

Exercice 1. [2 pts] Soit A et B deux parties de \mathbb{R} non vides majorées.

Montrer que $A + B = \{a + b : (a, b) \in A \times B\}$ est majorée et que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

Exercice 2. [5 pts] Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus [-2, -1]$ par $f(x) = (x^2 + x + 1) \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$

- Donner le développement asymptotique au voisinage de l'infini de la fonction f de la forme:
 $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
- En déduire les équations des asymptôtes au graphe à l'infini (en $+\infty$ et en $-\infty$) et la position de la courbe par rapport à ces asymptôtes.
- Donner le développement limité de la fonction f en 0 à l'ordre 2
- En déduire l'équation de la tangente de f au point 0 et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Exercice 3. [3 pts] Soit $(u_n)_n$ la suite définie par la donnée de $u_0 \geq 0$ et la relation $u_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(u_n)^2$.

Etudier la nature de la suite $(u_n)_n$ selon les valeurs de u_0

Exercice 4. [2 pts] Calculer la limite suivante:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(\arcsin(x))^2 - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2 - 1}$$

Exercice 5. [4 pts] Soient I un intervalle ouvert et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable sur I . Soient a et b deux nombres réels appartenants à I et tels que $a < b$.

Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}(f'(a) + f'(x)) + K(x-a)^3$$

où K est le nombre réel tel que $g(b) = 0$

- Montrer que g est deux fois dérivable sur I ; et Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in I$.
- Montrer qu'il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$
- Montrer qu'il existe un nombre $\theta \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f'''(\theta)$$

Exercice 6. [6 pts] Soit $h : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $h(x) = -x - x^2 + \sin(x^2)$.

a) Montrer que h induit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $] -\infty, 0]$. Notons h^{-1} la fonction réciproque de la fonction h .

b) Soit f l'application définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \geq 0 \\ h^{-1}(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

i) Montrer que $f \circ f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

ii) Montrer que f est strictement décroissante.

iii) Montrer que f est continue en 0.

iv) Montrer que f est dérivable en 0.

v) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .