.

Données :

Rapport de compression : $a = \frac{V_A}{V_B} = 8$; rapport des chaleurs spécifiques: $\gamma = \frac{c_p}{c_V} = 1,4$

$T_A = 300$ K ; $T_C = 2800$ K ; $R = 8,32$ J . mol^{-1} . K^{-1} ; $M = 29$ g . mol^{-1}

1/ Tracer le cycle ABCDA dans le diagramme de Clapeyron P = P(V). S'agit-il d'un cycle récepteur ou d'un cycle moteur ?
2/ Représenter le cycle ABCDA dans le diagramme entropique T = T(S).
3/ Déterminer les températures T_B et T_D respectivement aux états B et D.
4/ Calculer les quantités de chaleur échangées par le gaz avec le milieu extérieur au cours des quatre transformations du cycle.
5/ Calculer la variation de l'énergie interne, la variation d'enthalpie et la variation d'entropie pour chaque transformation du cycle.
6/ Donner l'expression du rendement η du cycle ABCDA en fonction des températures T_A , T_B , T_C et T_D .
7/ Exprimer ce rendement en fonction de a et γ . Calculer η .

Exercice 1 :

$\{$corps (1), corps (2)$\}$ système isolé,

Equilibre thermique $\Rightarrow Q_1 + Q_2 = 0$

$$mc\,(T_f - T_1) + mc\,(T_f - T_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$(\Delta S)_1 = \int_{T_1}^{T_f} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_f} mc\frac{dT}{T} = mc\ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right)$$

$$(\Delta S)_2 = \int_{T_2}^{T_f} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_2}^{T_f} mc\frac{dT}{T} = mc\ln\left(\frac{T_f}{T_2}\right)$$

$$\Rightarrow (\Delta S)_t = mc\ln\left(\frac{T_f^2}{T_1 T_2}\right)$$

$$= mc\ln\left\{\frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1T_2}\right\}$$

$$(T_1 + T_2)^2 - 4T_1T_2 = (T_1 - T_2)^2 \geqslant 0$$

$$\Rightarrow (\Delta S)_t \geqslant 0$$

Exercice 2 :

1/ $$(\Delta S)_m = \int_{T_1}^{T_0} \frac{mc\,dT}{T} = mc \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right)$$

si $T_1 > T_0 \Rightarrow (\Delta S)_m < 0$

si $T_1 = T_0 \Rightarrow (\Delta S)_m = 0$

si $T_1 < T_0 \Rightarrow (\Delta S)_m > 0$

2/ $$(\Delta S)_0 = \frac{Q_0}{T_0} = -mc\,\frac{(T_0 - T_1)}{T_0}$$

$$\Rightarrow (\Delta S)_t = (\Delta S)_0 + (\Delta S)_m$$

$$= mc\left(\frac{T_1}{T_0} - 1 - \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)\right)$$

on pose : $x = \frac{T_1}{T_0} \Rightarrow (\Delta S)_t = mc\left(x - 1 - \ln(x)\right)$

Tableau de variation de $f(x) = x - 1 - \ln(x)$

x	0		1	
$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$\Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow (\Delta S)_t \geq 0$

$$\begin{cases} \text{si } T_1 = T_0 \Rightarrow (\Delta S)_t = 0 \text{ (cas réversible)} \\ \text{si } T_1 \neq T_0 \Rightarrow (\Delta S)_t > 0 \text{ (cas irréversible)} \end{cases}$$

3/ $T_1 = 301\,K$; $T_0 = 373\,K$

$$(\Delta S)_m = mc \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right) \simeq 188{,}73\ J.K^{-1}$$

$$(\Delta S)_0 = -\frac{mc\,(T_0 - T_1)}{T_0} \simeq -169{,}87\ J.K^{-1}$$

$$\Rightarrow (\Delta S)_t = (\Delta S)_m + (\Delta S)_0$$
$$\simeq 18{,}86\ J.K^{-1}$$

L'ensemble {métal, source de chaleur} constitue un système isolé :

$$(\Delta S)_t = S^{\text{échange}} + S^{\text{création}}$$

$$S^{\text{échange}} = 0$$

$$\Rightarrow S^{\text{création}} \simeq 18{,}86\ J.K^{-1} > 0$$

(transformation irréversible)

Excercice 3 :

1/ coexistence de la glace et d'eau liquide à l'équilibre $\Rightarrow$ température finale d'équilibre est $T_f = 0°C$

x = masse de glace fondue.

La composition du mélange à l'équilibre :

$$\text{à } T_f = 0°C \begin{cases} (m_1 + x) \text{ d'eau liquide} \\ (m_2 - x) \text{ de glace} \end{cases}$$

$$\sum Q_i = 0 \quad \text{(principe zéro)}$$

$$x L_f + m_1 c_e (T_f - T_1) = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{m_1 c_e (T_f - T_1)}{L_f} = 0{,}25 \text{ kg}$$

D'où : à l'équilibre, à 0°C, le mélange est composé de 0,25 kg de glace et de 1,25 kg d'eau liquide.

2/ a/ variation d'entropie de la masse m d'eau initialement à l'état liquide :

$$(\Delta S)_1 = \int \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_f} m_1 c_e \frac{dT}{T}$$

$$= m_1 c_e \ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right)$$

$$\simeq -296{,}94 \, J.K^{-1}$$

b/ La variation d'entropie de la masse m_2 initialement à l'état de glace se réduit à la variation d'entropie de la masse x de glace fondue car la masse $(m_2 - x)$ de glace est restée dans le même état.

$$(\Delta S)_2 = \frac{x L_f}{T_f} \simeq 307{,}69 \, J.K^{-1}$$

La variation d'entropie du système isolé {mélange glace et eau liquide} est :

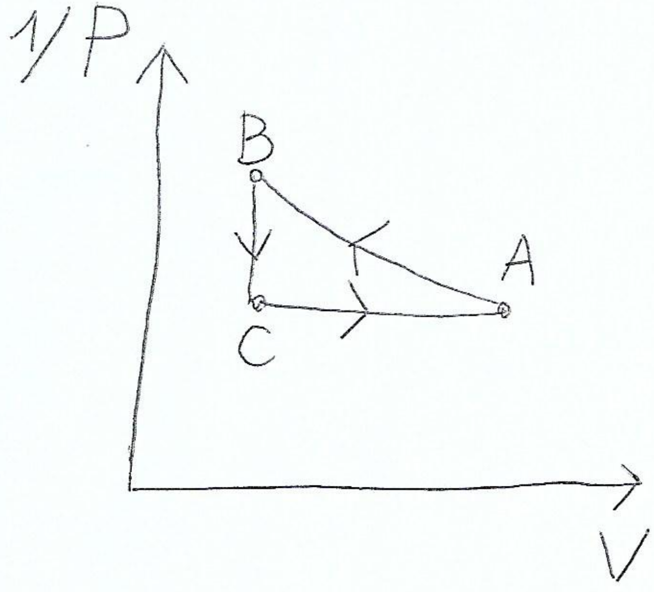
$$\Delta S = (\Delta S)_1 + (\Delta S)_2$$

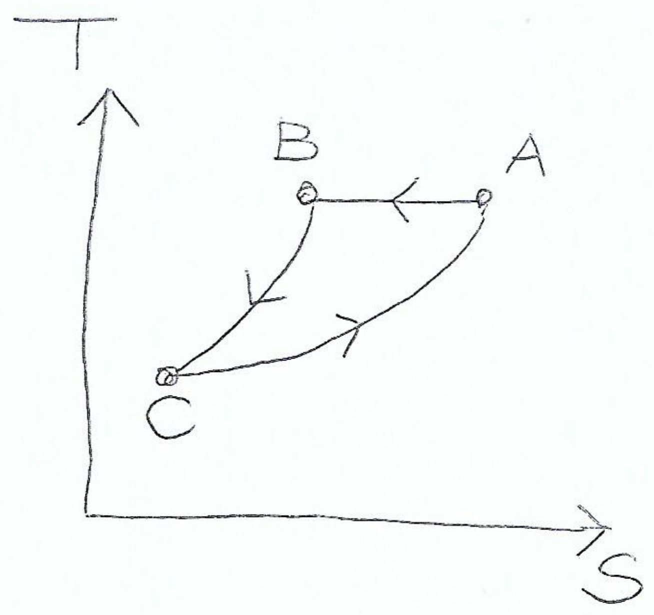
$$= +10{,}75 \, J.K^{-1} > 0$$

$\Rightarrow$ La transformation est irréversible.

Exercice 4 :

1/





Le cycle est décrit dans le sens trigonométrique

$\Rightarrow$ cycle récepteur ($W_{cycle} > 0$)

2/ $$(\Delta S)_{AB} = \frac{Q_{AB}}{T_A} = \frac{-W_{AB}}{T_A}$$

$$= \frac{m}{M} R \ln\left(\frac{P_A}{P_B}\right)$$

avec $P_B = P_C \cdot \frac{T_B}{T_C} = P_C \cdot \frac{T_A}{T_C} = 2P_A$

$$\Rightarrow (\Delta S)_{AB} = \frac{m}{M} R \ln\left(\frac{1}{2}\right) \simeq -397{,}72 \ J.K^{-1}$$

$$(\Delta S)_{BC} = \int \frac{\delta Q}{T} = m c_V \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right)$$ avec $T_B = T_A$ et $T_C = T_A/2$

$$= m \cdot \frac{R}{M} \cdot \frac{1}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \simeq -994{,}31 \ J.K^{-1}$$

$$(\Delta S)_{CA} = \int \frac{\delta Q}{T} = m\, c_p \ln\left(\frac{T_A}{T_C}\right)$$

$$= m \cdot \frac{R}{M} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln(2)$$

$$\simeq 1392{,}03 \ J \cdot K^{-1}$$

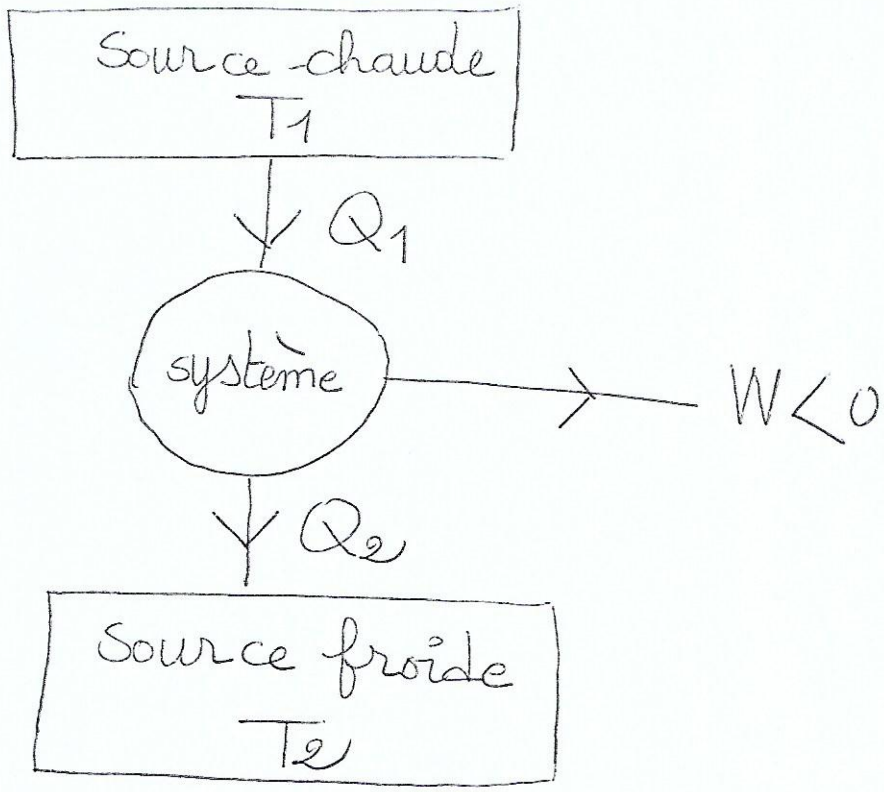
3/ $$(\Delta S)_{cycle} = (\Delta S)_{AB} + (\Delta S)_{BC} + (\Delta S)_{CA}$$

