Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat, Maroc

Filière : SMIA
Semestre 1
2017-2018

Examen (Session de rattrapage) (1h30min)
(Algèbre 2)

Questions de cours.

1. Soit $\phi : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes. Montrer que, pour tout sous-groupe H de G', $\phi^{-1}(H)$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que $\mathbb{Z}$ n'admet pas de sous-anneaux autre que $\mathbb{Z}$ lui même.
3. Déterminer ce qui suit :
   (a) l'idéal principal de $\mathbb{Z}$ engendré par 2.
   (b) l'idéal principal de $\mathbb{R}$ engendré par 2.
   (c) le sous-groupe monogène de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par 2.

Exercice 1. Soient A un anneau non nul et $\alpha \in A$. On munit $E = A \times A$ des deux lois suivantes : $(a,b) + (x,y) = (a+x, b+y)$ et $(a,b) \star (x,y) = (ax, ay + \alpha bx)$ (pour tous (a,b) et (x,y) dans E).

1. Montrer que $(E, +)$ est un groupe commutatif.
2. Montrer que la loi $\star$ est commutative sur E si et seulement si l'anneau A est commutatif et $\alpha = 1$.
3. On suppose que l'anneau A est commutatif et $\alpha = 1$.
   3.1 Montrer que $(E, +, \star)$ est un anneau.
   3.2 Montrer que $A \times \{0\}$ est un sous-anneau de E.
   3.3 On considère une partie I de A. Montrer que I est un idéal de A si et seulement si $I \times A$ est un idéal de E.

Exercice 2.

1. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de $P \in \mathbb{R}[X]$, alors son conjugué $\overline{z}$ est aussi une racine de P.
2. On considère le polynôme $Q = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$.
   2.1 Montrer que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine de Q.
   2.2 Calculer les polynômes dérivés Q' et Q'' de Q.
   2.3 Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine j du polynôme Q.
   2.4 En déduire toutes les racines de Q.
   2.5 Décomposer Q en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

Scanned by CamScanner