UNIVERSITE MOHAMMED V de RABAT

FACULTE DES SCIENCES

Cours d'Analyse I

Par

Pr. A. ZOGLAT

SMIA, S1

Automne 2020

Ces notes de cours sont destinées aux étudiants de S1 de la filière SMIA. Elles ont été rédigées, conformément au nouveau programme accrédité, dans le but d'aider les étudiants à consolider leurs acquis mathématiques et à maîtriser les nouvelles notions introduites dans ce cours.

Je serai reconnaissant à tout lecteur qui aura l'amabilité de me signaler des erreurs que peut comporter ce manuscrit ou de me suggérer une idée pour le parfaire.

A. Zoglat.

Table des matières

CHAPITRE 2

Suites numériques

2.1 Généralités sur les suites

Les suites de nombres réelles sont des outils mathématiques très utiles dans divers domaines théoriques et pratiques. Nous les avons déjà rencontrés au chapitre précédent et nous nous proposons de leur consacrer le présent chapitre.

2.1.1 Définitions

D'une façon générale, on définit une suite comme une succession ordonnée d'éléments pris dans un ensemble donné.

Définition 1. Une suite numérique, dite aussi suite réelle, est une application u d'une partie I de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On la note $\{u(n), n \in I\}$, $(u_n)_{n\in I}$ ou tout simplement $(u_n)_n$.

L'ensemble I s'appelle le domaine de la suite et u_n s'appelle son terme général.

Remarque.

1. Une suite $(u_n)_n$ peut être définie par l'expression de son terme général u_n en fonction de n.
2. Elle peut également être définie par la valeur du premier terme et par une relation de récurrence, c'est-à-dire une relation liant deux termes généraux successifs. On dit alors que c'est une suite récurrente.

Exemples 1.

1. $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général défini par : $\forall n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{n}$.
2. $(v_n)_n$ la suite de terme général défini par : $\forall n \geq 0$, $v_n = \cos(n\frac{\pi}{2})$.
3. $(w_n)_n$ la suite de terme général défini par : $\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \geq 0,\ w_{n+1} = 2w_n \end{cases}$
4. La fonction $u : I = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 4\} \to \mathbb{R}$ définie par $u(n) = \dfrac{2}{\sqrt{n-3}}$ est une suite réelle de terme général $u_n = \dfrac{2}{\sqrt{n-3}}$, pour tout $n \geq 4$.

2.1.2 Opérations sur l'ensemble des suites numériques

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques et λ un nombre réel.

— On dira que les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont égales lorsque $u_n = v_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

— On écrira $(u_n)_n \leq (v_n)_n$ lorsque $u_n \leq v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

— La somme $(u_n)_n + (v_n)_n$ des deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ est une suite $(w_n)_n$ dont le terme général est $w_n = u_n + v_n$.

— Le produit $\lambda(u_n)_n$ de la suite $(u_n)_n$ par un nombre réel λ est une suite $(w_n)_n$ dont le terme général est $w_n = \lambda u_n$.

— Le produit $(u_n)_n \times (v_n)_n$ de deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ est une suite $(w_n)_n$ dont le terme général est $w_n = u_n \times v_n$.

— Le quotient $\dfrac{(u_n)_n}{(v_n)_n}$ de deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$, lorsque $v_n \neq 0$, est une suite $(w_n)_n$ dont le terme général est $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$

2.1.3 Suites arithmétiques, suites géométriques

Certaines suites méritent un traitement particulier car elles possèdent des caractéristiques qui les rendent distinguables.

Définition 2. Soient $(u_n)_n$ est une suite numérique et $r \in \mathbb{R}$ un nombre réel.

1- On dit que $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = u_n + r$

2- On dit que $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison r si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = r\ u_n$

Exemples 2.

1- Un mobile, partant d'un point O se déplace sur une droite à la vitesse constante de 3.2 m/s (mètre par seconde). Notons d_n la distance parcourue depuis le point O après n secondes. On a :

$$d_0 = 0,\ d_1 = 3.2,\ d_2 = 6.2,\ \ldots, d_n = 3.2\ n.$$

La différence $d_{n+1} - d_n = 3.2$ est la distance parcourue en une seconde. Ainsi la suite $(d_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r = 3.2$.

2- Madame Économe a déposé le premier janvier 2014 une somme $s = 500$ DH sur son compte épargne au taux d'intérêt constant $t = 4\%$. Notons s_n la somme qui sera sur le compte épargne de Mme Économe le premier janvier de l'année $2014 + n$. Ainsi on a :

$$s_0 = s,\ s_1 = (1+t)\ s_0,\ s_2 = (1+t)\ s_1,\ \ldots, s_n = (1+t)\ s_{n-1}.$$

Ainsi la suite $(s_n)_n$ est une suite géométrique de raison $r = 1 + t = 1.04$.

Pour les suites arithmétiques ou géométriques, la donnée du premier terme détermine complètement le terme général de la suite.

Proposition 1. Soient $(u_n)_n$ une suite numérique et u_0 son premier terme.

1- Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n\ r$.

2- Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison r alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0\ r^n$.

Exercice. Donner une démonstration à la Proposition 1.

La somme des premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique peut être obtenue à partir du premier terme de la suite et de sa raison.

Proposition 2. Soient $(u_n)_n$ une suite numérique, u_0 son premier terme, et $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ la somme des $n+1$ premiers termes de $(u_n)_n$.

1- Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = (n+1)\ u_0 + r\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2- Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison r alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0\ \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

Démonstration.

