Université Mohammed V.
Faculté des sciences - Rabat
Département de Mathématiques.

Année 2020-2021.

Série N 1 - Corrigé
Analyse 1 - Filière SMIA.

Exercice 1. *1. a)* $1^{ère}$***Méthode*** *: Par l'absurde, supposons que $x+r \in \mathbb{Q}$, alors il existe p, q dans $\mathbb{Z}$ ($q \neq 0$) tels que :*

$$x + r = \frac{p}{q}.$$

Puisque $r = \frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q}$ ($q' \neq 0$), on a $x = \frac{pq'-p'q}{qq'} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde car $x \notin \mathbb{Q}$.

$2^{ième}$***Méthode*** *: Soit $r \in \mathbb{Q}$. Si $x+r \in \mathbb{Q}$, alors $x = (x+r) - r \in \mathbb{Q}$ (car $\mathbb{Q}$ est stable par soustraction.) Comme $x \notin \mathbb{Q}$ et par le raisonnement par contraposé $x + r \notin \mathbb{Q}$.*

b) $1^{ère}$***Méthode*** *: Par l'absurde, supposons que $rx \in \mathbb{Q}$, alors il existe deux entiers p et q dans (avec $q \neq 0$) tels que :*

$$rx = \frac{p}{q}.$$

Puisque $r = \frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q}$ (avec p', q' deux entiers non nuls, car $r \neq 0$), $x = \frac{pq'}{p'q} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde car $x \notin \mathbb{Q}$.

$2^{ième}$***Méthode*** *: Soit $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Si $rx \in \mathbb{Q}$, alors $x = \frac{rx}{r} \in \mathbb{Q}$ (car $\mathbb{Q}$ est stable par division). Comme $x \notin \mathbb{Q}$ et par le raisonnement par contraposé $rx \notin \mathbb{Q}$*

2. $1^{ère}$***Méthode*** *: Supposons, par l'absurde, que $x \in \mathbb{Q}$, alors il existe deux entiers p, q (avec $q \neq 0$) tels que :*

$$x = \frac{p}{q}.$$

Donc, $\frac{\sqrt{2}}{2}(r'-r) = \frac{p}{q}$. Puisque r et r' sont deux rationnels, alors

$$r' - r = \frac{p'}{q'} \neq 0,$$

donc $\sqrt{2} = 2\frac{pq'}{qp'} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (Démonstration : Voir cours).
D'où : $x \notin \mathbb{Q}$.

$2^{ième}$***Méthode*** *: Soient $r, r' \in \mathbb{Q}$ avec $r < r'$. On a donc $\frac{r'-r}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et d'après 1.b), On déduit que $\frac{\sqrt{2}}{2}(r - r') \notin \mathbb{Q}$.*

3. Notons $y = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r'-r)$. Donc $y \in]r, r'[$ car $y = \frac{\sqrt{2}}{2}r' + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})r$ et $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.
Puisque $r \in \mathbb{Q}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}(r'-r) \notin \mathbb{Q}$ alors $y \notin \mathbb{Q}$.
Conclusion : Entre deux rationnels distincts il y a au moins un irrationnel

Université Mohammed V.
Faculté des sciences - Rabat
Département de Mathématiques.

Année 2020-2021.

Série N 1 - Corrigé
Analyse 1 - Filière SMIA.

Exercice 2

1. Soient $a > 0$ et $b \geq 0$. Si $a \geq b$, alors $2a > b$ et donc $2 \in S$, ce qui implique que S est non vide. Si $a < b$, alors d'après la propriété d'Archimède il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $na > b$. D'où il existe un entier n tel que $n \in S$, *i.e.* S est non vide. Comme S est une partie de $\mathbb{N}$ et chaque partie non vide de $\mathbb{N}$ admet le plus petit élément, on déduit que S admet le plus petit élément que l'on note p.
2. Par l'absurde, supposons que $r \geq a$, alors
$$b - (p-1)a \geq a,$$
donc $b \geq p\,a$ ainsi $p \notin S$. Ce qui est absurde car p est le plus petit élément.
3. Soit $x > 0$ et $y \geq 0$. D'après la question 2), il existe $r < x$ tel que
$$r = y - (p-1)x,$$
avec p est le plus petit élément de $\{n \in \mathbb{N} : nx > y\}$.
Si on pose $q = p - 1 \in \mathbb{N}$, on déduit que pour tout $x > 0$, pour tout $y \geq 0$, il existe un couple $(q, r) \in \mathbb{N} \times [0, x[$, tel que : $y = qx + r$.
Unicité : Supposons que :
$$y = q_1 x + r_1, \text{ avec } 0 \leq r_1 < x$$
$$y = q_2 x + r_2, \text{ avec } 0 \leq r_2 < x.$$
On a : $(q_1 - q_2)\,x = (r_2 - r_1)$. Or $-x < r_2 - r_1 < x$, alors $-x < (q_1 - q_2)\,x < x$.
Il en résulte que :
$$0 \leq |q_1 - q_2|\,x < x,$$
et donc
$$0 \leq |q_1 - q_2| < 1.$$
Finalement, $|q_1 - q_2| = 0$. D'où : $q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2$.