$$= -397{,}72 - 994{,}31 + 1392{,}03$$

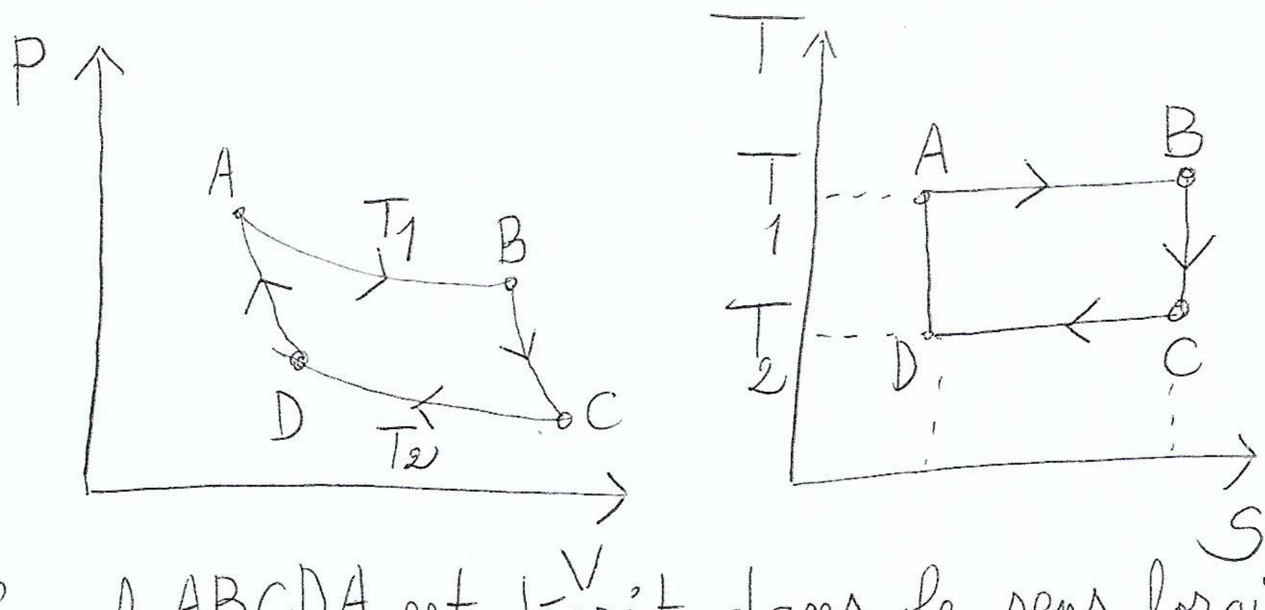
$$= 0$$

Exercice 5 :

1/



2/



Le cycle ABCDA est décrit dans le sens horaire

$\Rightarrow$ Cycle moteur ($W_{cycle} < 0$)

3/ $(\Delta U)_{cycle} = W_{cycle} + Q_{cycle} = 0$

$\Rightarrow W_{cycle} = -(Q_1 + Q_2)$

4/ $$(\Delta S)_{cycle} = (\Delta S)_{AB} + (\Delta S)_{BC} + (\Delta S)_{CD} + (\Delta S)_{DA} = 0$$

avec $(\Delta S)_{BC} = 0$ et $(\Delta S)_{DA} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_1}\int_A^B \delta Q + \frac{1}{T_2}\int_C^D \delta Q = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1}$$

5/ $$\eta_{carnot} = \frac{-W_{cycle}}{Q_1}$$

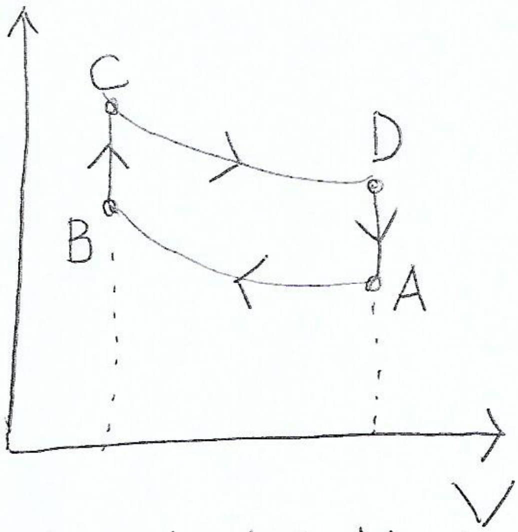
6/ $$\eta_{carnot} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

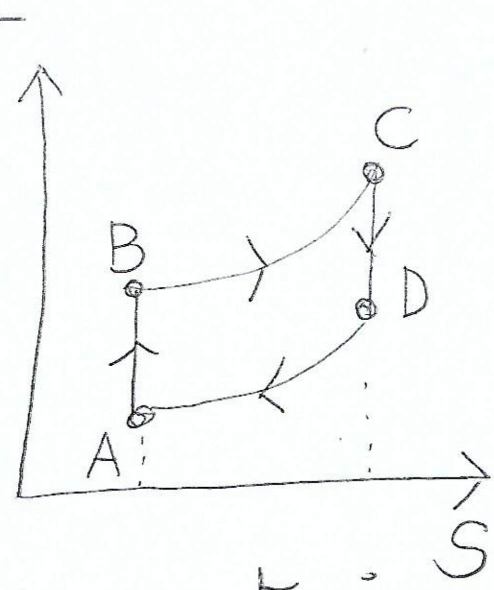
7/ $$\eta_{carnot} = 1 - \frac{298}{523} \simeq 0{,}43 = 43\%$$

Exercice 6 :

1/

2/





Le cycle est décrit dans le sens contraire au sens trigonométrique $\Rightarrow$ cycle moteur ($W_{cycle} < 0$)

3/ AB adiabatique $\Rightarrow T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$

$$\Rightarrow T_B = T_A \cdot \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} \quad \text{avec } \frac{V_A}{V_B} = a = 8$$

$$\Rightarrow T_B \simeq 689\,K$$

CD adiabatique $\Rightarrow T_C V_B^{\gamma-1} = T_D V_A^{\gamma-1}$

$$\Rightarrow T_D = T_C \cdot \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow T_D \simeq 1219\,K$$

4/ $c_V = \frac{R}{M} \cdot \frac{1}{\gamma-1} \simeq 717{,}24\ J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$

$Q_{AB} = Q_{CD} = 0$ (adiabatiques)

$Q_{BC} = (\Delta U)_{BC} = m c_V (T_C - T_B) \simeq 1514{,}09\ kJ$

$Q_{DA} = (\Delta U)_{DA} = m c_V (T_A - T_D) \simeq -659{,}14\ kJ$

5/ Variation de l'énergie interne :

$$(\Delta U)_{AB} = m\,c_v\,(T_B - T_A) \simeq 279{,}01 \text{ kJ}$$

$$(\Delta U)_{BC} = Q_{BC} \simeq 1514{,}09 \text{ kJ}$$

$$(\Delta U)_{CD} = m\,c_v\,(T_D - T_C) \simeq -1133{,}96 \text{ kJ}$$

$$(\Delta U)_{DA} = Q_{DA} \simeq -659{,}14 \text{ kJ}$$

Variation d'enthalpie :

$$c_p = \frac{R}{M} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \simeq 1004{,}14 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$(\Delta H)_{AB} = m\,c_p\,(T_B - T_A) \simeq 390{,}61 \text{ kJ}$$

$$(\Delta H)_{BC} = m\,c_p\,(T_C - T_B) \simeq 2119{,}74 \text{ kJ}$$

$$(\Delta H)_{CD} = m\,c_p\,(T_D - T_C) \simeq -1587{,}55 \text{ kJ}$$

$$(\Delta H)_{DA} = m\,c_p\,(T_A - T_D) \simeq -922{,}80 \text{ kJ}$$

Variation d'entropie :

$$(\Delta S)_{AB} = (\Delta S)_{CD} = 0 \text{ (isentropiques)}$$

$$(\Delta S)_{BC} = \int_{T_B}^{T_C} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_B}^{T_C} \frac{m\,c_v\,dT}{T}$$

$$= m \cdot c_v \cdot \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) \simeq 1001 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$(\Delta S)_{DA} = \int_{T_D}^{T_A} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_D}^{T_A} \frac{m\,c_v\,dT}{T}$$

$$= m \cdot c_v \cdot \ln\left(\frac{T_A}{T_D}\right) \simeq -1001 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

6/ $$\eta = \frac{-W}{Q_{BC}} = \frac{Q_{BC}+Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

7/ $$\eta = 1 - \frac{T_A}{T_B} \cdot \frac{\frac{T_D}{T_A} - 1}{\frac{T_C}{T_B} - 1}$$

CD adiabatique $\Rightarrow T_D V_D^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$

AB adiabatique $\Rightarrow T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$

avec $V_D = V_A$ et $V_C = V_B$

$$\Rightarrow \frac{T_D}{T_A} = \frac{T_C}{T_B}$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_A}{T_B} = 1 - \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{1}{a^{\gamma-1}}$$

$a = 8 \quad \Rightarrow \eta \simeq 0,56 = 56\%$

Kabouchi