1- Sans perdre de généralité on peut supposer que que $u_0 = 0$ et que $r = 1$ (il suffit de considérer $v_n = \dfrac{u_n - u_0}{r}$). On démontre , en utilisant par exemple un raisonnement par récurrence, que

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2- Là encore on peut, sans perdre de généralité, supposer que $u_0 = 1$ et prouver que

$$S_n = 1 + r + r^2 + \ldots + n^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

□

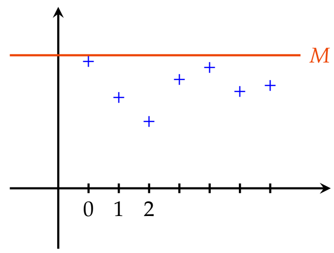
2.1.4 Suites minorées, majorées et bornées

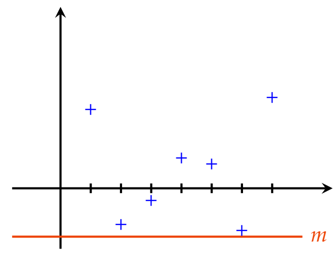
Définition 3. Une suite numérique $(u_n)_n$ est

(a) majorée (ou bornée supérieurement) s'il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$, tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.

(b) minorée (ou bornée inférieurement) s'il existe un nombre $m \in \mathbb{R}$, tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n$.

(c) bornée si elle est majorée et minorée.





Remarque.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée $\Longleftrightarrow$ l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée $\Longleftrightarrow$ l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ minoré.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $\Longleftrightarrow$ l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ borné.

Exemples 3.

1. Soit la suite $(\frac{n-1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Cette suite est bornée car $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{n-1}{n} \leq 1$.
2. Soit la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite est minorée par 0 mais elle est non majorée. En effet s'il existait un réel M tel que $n^2 \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$, on aurait $n \leq \sqrt{M}, \forall n \in \mathbb{N}$. Cela impliquerait que $[\sqrt{M}] + 1 \leq \sqrt{M}$. Ce qui est absurde.
3. La suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Donc elle n'est pas bornée.

2.1.5 Suites monotones

Définition 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit qu'elle est

1- croissante si $\forall n \in \mathbb{N}\ , u_n \leq u_{n+1}$,

2- décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}\ , u_{n+1} \leq u_n$,

3- monotone si elle est croissante ou décroissante.

4- stationnaire si $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0\ , u_n = u_{n_0}$.

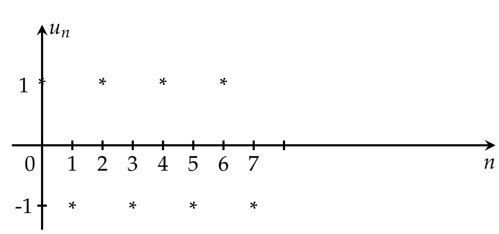
Lorsque l'inégalité entre u_n et u_{n+1} est stricte, on dit que la suite est strictement croissante, strictement décroissante ou strictement monotone.

Exemple 1.

— La suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ est strictement décroissante.

— La suite de terme général $v_n = n^2 - 4n + 1$ est strictement croissante pour $n \geq 2$.

— La suite de terme général $w_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante. En effet $w_0 = 1$, $w_1 = -1$, $w_2 = 1, \ldots, w_{2k} = 1$, $w_{2k+1} = -1, \ldots$ C'est une suite alternée.

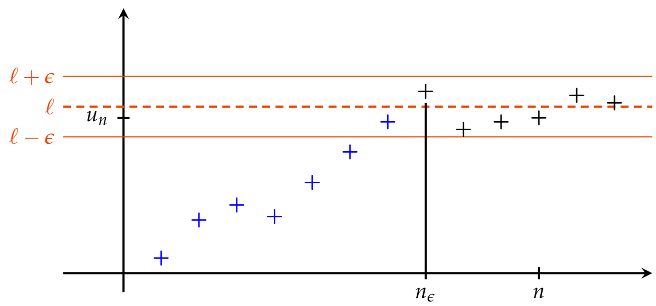


2.1.6 Limites des Suites numériques

Définition 5. Soient $(u_n)_n$ une suite numérique et ℓ un réel.

— On dit que $(u_n)_n$ a pour limite ℓ et on note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ si

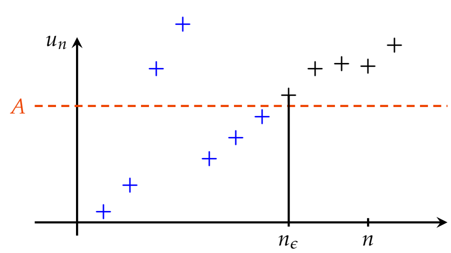
$$\forall \epsilon > 0, \exists\, n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_\epsilon, |u_n - \ell| < \epsilon.$$



Autrement dit, cette définition nous dit qu'à partir d'un certain rang, la suite$(u_n)_n$ se rapproche et reste aussi près que l'on veut de ℓ.

— On dit que $(u_n)_n$ a pour limite ∞ et on note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ si

$$\forall A > 0, \exists\, n_A \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_A, u_n > A.$$



— On dit que $(u_n)_n$ a pour limite $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists\, n_A \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_A, u_n < -A.$$

— On dit qu'une suite est convergente lorsqu'elle admet une limite finie. Dans le cas contraire, on dit qu'elle divergente.

Exemple 2.

1- La suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ a pour limite 0. En effet, soit $\epsilon > 0$. Pour avoir $\left|\dfrac{1}{n^2} - 0\right| = \dfrac{1}{n^2} < \epsilon$, il suffit que $n > \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}$. Ainsi $n_\epsilon = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right] + 1$ est tel que : $n \geq n_\epsilon \Longrightarrow |u_n| < \epsilon$.

2- La suite de terme général $v_n = \dfrac{n}{n+1}$ a pour limite 1. En effet, soit $\epsilon > 0$. Pour avoir $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| = \dfrac{1}{n+1} < \epsilon$, il suffit que $n > \dfrac{1}{\epsilon} - 1$. En prenant $n_\epsilon = \left[\dfrac{1}{\epsilon} - 1\right] + 1$, on a pour tout $n \geq n_\epsilon$, $|v_n - 1| < \epsilon$.

3- La suite de terme général $v_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ a pour limite ∞. En effet, soit $A > 0$. Pour avoir $\dfrac{n^2}{n+1} > A$, il suffit que $n^2 - nA - A > 0$. Comme le discriminant $\Delta = A^2 + 4A > 0$, $n^2 - nA - A > 0$ pour tout $n > \dfrac{A+\sqrt{\Delta}}{2}$. Il suffit donc de prendre $n_\epsilon = \left[\dfrac{A+\sqrt{\Delta}}{2}\right] + 1$.

4- La suite de terme général $w_n = \sqrt[n]{k} = k^{1/n}$, où $k \in \mathbb{N}^*$, converge vers 1. En effet, soit $\epsilon \in]0,1[$, on a

$$|\sqrt[n]{k} - 1| < \epsilon \iff (1-\epsilon)^n < k < (1+\epsilon)^n \iff (1+\epsilon)^n > k.$$

Comme $(1+\epsilon)^n > 1 + n\epsilon$, il suffit que $1 + n\epsilon > k$ pour avoir $(1+\epsilon)^n > k$. Ainsi pour avoir $|\sqrt[n]{k} - 1| < \epsilon$, pour tout $n \geq n_\epsilon$, il suffit de prendre $n_\epsilon = \left[\dfrac{k-1}{\epsilon}\right]+1$.

Remarque 1. Pour toute suite $(u_n)_n$ convergente, on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n\to\infty} (u_n - \ell) = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |u_n - \ell| = 0.$$

2.2 Suites numériques convergentes

Dans ce paragraphe nous présentons les propriétés et résultats classiques sur la convergence des suites numériques.

Proposition 3. Lorsqu'une suite numérique $(u_n)_n$ est convergente, sa **limite est unique**.

Démonstration. Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell'$ avec $\ell \neq \ell'$. Pour $\epsilon = \dfrac{\ell - \ell'}{2}$, il existe un entier n_ϵ tel que pour tout $n \geq n_\epsilon$ on ait $|u_n - \ell| < \epsilon$ et un entier n'_ϵ tel que pour tout $n \geq n'_\epsilon$ on ait $|u_n - \ell'| < \epsilon$. Pour $n \geq \max(n_\epsilon, n'_\epsilon)$, on a $|\ell - \ell'| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| < \epsilon + \epsilon = |\ell - \ell'|$, ce qui est absurde. $\square$

Lorsqu'une suite converge, ses termes deviennent, à partir d'un certain rang, aussi proches les uns des autres que la suite est "presque stationnaire". Plus précisément, on a le théorème suivant

Théorème 1. Soit $(u_n)_n$ une suite numérique.

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R} \Longrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists\, n_\epsilon \in \mathbb{N} : \sup_{n,m \geq n_\epsilon} |u_n - u_m| < \epsilon.$$

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ une suite numérique tel que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$, il existe alors $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_\epsilon$, $|u_n - \ell| < \epsilon/2$. Donc, pour $n, m \geq n_\epsilon$, $|u_n - u_m| \leq |u_n - \ell| + |u_m - \ell| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Ainsi ϵ est un majorant pour $E = \{|u_n - u_m|; n,\ m \geq n_\epsilon\}$, donc $\sup E < \epsilon$. $\square$

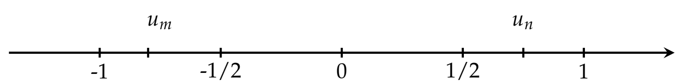
Ce théorème peut servir pour montrer qu'une suite n'est pas convergente.

Exemple 3. La suite de terme général $u_n = \cos n$ n'est pat convergente. En effet, nous allons montrer qu'il existe un $\epsilon > 0$, tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers $n, m \geq k$ tels que $|u_n - u_m| > \epsilon$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, et posons $n = [2k\pi]$. On a alors $n \leq 2k\pi < n+1$ et donc

$$2k\pi - \frac{\pi}{3} < 2k\pi - 1 < n \leq 2k\pi.$$

De même, pour $m = [2k\pi + \pi]$, on a $2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} < 2k\pi - 1 < m \leq 2k\pi + \pi$. D'autre part, on sait que la fonction $x \mapsto \cos x$ est croissante sur $[2k\pi - \pi/2, 2k\pi]$, décroissante sur $[2k\pi + \pi/2, 2k\pi + \pi]$ et que

$$\cos(2k\pi - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}, \quad \cos(2k\pi) = 1, \quad \cos(2k\pi + \frac{2\pi}{3}) = \frac{-1}{2} \quad \text{et} \quad \cos(2k\pi + \pi) = -1. \text{ D'où}$$



$\frac{1}{2} < \cos(n) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(m) < \frac{-1}{2}$, et donc $|u_n - u_m| = |\cos(n) - \cos(m)| > 1$.

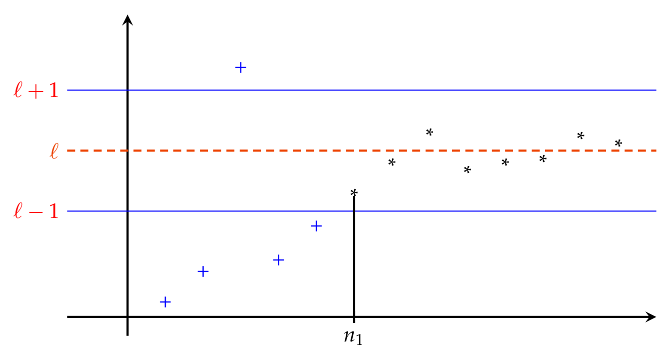
Définition 6. Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. On dit que c'est une suite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \sup_{n,m \geq n_\epsilon} |u_n - u_m| < \epsilon.$$

La réciproque du théorème précédent sera également démontrée un peu plus loin dans ce chapitre.

Théorème 2. Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ une suite numérique convergente et soit ℓ sa limite. Pour $\epsilon = 1$, il existe un entier $n = n_1$ tel que pour tout $n \geq n_1$ on ait $|u_n - \ell| < 1$. Cela implique que pour tout entier $n \geq n_1$, on a $-1 + \ell < u_n < 1 + \ell$. Et comme $-1 - |\ell| \leq -1 + \ell$ et $1 + \ell \leq 1 + |\ell|$, on déduit que pour tout $n \geq n_1$, $-1 - |\ell| \leq u_n \leq 1 + |\ell|$, d'où $\sup_{n \geq n_1} |u_n| < 1 + |\ell|$.



Cela montre que $M = \max\{1 + |\ell|, |u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_1}|\}$ est un majorant pour $\{ |u_n|, n \in \mathbb{N}\}$. □

Théorème 3.

1. Toute suite croissante et majorée est convergente.
2. Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démonstration. Soient $(u_n)_n$ une suite croissante et majorée et $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. En tant que partie majorée de $\mathbb{R}$, E admet une borne supérieure. Notons $\ell = \sup E$ et soit $\epsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure il existe un éléments de E, que nous notons u_{n_ϵ}, tel que $\ell - \epsilon < u_{n_\epsilon} \leq \ell$. Comme $(u_n)_n$ est croissante et puisque ℓ est un majorant de E, on a pour tout $n \geq n_\epsilon$, $\ell - \epsilon < u_{n_\epsilon} \leq u_n \leq \ell < \ell + \epsilon$. D'où, $\forall n \geq n_\epsilon$, $|u_n - \ell| < \epsilon$.

Utilisant un raisonnement similaire, on peut montrer que toute suite décroissante et minorée est convergente. □

Remarque 2.

- Une suite décroissante est soit convergente soit divergente vers $-\infty$.
- Une suite croissante est soit convergente soit divergente vers ∞.
- Une suite décroissante minorée converge vers sa borne inférieure.
- Une suite croissante majorée converge vers sa borne supérieure.

Exemple 4. La suite de terme général $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, avec $n \geq 1$, est convergente. Pour le prouver, il suffit de montrer que c'est une suite croissante et majorée.

— La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante :

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\,\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{n^k} \\
&= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\,(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n}) \qquad (*) \\
&\leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\,(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\ldots(1-\frac{k-1}{n+1}) \\
&\leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\,\frac{(n+1)((n+1)-1)((n+1)-2)\ldots((n+1)-(k-1))}{(n+1)^{k+1}} \\
&= 2 + \sum_{k=2}^{n} C_{n+1}^k \frac{1}{(n+1)^k} \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} C_{n+1}^k \frac{1}{(n+1)^k} + \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&\leq 2 + \sum_{k=2}^{n+1} C_{n+1}^k \frac{1}{(n+1)^k} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

— On a, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 4$. En effet, d'après (*), on a

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\,(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n}) \\
&\leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}. \qquad \text{En remarquant pour } k \geq 2,\ k! \geq 2^{k-1}, \text{ on a}
\end{aligned}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} < 4.$$

Exercice 1. Soient $a > 0$ et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \sqrt{u_{n-1}}$. Montrer que $(u_n)_n$ est convergente.

2.2.1 Opérations sur les limites

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques.

a) Si la suite $(u_n)_n$ admet une limite, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a \times u_n = a \times \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

b) Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes alors

b1- leur somme est une suite convergente et $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n + \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

b2- leur produit est une suite convergente et $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n \times v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \times \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

b3- Si $\lim\limits_{n\to\infty} v_n \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} u_n}{\lim_{n\to\infty} v_n}$.

b4- S'il existe $a > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\inf\limits_{n\geq n_0} u_n > a$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = \infty$.

c) Si $(v_n)_n$ est telle que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \infty$,

c1- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{v_n} = 0$.

c2- Si $(u_n)_n$ est minorée, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n + v_n = \infty$.

c3- S'il existe $a > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\inf\limits_{n\geq n_0} u_n > a$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \times v_n = \infty$.

Démonstration.

a) Si $a = 0$, le résultat est évident.

— Supposons que $a \neq 0$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe n_ϵ tel que $n \geq n_\epsilon \Longrightarrow |u_n - \ell| < \dfrac{\epsilon}{|a|}$. D'où, $n \geq n_\epsilon \Longrightarrow |a \times u_n - a \times \ell| < \epsilon$ et donc $a \times u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\ell$.

— Supposons que $a > 0$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$. Alors pour tout $A > 0$ il existe n_A tel que $n \geq n_A \Longrightarrow u_n > \dfrac{A}{a}$. D'où, $n \geq n_A \Longrightarrow a \times u_n > \infty$ et donc $a \times u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

— Les cas $a < 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$ peut être démontré de la même manière.

b) Posons $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \ell'$.

b1- Pour $\epsilon > 0$, il existe n_ϵ, n'_ϵ tels que $n \geq n_\epsilon \Longrightarrow |u_n - \ell| < \epsilon/2$ et $n \geq n'_\epsilon \Longrightarrow |u_n - \ell'| < \epsilon/2$. Pour $n \geq \max(n_\epsilon, n'_\epsilon) \Longrightarrow |(u_n - v_n) - (\ell - \ell')| < \epsilon$ car $|(u_n - v_n) - (\ell - \ell')| < |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|$.