Université Mohammed V. Année 2020-2021.
Faculté des sciences - Rabat
Département de Mathématiques.

Série N 1 - Corrigé
Analyse 1 - Filière SMIA.

Exercice 3

1. — Les majorants de $[1,2]\cap\mathbb{Q}$ sont $[2,+\infty[$.
   — $\sup([1,2]\cap\mathbb{Q})=2$, car par définition de la borne supérieure ; c'est le plus petit de $[2,+\infty[$ qui est 2.
   — $\max([1,2]\cap\mathbb{Q})=2$, car 2 est le plus petit des majorants de $[1,2]\cap\mathbb{Q}$ et $2\in[1,2]\cap\mathbb{Q}$.
2. — Les majorants de $[1,2[\cap\mathbb{Q}$ sont $[2,+\infty[$.
   — $\sup([1,2[\cap\mathbb{Q})=2$, car 2 est le plus petit de $[2,+\infty[$.
   — $[1,2[\cap\mathbb{Q}$ n'admet pas de plus grand élément, car $2=\sup([1,2[\cap\mathbb{Q})\notin[1,2[\cap\mathbb{Q}$.
3. — Les minorants de $[1,2]\cap\mathbb{Q}$ sont $]-\infty,1]$.
   — $\inf([1,2]\cap\mathbb{Q})=1$, car par définition de la borne inférieure ; c'est le plus grand de $]-\infty,1]$ qui est 1.
   — $\min([1,2]\cap\mathbb{Q})=1$, car 1 est le plus grand des minorants de $[1,2]\cap\mathbb{Q}$ et $1\in[1,2]\cap\mathbb{Q}$.
4. — Les minorants, la borne supérieure et le plus petit élément de $[1,2[\cap\mathbb{Q}$ sont de même que (3.).
5. — L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majorée, donc $\mathbb{N}$ n'admet ni la borne supérieure, ni le plus grand élément.
   — Les minorants de $\mathbb{N}$ sont $]-\infty,0]$.
   — $\inf(\mathbb{N})=0$, car 0 est le plus grand de $]-\infty,0]$.
   — $\min(\mathbb{N})=0$, car 0 est le plus grand de $]-\infty,0]$ et $0\in\mathbb{N}$.
6. — Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned}
X &:= \left\{(-1)^n+\frac{1}{n+1}:\ n\in\mathbb{N}\right\}\\
&= \left\{(-1)^n+\frac{1}{n+1}:\ n \text{ pair}\right\}\cup\left\{(-1)^n+\frac{1}{n+1}:\ n \text{ impair}\right\}\\
&= \left\{1+\frac{1}{2k+1}:\ k\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{-1+\frac{1}{2k+2}:\ k\in\mathbb{N}\right\}\\
&:= X_1\cup X_2.
\end{aligned}$$

   — Les majorants de X_1 sont $[2,+\infty[$.
   — $\sup(X_1)=2$, comme $2=1+\frac{1}{0+1}\in X_1$; $\max(X_1)=2$.
   — $\inf(X_1)=1$, en effet ; (i) $1\le 1+\frac{1}{2k+1}$, pour chaque $k\in\mathbb{N}$. (ii) soit $\epsilon>0$, d'après la propriété d'Archimède, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\epsilon>1$, d'où $(2k+1)\epsilon>k\epsilon>1$, d'où $\frac{1}{2k+1}<\epsilon$, donc $1+\frac{1}{2k+1}<1+\epsilon$. On en déduit :

$$\left(\forall\epsilon>0,\ \exists k\in\mathbb{N},\ \ 1+\frac{1}{2k+1}<1+\epsilon.\right)$$

   C'est-à-dire :

$$\left(\forall\epsilon>0,\exists x\left(=1+\frac{1}{2k+1}\right)\in X_1,\ \ x<1+\epsilon.\right)$$

   De (i) et (ii) et d'après la propriété de la borne inférieure, on déduit que $1=\inf(X_1)$.
   — Les majorants de X_2 sont $[-\frac{1}{2},+\infty[$.
   — $\sup(X_2)=-\frac{1}{2}$, comme $-\frac{1}{2}=-1+\frac{1}{2\times 0+2}\in X_2$; $\max(X_2)=-\frac{1}{2}$.
   — $\inf(X_2)=-1$, en effet ; (i) $-1\le -1+\frac{1}{2k+2}$, pour chaque $k\in\mathbb{N}$. (ii) Soit $\epsilon>0$, d'après la propriété d'Archimède, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\epsilon>1$, d'où $(2k+2)\epsilon>k\epsilon>1$, donc $\frac{1}{2k+2}<\epsilon$, d'où $-1+\frac{1}{2k+2}<-1+\epsilon$. On en déduit :

$$\left(\forall\epsilon>0,\exists k\in\mathbb{N}\ \ -1+\frac{1}{2k+2}<-1+\epsilon.\right)$$

C'est-à-dire :
$$\left(\forall \epsilon > 0, \exists x \left(= -1 + \frac{1}{2k+2}\right) \in X_2,\ \ x < -1 + \epsilon.\right)$$
De (i) et (ii) et d'après la propriété de la borne inférieure, on obtient $-1 = \inf(X_2)$.

— On a
$$\begin{array}{rcl} \sup(X) & = & \max(\sup(X_1), \sup(X_2)) \\ & = & \max(2, -\frac{1}{2}) \\ & = & 2, \end{array}$$
comme $2 \in X_1 \subset X$, $2 = \max(X)$. D'autre part, on a :
$$\begin{array}{rcl} \inf(X) & = & \min\left(\inf(X_1), \inf(X_2)\right) \\ & = & \min(1, -1) \\ & = & -1. \end{array}$$
Or, $-1 \notin X$, donc X n'admet pas de plus petit élément.

— Les majorants de X sont $[2, +\infty[$.

— Les minorants de X sont $]-\infty, -1]$.

Université Mohammed V.
Faculté des sciences - Rabat
Département de Mathématiques.

Année 2020-2021.

Série N 1 - Corrigé
Analyse 1 - Filière SMIA.

Exercice 4

1. Soit $x = 0,22...$, donc $10x = 2,22...$, d'où $9x = 10x - x = 2$, il resulte que $x = \frac{2}{9} \in A$, comme $a \leq \frac{2}{9}$, pour chaque $a \in A$, on déduit que $\sup(A) = \frac{2}{9}$. On a aussi $0,2 \in A$ et $0,2 \leq a$ pour chaque $a \in A$, donc $\inf(A) = 0,2$.
2. On a
$$B = \left\{ \frac{k}{10^n} : \; k \in 0,1 \; n \in \mathbb{N} \right\}.$$
D'une part, on a $0 \in B$ et $0 \leq \frac{1}{10^n}$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Donc $\inf(B) = 0$. D'autre part $1 = \frac{1}{10^0} \in B$ et $\frac{1}{10^n} \leq 1$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Ce qui implique $\sup(B) = 1$.

Solution de l'exercice 5

Pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$, on a $x \leq \sup A$ et $y \leq \sup B$ d'où $x + y \leq \sup A + \sup B$. Donc $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.

Soit $\epsilon > 0$, il existe $x_\epsilon \in A$ et $y_\epsilon \in B$, tels que $\sup A - \frac{\epsilon}{2} < x_\epsilon \leq \sup A$ et $\sup B - \frac{\epsilon}{2} < y_\epsilon \leq \sup B$.

On en déduit que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x_\epsilon \in A$ et $y_\epsilon \in B$, tels que

$$\sup A + \sup B - \epsilon < x_\epsilon + y_\epsilon \leq \sup A + \sup B.$$

Conclusion, $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Université Mohammed V.
Faculté des sciences - Rabat
Département de Mathématiques.

Année 2020-2021.

Série N 1 - Corrigé
Analyse 1 - Filière SMIA.

