



Les 4 exercices sont indépendants. Justifiez toutes vos réponses. La qualité de présentation et de rédaction sera prise en compte.

**Exercice 1.** Soient  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ ,  $D_f$  son domaine de définition et  $A$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  défini par :  $A = \{x \in D_f : f(x) > x\}$ .

- 1- Déterminer  $D_f$ .
- 2- Montrer que  $A$  admet une borne supérieure (on ne cherchera pas à la déterminer).
- 3- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $f(x) > x$ .
- 4- Montrer que  $A$  n'admet pas de plus grand élément.

**Exercice 2.** Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $F(x) = a \sin x + 1$ , où  $a \in ]-1, 1[$  est une constante.

- 1- Montrer qu'il existe un réel  $x_0$  tel que  $F(x_0) = x_0$ .
- 2- Montrer qu'il existe  $\alpha \in ]0, 1[$ , tel que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}$  on a :  $|F(x) - F(y)| \leq \alpha|x - y|$ .

On considère la suite  $(x_n)_n$  définie par  $x_1 = 1$  et, pour tout  $n \geq 1$ ,  $x_{n+1} = F(x_n)$ .

- 3- Montrer que,  $\forall n \geq 1$ ,  $|x_{n+1} - x_0| \leq \alpha|x_n - x_0|$ .
- 4- En déduire que la suite  $(x_n)_n$  converge vers  $x_0$ .

**Exercice 3.** Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = \arcsin(\sqrt{x})$ .

- a) Déterminer le domaine de définition de  $g$ .
- b) Vérifier que  $g$  est dérivable dans  $]0, 1[$  et calculer sa dérivée dans  $]0, 1[$ .
- c) Montrer que pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,  $\frac{1}{2} \arccos(2x - 1) + \arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 4.** Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $h(x) = \frac{\cos x - 1}{x \cos x - \sin x}$ .

- a) Étudier l'existence de la limite en 0 de la fonction  $h$ .
- b) Est-il possible de prolonger  $h$  par continuité en 0?

**Exercice 5.** Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$ .

Bonne Chance

## Corrigé du CF\_Analyse1\_S1\_Automne2014

**Exercice 1 :** On a  $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ .

- 1- La fonction  $f$  est bien définie si et seulement si,  $x(1-x) \geq 0$ . Or  $x(1-x) \geq 0 \iff x \in [0, 1]$ . D'où  $D_f = [0, 1]$ .
- 2- On a  $f(\frac{1}{4}) = \sqrt{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{4})} = \frac{1}{4}\sqrt{3} > \frac{1}{4}$ . Donc  $A \neq \emptyset$ . De plus  $A \subset D_f$  est majorée par 1. En tant que partie de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée,  $A$  admet donc une borne supérieure.
- 3- On a 
$$\begin{cases} x \in [0, 1] \\ \sqrt{x(1-x)} > x \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [0, 1] \\ x(1-x) > x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [0, 1] \\ x(1-2x) > 0 \end{cases} \iff x \in ]0, \frac{1}{2}[.$$
- 4- D'après la question précédente, on a  $A = ]0, \frac{1}{2}[$ , donc  $\sup A = \frac{1}{2}$ . Si  $A$  avait un plus grand élément, il serait égal à  $\sup A = \frac{1}{2}$ . Or  $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ , d'où  $\frac{1}{2} \notin A$ . Donc  $A$  n'a pas de plus grand élément.

**Exercice 2 :**  $f(x) = a \sin x + 1$ , où  $a \in ]-1, 1[$ .

- 1- On considère la fonction  $g : x \mapsto a \sin x + 1 - x$ . C'est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et on a  $g(0) = 1 > 0$  et  $g(3) = a \sin 3 + 1 - 3 < 0$ . Donc par le théorème des valeurs intermédiaires,  $\exists x_0 \in ]1, 3[$  tel que  $g(x_0) = 0$ , c'est-à-dire  $f(x_0) = x_0$ .
- 2- La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc, en particulier, dérivable sur tout intervalle d'extrémités  $x$  et  $y$ . Donc  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , on a par le théorème des accroissements finis,

$$\text{il existe } c \text{ compris entre } x \text{ et } y \text{ tel que : } f(x) - f(y) = (x - y) \times f'(c) = (x - y) \times a \cos(c).$$

Et comme  $\sup_{c \in \mathbb{R}} |a \cos(c)| \leq |a|$ , on a :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| = |a \cos(c)| \leq \alpha |x - y|, \quad \text{avec } \alpha = |a|.$$

- 3- Pour tout  $n \geq 1$  on a, d'après l'inégalité précédente,  $|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_0)| \leq \alpha |x_n - x_0|$ .
- 4- En appliquant successivement l'inégalité qu'on vient d'établir, on a :

$$|x_n - x_0| \leq \alpha |x_{n-1} - x_0| \leq \alpha^2 |x_{n-2} - x_0| \leq \dots \leq \alpha^{n-1} |x_1 - x_0|.$$

D'où  $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0| \leq |x_1 - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{n-1}$ . Comme  $\alpha \in ]0, 1[$ , on conclut que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0| = 0$  ce qui est équivalent à  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$

**Exercice 3 :** On a  $g(x) = \arcsin(\sqrt{x})$ .

- a) La fonction  $g$  est bien définie si, et seulement si,  $x \geq 0$  et  $\sqrt{x} \in [-1, 1]$ . On en déduit que  $D_g = [0, 1]$ .
- b) La fonction  $g$  est la composée de deux fonctions dérivables sur  $]0, 1[$  donc elle est dérivable sur  $]0, 1[$  et on a :

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad g'(x) = (\sqrt{x})' \times (\arcsin)'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}.$$

- c) Posons  $h(x) = \frac{1}{2} \arccos(2x - 1) + \arcsin(\sqrt{x})$ , pour  $x \in ]0, 1[$ . Cette fonction est bien définie et est dérivable. Pour montrer qu'elle est constante sur  $]0, 1[$ , il suffit de montrer que sa dérivée est partout nulle. On a

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{1}{2} \arccos(2x - 1)\right)' + \left(\arcsin(\sqrt{x})\right)' \\ &= \frac{1}{2} \times (2x - 1)' \times (\arccos)'(2x - 1) + (\sqrt{x})' \times (\arcsin)'(\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{-1}{\sqrt{1 - (2x - 1)^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} = \frac{-1}{\sqrt{4x(1-x)}} + \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in ]0, 1[, \quad h(x) = h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \arccos 0 + \arcsin \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

**Exercice 4 :** Posons  $f(x) = \cos x - 1$  et  $g(x) = x \cos x - \sin x$ . Ces deux fonctions sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  (et donc en particulier au voisinage de 0) et on a  $f(0) = g(0) = 0$ . En appliquant la règle de l'Hospital on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x - x \sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{x \sin x} = -\infty.$$

De la même manière on obtient que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ . On en conclut que la fonction  $h$  n'admet pas de limite en 0.

Elle n'admet donc pas de prolongement par continuité en 0.

**Exercice 5 :** Remarquons que  $x \ln \frac{1+x}{x} = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$ . En posant  $u = \frac{1}{x}$  on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{1+x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u) - \ln(1+0)}{u - 0} = (\ln(1+x))' \Big|_{x=0} = 1.$$