b2- On sait que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \times v_n = \ell \times \ell' \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |u_n \times v_n - \ell \times \ell'| = 0$. D'autre part on a $|u_n \times v_n - \ell \times \ell'| \leq |u_n - \ell| \times |v_n| + |v_n - \ell'| \times |\ell|$, $|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $(|v_n|)_n$ est bornée, et $|v_n - \ell'| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On en déduit que $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} |u_n \times v_n - \ell \times \ell'| \leq \lim\limits_{n\to\infty} |u_n - \ell| \times |v_n| + \lim\limits_{n\to\infty} |v_n - \ell'| \times |\ell| = 0$

b3- Comme $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \ell' \neq 0$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ell'} v_n = 1$. Il existe donc n_1 tel que pour $n \geq n_1$ on ait $\left|\dfrac{v_n}{\ell'}\right| > \dfrac{1}{2}$. D'autre part, on a $v_n\Big(\dfrac{u_n}{v_n} - \dfrac{\ell}{\ell'}\Big) = u_n - \dfrac{\ell}{\ell'} v_n = (u_n - \ell) - \ell(\dfrac{v_n}{\ell'} - 1)$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} v_n\Big(\dfrac{u_n}{v_n} - \dfrac{\ell}{\ell'}\Big) = 0$. Donc, pour $\epsilon > 0$, il existe n_ϵ tel que pour $n \geq n_\epsilon$ on ait $|v_n|\Big|\dfrac{u_n}{v_n} - \dfrac{\ell}{\ell'}\Big| < \dfrac{\epsilon|\ell'|}{2}$. Ainsi pour $n \geq \max(n_1, n_\epsilon)$ on a $\Big|\dfrac{u_n}{v_n} - \dfrac{\ell}{\ell'}\Big| < \dfrac{\epsilon\,|\ell'|}{2|v_n|} < \epsilon$.

b4- Soit $A > 0$, il existe n_A tel que $n \geq n_A \Longrightarrow |u_n| < \dfrac{1}{A}$. Pour $n \geq \max(n_0, n_A)$ on a $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{|u_n|} > A$.

c) Supposons que $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

c1- Soit $\epsilon > 0$, il existe n_ϵ tel que $n \geq n_\epsilon \Longrightarrow v_n > \frac{1}{\epsilon}$. D'où pour $n \geq n_\epsilon$, on a $\frac{1}{v_n} = \frac{1}{|v_n|} < \epsilon$.

c2- La suite $(u_n)_n$ est minorée, donc il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$. D'autre part pour $A > 0$, il existe n_A tel que $n \geq n_A \Longrightarrow v_n > A + |m|$. Pour $n \geq n_A$, on a $v_n + u_n > A + |m| + m \geq A$.

c3- Soit $A > 0$, il existe n_A tel que pour $n \geq n_A$ on ait $v_n > \frac{A}{a}$. Ainsi pour $n \geq \max(n_0, n_A)$, $u_n \times v_n \geq a \times v_n > a\frac{A}{a} = A$.

□

Pour résumer les propriétés des opérations sur les limites, on retiendra que ces opérations sont possibles tant qu'elles ne conduisent pas à l'une des formes suivantes (appelées formes indéterminées)

$$(\bullet)\ 0 \times \infty, \qquad (\bullet)\ \infty - \infty, \qquad (\bullet)\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad (\bullet)\ \frac{0}{0}$$

Remarque 3. Face à une forme indéterminée, on cherche à lever l'indétermination afin de pouvoir calculer une limite. Voici quelques exemples illustrant de telles situations

1- Considérons les suites de termes généraux $u_n = \sqrt{n}$, $v_n = \sqrt{n+2}$ et $w_n = u_n - v_n$. Il est clair que $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \infty$ et donc $\lim_{n\to\infty} u_n - \lim_{n\to\infty} v_n$ est une forme indéterminée.
Pour lever l'indétermination, remarquons que $w_n = \frac{(u_n - v_n)(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = \frac{-2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}$. Sous cette forme on voit que $\lim_{n\to\infty} w_n = -2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} = 0$.

2- Considérons les suites de termes généraux $u_n = n^2 + 1$, $v_n = 3n^2 + n + 2$ et $w_n = \frac{u_n}{v_n}$. Il est clair que $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \infty$ et donc $\frac{\lim_{n\to\infty} u_n}{\lim_{n\to\infty} v_n}$ est une forme indéterminée.
En remarquons que $w_n = \frac{1 + 1/n^2}{3 + 1/n + 2/n^2} = \frac{u'_n}{v'_n}$ où $u'_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ et $v'_n = 3 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}$. Sous cette forme il n'y a plus d'indétermination puisque $\lim_{n\to\infty} u'_n = 1$ et $\lim_{n\to\infty} v'_n = 3$. On a alors $\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{1}{3}$.

La proposition suivante souligne les liens entre limites et inégalités des suites.

Proposition 4. Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ deux suites numériques.

a- Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent et si $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq v_n$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n$.

b- Si $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$ et $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq v_n$ alors $\lim_{n\to\infty} v_n = \infty$.

c- Si $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$ et $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow v_n \leq u_n$ alors $\lim_{n\to\infty} v_n = -\infty$.

d- Si $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} w_n = \ell \in \mathbb{R}$ et $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq v_n \leq w_n$ alors $\lim_{n\to\infty} v_n = \ell$.

Démonstration.

a- Supposons que $\ell' = \lim_{n\to\infty} v_n < \lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ et soit $\epsilon = \frac{\ell - \ell'}{2}$. Il existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_\epsilon$ on ait $u_n > \ell - \epsilon = \frac{\ell + \ell'}{2}$ et $v_n < \ell' + \epsilon = \frac{\ell + \ell'}{2}$. Ce qui est absurde car pour $n \geq \max(n_0, n_\epsilon)$ on a $u_n \leq v_n$.

d- Pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n - \ell \leq v_n - \ell \leq w_n - \ell$. D'autre part, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_\epsilon \Longrightarrow -\epsilon \leq u_n - \ell$ et $w_n - \ell < \epsilon$. Donc pour $n \geq \max(n_0, n_\epsilon)$ on a $|v_n - \ell| < \epsilon$.

□

Exercice 2. Démontrer les propriétés b-, et c- de la proposition.

Remarque 4. Après passage à la limite, une inégalité stricte peut devenir une inégalité large. L'exemple suivant illustre une telle situation :

Soit $(u_n)_n$ la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{n-5}{n^2+1}$. On a $n \geq 5 \Longrightarrow u_n > 1$ mais $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

Applications

Proposition 5. Soient $(u_n)_n$ une suite bornée et $(v_n)_n$ une suite qui converge vers 0. Alors la suite de terme général $w_n = u_n \times v_n$ est convergente et on a $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$.

Démonstration. Nous allons montrer que pour tout $\epsilon > 0, \exists\, n_\epsilon : n \geq n_\epsilon \Longrightarrow |u_n \times v_n| < \epsilon$.

Puisque $(u_n)_n$ est bornée, il existe $A > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| < A$. Soit $\epsilon > 0$, comme $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on sait qu'il existe un entier n_ϵ tel que $n \geq n_\epsilon \Longrightarrow |v_n| < \epsilon/A$. D'où

$$\forall n \geq n_\epsilon, |u_n \times v_n| \leq A\,|v_n| < A\epsilon/A = \epsilon.$$

□

Exercice 3. Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{\cos n}{\sqrt{n+1}}$ converge vers 0.

Proposition 6. Soient $(u_n)_n$ une suite numérique, $n_0 \in \mathbb{N}$ et a un réel tels que $n \geq n_0 \Longrightarrow u_n = a^n$.

1- Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$.

2- Si $|a| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

3- Si $a \leq -1$ alors la suite est divergente.

Démonstration.

1- Pour $a > 1$ il existe $x > 0$ tel que $a = 1 + x$ et donc $u_n = (1+x)^n > 1 + nx > nx$. Pour conclure il suffit de remarquer que $\lim\limits_{n\to\infty} nx = \infty$.

2- Si $a = 0$ la suite est stationnaire et le résultat est trivial. Supposons que $a \neq 0$ et que $|a| < 1$. Posons $b = \dfrac{1}{|a|}$ et $v_n = b^n$. D'après 1-, on a $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \infty$. D'où $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n} = 0$.

3- Si $a < -1$, alors $a^{2n} - a^{2n+1} = a^{2n}(1-a) = |a|^{2n}(1+|a|) > 1$. Donc la suite de terme général $u_n = a^n$ ne peut converger.

□

Corollaire 1. Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison r. Alors

1- Si $r > 1$ et $u_0 > 0$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$.

2- Si $r > 1$ et $u_0 < 0$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

3- Si $|r| < 1$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

4- Si $r < -1$ alors la suite $(u_n)_n)$ est divergente.

Exercice 4. Soient $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison r et $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ la somme de ses premiers termes. Démontrer que

1- Si $r > 1$ et $u_0 > 0$ alors $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

2- Si $r > 1$ et $u_0 < 0$ alors $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$.

3- Si $|r| < 1$ alors $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{u_0}{1-r}$.

4- Si $r < -1$ alors la suite $(S_n)_n)$ est divergente.

Les résultats ci-dessus s'appliquent aux suites dont le terme général u_n vérifie la propriété $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a \in \mathbb{R}$. Le théorème suivant est une extension de ces résultats.

Théorème 4. Soit $(u_n)_n$ une suite numérique telle que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. On a alors

$$|\ell| < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Démonstration. Rappelons que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |\ell|$. Donc pour $\epsilon = \dfrac{1-|\ell|}{2}$ il existe n_ϵ tel que $n \geq n_\epsilon \Longrightarrow \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \dfrac{1+|\ell|}{2} = a$. Ainsi pour tout entier $k \geq 1$, on a $|u_{n_\epsilon+k}| < |u_{n_\epsilon}| \times a^k$. Posons $v_0 = 0$ et pour tout entier $k \geq 1$, $v_k = a^k$. Comme $|a| < 1$, on a $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$. Et puisque $n \geq n_\epsilon \Longrightarrow |u_n| < \dfrac{|u_{n_\epsilon}|}{a^{n_\epsilon}} v_n$, on conclut que $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$. □

Exemple 5. Soit $a \in \mathbb{R}$, au chapitre précédent nous avons défini $u_n = \dfrac{[a\,10^n]}{10^n}$ comme étant l'approximation décimale de a par défaut à 10^{-n} près. Montrons que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$.

On a $[a\,10^n] \leq a\,10^n < a\,10^n + 1$, d'où $u_n \leq a < a + \dfrac{1}{10^n}$. Posons $v_n = \dfrac{1}{10^n}$, on a donc $0 \leq u_n - a < v_n$ et $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$. Cela implique que $\lim_{n\to\infty} u_n - a = 0$.

Exercice 5. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ la suite de terme général $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

2.2.2 Suites adjacentes

Définition 7. Deux suites numériques $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites adjacentes si

1- la suite $(u_n)_n$ est croissante et la suite $(v_n)_n$ est décroissante, et

2- la suite de terme général $w_n = v_n - u_n$ converge vers 0.

Proposition 7. Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite.

Démonstration. Comme $v_n - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il existe un entier n_0, tel que pour $n \geq n_0$ on ait $|v_n - u_n| < 1$. Écrivant $u_n = v_n + (v_n - u_n)$ et notant que $(v_n)_n$ est décroissante, on voit que pour $n \geq n_0$, on a $u_n < v_n + 1 \leq v_{n_0} + 1$. Donc la suite $(u_n)_n$ est majorée et puisqu'elle est croissante elle est convergente. De même, pour $n \geq n_0$, on a $v_n > u_n - 1 \geq u_{n_0} - 1$ et par conséquent la suite $(v_n)_n$ est convergente.

Puisque les suites convergent et sont adjacentes on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n - \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n - u_n = 0$. □

Corollaire 2. Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites adjacentes alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$.

Démonstration. La suite $(u_n)_n$ est croissante et converge vers ℓ, donc $\ell = \sup\limits_n u_n$. La suite $(v_n)_n$ est décroissante et converge vers ℓ, donc $\ell = \inf\limits_n v_n$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$. □

2.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

2.3.1 Suites extraites

Définition 8. Soient $(u_n)_n$ une suite numérique et $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante (c'est à dire $x < x' \Longrightarrow \phi(x) < \phi(x')$). La suite $(u_{\phi(k)})_{\phi(k)}$ est appelée "suite extraite" ou "sous-suite" de la suite $(u_n)_n$.

Exemple 6.

1- Soient $(u_n)_n$ la suite de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ et $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application définie par $\phi(k) = 2k$. La suite de terme général $u_{\phi(k)} = \dfrac{1}{\phi(k)+1} = \dfrac{1}{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, est une sous-suite de $(u_n)_n$.

2- Soient $(v_n)_n$ la suite de terme général $v_n = \sqrt{n}$ et $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application définie par $\phi(k) = [\ln(k+1)]$. La suite de terme général $v_{\phi(k)}$ est une sous-suite de $(u_n)_n$. Ses premiers termes sont $v_{\phi(0)} = \sqrt{\phi(0)} = \sqrt{[\ln(1)]} = 0$, $v_{\phi(1)} = \sqrt{\phi(1)} = \sqrt{[\ln(2)]} = 0$, $v_{\phi(2)} = \sqrt{\phi(2)} = \sqrt{[\ln(3)]} = 1, \ldots$

Remarque 5. Une sous-suite d'une suite $(u_n)_n$ est souvent notée $(u_{n_k})_{n_k}$.

Proposition 8. Si $(u_n)_n$ une suite numérique qui converge vers ℓ, alors toute sous-suite $(u_{n_k})_{n_k}$ converge vers ℓ.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, il existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_\epsilon \Longrightarrow |u_n - \ell| < \epsilon$. En particulier, on a $n_k \geq n_\epsilon \Longrightarrow |u_{n_k} - \ell| < \epsilon$. □

Corollaire 3.

- Si une suite numérique $(u_n)_n$ admet une sous-suite divergente, alors elle est divergente.
- Si une suite numérique $(u_n)_n$ admet deux sous-suites qui convergent vers deux limites différentes, alors elle est divergente.

Exemple 7.

La suite de terme général $u_n = \cos(n\pi)$ est divergente.

En effet, la sous-suite de terme général u_{2n} est stationnaire et converge vers 1 alors que la sous-suite de terme général u_{2n+1} converge vers -1.

Théorème 5. (Théorème de Bolzano-Weierstrass) Si une suite numérique $(u_n)_n$ bornée alors elle admet une sous-suite divergente.

Démonstration. Si $(u_n)_n$ est une suite dont les termes prennent un nombre fini de valeurs, le résultat est trivial.

Soit $(u_n)_n$ une suite bornée qui prend une infinité de valeurs différentes et a et b deux réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $a \leq u_n \leq b$. Posons $a_0 = \dfrac{a+b}{2}$. Alors au moins un des deux intervalles $[a, a_0]$ et $[a_0, b]$ contient une infinité de valeurs différentes de la suite $(u_n)_n$. Notons un tel intervalle $[a_1, b_1]$, u_{n_1} un terme de la suite $(u_n)_n$ qui appartient à $[a_1, b_1]$ et $a_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$. Alors au moins un des deux intervalles $[a_1, a_2]$ et $[a_2, b_1]$ contient une infinité de valeurs différentes de la suite $(u_n)_n$. Notons un tel intervalle $[a_2, b_2]$, u_{n_2} un terme de la suite $(u_n)_{n\geq n_1}$ qui appartient à $[a_2, b_2]$ et $a_3 = \dfrac{a_2+b_2}{2}$. Supposons construit l'intervalle $[a_k, b_k]$ ainsi que les termes $u_{n_1}, u_{n_2}, \dots, u_{n_k}$ et posons $a_{k+1} = \dfrac{a_k+b_k}{2}$. Alors au moins un des deux intervalles $[a_k, a_{k+1}]$ et $[a_{k+1}, b_k]$ contient une infinité de valeurs différentes de la suite $(u_n)_{n\geq n_k}$. Notons un tel intervalle $[a_{k+1}, b_{k+1}]$. Nous avons ainsi une suite décroissante d'intervalles $[a_k, b_k]$ et une sous-suite $(u_{n_k})_{n_k}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $u_{n_k} \in [a_k, b_k]$ et $b_k - a_k \leq \dfrac{b-1}{2^k}$. Ainsi les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes et par conséquent la sous-suite $(u_{n_k})_{n_k}$ est convergente. $\square$

Théorème 6. Une suite numérique $(u_n)_n$ converge si, et seulement si, toutes ses sous-suites convergent vers la même limite.

Démonstration.

$\boxed{\Longleftarrow}$ C'est évident puisque $(u_n)_n$ est une sous-suite particulière.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et soit $(u_{n_k})_{n_k}$ une sous-suite de $(u_n)_n$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_\epsilon$ on ait $|u_n - \ell| < \epsilon$. En particulier, pour tout $n_k \geq n_\epsilon$ on a $|u_{n_k} - \ell| < \epsilon$. Cela implique que $u_n \xrightarrow[n_k\to\infty]{} \ell$.