Exercice 6

1. Tout d'abord, on a $n < n+m$ pour chaque $(n, m \in \mathbb{N}^*)$, d'où : $0 < \frac{n}{n+m} < 1$, pour chaque $(n, m \in \mathbb{N}^*)$, d'où la partie A est majorée par 1 et minorée par 0. Ce qui implique que elle admet la borne supérieure et la borne inférieure avec
$$\sup(A) \quad \leq \quad 1 \tag{1}$$
et
$$\inf(A) \quad \geq \quad 0 \tag{2}$$
Pour montrer que $\sup(A) = 1$, on considère l'ensemble $A_0 := \{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, on a $A_0 \subset A$, donc
$$\sup(A_0) \quad \leq \quad \sup(A). \tag{3}$$
Or, on écrit la partie A_0 comme suit
$$A_0 = \{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$$
D'où $\sup(A_0) = 1$, car (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$. (ii) Soit $\epsilon > 0$, d'après la propriété d'Archimède il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\epsilon > 1$, d'où $(n+1)\epsilon > n\epsilon > 1$, donc $\frac{1}{n+1} < \epsilon$, donc $1-\epsilon < 1-\frac{1}{n+1}$. On en déduit que
$$\left(\forall \epsilon > 0, \exists x (= 1 - \frac{1}{n+1}) \in A_0, \quad 1 - \epsilon < x\right)$$
D'après la propriété fondamentale de la borne supérieure on a $\sup(A_0) = 1$, de (3), on a $1 \leq \sup(A)$, et de (1), on obtient $\sup(A) = 1$.

   Deuxièment, pour montrer que $\inf(A) = 0$, on considère $A_1 = \{\frac{1}{1+m} : m \in \mathbb{N}\}$, on a $A_1 \subset A$, donc
$$\inf(A) \leq \inf(A_1) \tag{4}$$
Or, $\inf(A_1) = 0$, en effet ; (i) pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{m+1} \geq 0$. (ii) Soit $\epsilon > 0$, d'après la propriété d'Archimède, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m\epsilon > 1$, donc $(m+1)\epsilon > m\epsilon > 1$, d'où $\frac{1}{m+1} \leq \epsilon = 0 + \epsilon$. On en déduit que
$$\left(\forall \epsilon > 0, \exists y (= \frac{1}{m+1}) \in A_1 \quad y \leq 0 + \epsilon\right)$$
D'après la propriété fondamentale de la borne inférieure on a $\inf(A_1) = 0$. De (4), on a $\inf(A) \leq 0$, et de (2) on a $\inf(A) = 0$.

2. On considère la sous-partie de B suivante $B_0 = \{n + \frac{4}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, d'où si B est majorée ; alors B_0 l'est aussi. Mais B_0 n'est pas majorée (car si l'on suppose que B_0 est majorée par $M \in \mathbb{R}^+$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n < n + \frac{4}{n} \leq M$, d'où M est un majorant de $\mathbb{N}$ ce qui est absurde.), ainsi B n'est pas majorée. Ce qui implique que B n'admet pas de borne supérieure.
   Deuxièment, on a $\frac{n}{m} + \frac{4n}{m} > 2\sqrt{\frac{n}{m} \times \frac{4m}{n}} = 4$. D'où B est minorée par 4, donc la partie B admet la borne inférieure. Or $4 = \frac{2}{1} + \frac{4 \times 1}{2} \in B$, ce qui implique que $\inf(B) = 4$.

Exercice 7 Montrons que $x = 310.712\ 3256\ 3256 \ldots 3256 \cdots \in \mathbb{Q}$.

Réponse Il faut montrer que x peut s'écrire sous la forme $\dfrac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

En effet,

$$10^3 \times x = 310712.\ 3256\ 3256 \ldots 3256 \ldots$$

et

$$10^7 \times x = 3107123256.\ 3256\ 3256 \ldots 3256 \ldots.$$

D'où,

$$10^7 \times x - 10^3 \times x = 3107123256 - 310712.$$

Donc,

$$x = \frac{3107123256 - 310712}{10^7 - 10^3} \in \mathbb{Q}. \quad \textbf{CQFD}$$

Exercice 8 $A \subset \mathbb{R}$. A est une partie non vide et minorée, donc $inf(A)$ existe.

On a :
$$\forall x \in A, inf(A) \leq x.$$
Puisque $B \subset A$, alors
$$\forall y \in B, inf(A) \leq y.$$
D'où, $inf(A)$ est un minorant de B. Puisque $inf(B)$ est le plus grand des minorants de B, alors
$$inf(A) \leq inf(B). \quad \textbf{CQFD}$$

Université Mohammed V.
Faculté des sciences - Rabat
Département de Mathématiques.