$\square$

Exemple 8. La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ n'est pas convergente car la sous-suite de terme général u_{2k} et la sous-suite de terme général u_{2k+1} ne convergent pas vers la même limite.

Exercice 6. Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. Montrer que

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \Longleftrightarrow \left[u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \text{ et } u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell.\right]$$

2.3.2 Suites de Cauchy

Proposition 9. Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. Si $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy alors elle est bornée.

Démonstration. Comme $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy, il existe un entier n_1 tel que pour $n, m \geq n_1$ on ait $|u_n - u_m| < 1$. En particulier, pour tout $n \geq n_1$, $|u_n - u_{n_1}| < 1$. Ce qui implique que pour tout $n \geq n_1$, $|u_n| < 1 + |u_{n_1}|$. D'où, pour tout entier n, on a $|u_n| \leq \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_1}|, 1 + |u_{n_1}|\}$. □

Théorème 7. [Critère de Cauchy]

Une suite numérique $(u_n)_n$ est convergente si, et seulement si, elle est de Cauchy.

Démonstration.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Cette implication a déjà été prouvée.

$\boxed{\Longleftarrow}$ D'après la proposition ci-dessus, $(u_n)_n$ est bornée et donc, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, admet une sous-suite convergente. Notons $(u_{n_k})_{n_k}$ cette sous-suite et ℓ sa limite. Montrons que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

Soit $\epsilon > 0$. Comme $(u_n)_n$ est de Cauchy il existe un entier n_ϵ tel que pour tout $n, m \geq n_\epsilon$ on ait $|u_n - u_m| < \dfrac{\epsilon}{2}$. D'autre part, puisque $u_{n_k} \xrightarrow[n_k\to\infty]{} \ell$, il existe un entier n'_ϵ tel que pour tout $n_k \geq n'_\epsilon$ on ait $|u_{n_k} - \ell| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Soit $n_k \geq n'_\epsilon$ un entier fixé. Pour $n \geq \max(n_\epsilon, n'_\epsilon)$ on a $|u_n - \ell| < |u_n - u_{n_k}| + |u_{n_k} - \ell| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$. □

2.4 Suites définies à partir d'une fonction

Dans ce paragraphe nous allons étudier les propriétés des suites dites récurrentes. Une suite récurrente $(u_n)_n$ est définie par la donnée d'un premier u_{n_0} terme et d'une relation liant u_n et u_{n+1} pour $n \geq n_0$. Une telle relation est souvent décrite par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ce qui ramène l'étude de $(u_n)_n$ à celle de la fonction f.

Exemple 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $u_n = f(u_{n-1})$. Ainsi, on a par exemple, $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1/2}{1+(1/2)^2}$.

Proposition 10. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $(u_n)_n$ une suite numérique telle que

$$\exists n_0,\ \forall n \geq n_0, u_{n+1} = f(u_n).$$

Si f est une fonction croissante (c'est à dire $x \leq x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x')$) alors

$$u_{n+1} \geq u_n,\ \forall n \geq n_0 \iff f(u_{n_0}) \geq u_{n_0}.$$

Démonstration.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Cette implication est triviale.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $f(u_{n_0}) \geq u_{n_0}$ alors $u_{n_0+1} \geq u_{n_0}$ et comme f est croissante on a $u_{n_0+2} = f(u_{n_0+1}) \geq f(u_{n_0}) = u_{n_0+1}$. Supposons que $u_n \geq u_{n-1}$, en appliquant la fonction f aux deux membres de cette inégalité on obtient $u_{n+1} = f(u_n) \geq f(u_{n-1}) = u_n$.

□

Exemple 10. Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $[0, \infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x+2}{x+3}$.

Montrons que la fonction f est croissante. Soient x et x' deux réels tels que $x \leq x'$. On a

$$f(x) - f(x') = \frac{(4x+2)(x'+3) - (4x'+2)(x+3)}{(x'+3)(x+3)} = \frac{12x + 2x' + 6 - 12x' - 2x - 6}{(x'+3)(x+3)} = \frac{10(x-x')}{(x'+3)(x+3)}.$$

Comme $(x'+3)(x+3) \geq 0$, on a bien $f(x) - f(x') \leq 0$.

D'autre part on a $f(u_0) = f(1) = \dfrac{4+2}{1+3} \geq 1 = u_0$ et donc la suite est croissante. Pour montrer que $(u_n)_n$ converge il suffit de montrer qu'elle est majorée. Cherchons un réel c tel que pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq c$.

Or on a $\dfrac{4x+2}{x+3} \leq c \iff (4-c)x \leq 3c - 2$, donc pour que l'inégalité soit vraie pour tout $x \geq 0$, il suffit que $c = 4$. On conclut donc que la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée par $c = 4$ donc convergente. Calculons sa limite ℓ.

D'après la propriété des limites des suites convergentes on a

$$\ell = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \frac{4 \lim\limits_{n\to\infty} u_n + 2}{\lim\limits_{n\to\infty} u_n + 3} = \frac{4\ell + 2}{\ell + 3}.$$

Donc ℓ est solution de l'équation $\ell^2 - \ell - 2 = 0$. Or cette équation admet deux solutions $\ell_1 = -1$ et $\ell_2 = 2$. Comme $\ell = \sup\limits_n u_n > 1$ on conclut que $\ell = 2$.

Exercice 7. Soit $f :]0, \infty[\to [1, \infty[$ la fonction définie par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$. Étudier la convergence de la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_n = f(u_{n-1}$, pour $n \geq 1$.