Année 2020-2021.

Série N 1 - Corrigé
Analyse 1 - Filière SMIA.

Exercice 9

1. La partie A est non vide, car on a $1 < \frac{4}{3}$ et $\frac{16}{9} < 2$, d'où $\frac{4}{3} \in A$. Comme chaque $x \in A$ on a $x^2 < 2$, on aura $x < \sqrt{2} < 2$, d'où A est majorée par $2 \in \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$.
2. Soit $r \in A$, donc $1 < r$, d'où $2 - r^2 < 3 < 2r + 1$, d'après la propriété d'Archimède il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$n(2 - r^2) \quad > \quad 2r + 1. \tag{1}$$
Deuxièment, on a d'une part $1 < r < r + \frac{1}{n}$, d'autre part on a
$$\left(r + \frac{1}{n}\right)^2 = r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} \leq r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n} \quad \text{(car on a} \quad n^2 \geq n).$$
Or, d'après (1), on a :
$$2 - r^2 > \frac{2r}{n} + \frac{1}{n} \Longrightarrow \frac{2r}{n} + \frac{1}{n} + r^2 < 2.$$
Ce qui implique que
$$\left(r + \frac{1}{n}\right)^2 < 2.$$
On en déduit que
$$r' = r + \frac{1}{n} \in A.$$
3. Montrons par l'absurde que $M > \sqrt{2}$. Supposons que $M \leq \sqrt{2}$. Comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $M < \sqrt{2}$, par suite $M \in A$, d'où $\max(A) = M$. Mais d'après la question 2), on a $M + \frac{1}{n} \in A$, ce qui est absurde avec $\max(A) = M$.
4. L'ensemble A est majorée par $\sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$, donc $\sup A \leq \sqrt{2}$. Si l'on suppose que $\sup A \in \mathbb{Q}$ d'après 3) on déduit que $\sup A > \sqrt{2}$ ce qui est absurde. D'où $\sup A \notin \mathbb{Q}$.

Université Mohammed V.
Faculté des sciences - Rabat
Département de Mathématiques.

Année 2020-2021.

Série N 1 - Corrigé
Analyse 1 - Filière SMIA.

Exercice 10
La contraposée de l'implication est

$$a > b \Longrightarrow (\exists \epsilon > 0,\ a \geq b + \epsilon)\,.$$

Nous allons donc montrer cette propriété. Supposons que $a > b$, donc $a - b > 0$ et pour $\epsilon = a - b$, on a bien

$$a \geq b + \epsilon = a.$$

On a donc un exemple $\epsilon > 0$ tel que $a \geq b + \epsilon$. La contraposée de l'implication est ainsi démontrée.

Deuxièment, la réciproque de l'implication est

$$a \leq b \Longrightarrow (\forall \epsilon > 0,\ \ a < b + \epsilon).$$

Supposons que $a \leq b$, pour tout $\epsilon > 0$, $b < b + \epsilon$ et donc $a < b + \epsilon$.

Université Mohammed V.
Faculté des sciences - Rabat
Département de Mathématiques.

Année 2020-2021.

Série N 1 - Corrigé
Analyse 1 - Filière SMIA.

Exercice 11

1. D'une part, on a pour chaque $z \in A.B$, $z = xy$ où $x \in A$ et $y \in B$. D'où $z \leq \sup A \sup B$. Donc $\sup(A.B) \leq \sup A \sup B$. D'autre part, on note $\alpha = \sup A$ et $\beta = \sup B$, d'après la propriété de la borne supérieure, pour chaque $\epsilon > 0$ il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $\alpha - \frac{\epsilon}{\alpha+\beta} < a$ et $\beta - \frac{\epsilon}{\alpha+\beta} < b$. On a $\alpha - \frac{\epsilon}{\alpha+\beta} > 0$ (car sinon on trouve $\alpha(\alpha+\beta) \leq \epsilon$, de l'exercice 10. on obtient $\alpha = 0$, celà implique que chaque élément de A est nul, ce qui est absurde), de même $\beta - \frac{\epsilon}{\alpha+\beta} > 0$. Par suite $\alpha\beta - \frac{\epsilon}{\alpha+\beta}\left(\alpha+\beta-\frac{\epsilon}{\alpha+\beta}\right) = \left(\alpha - \frac{\epsilon}{\alpha+\beta}\right)\left(\beta - \frac{\epsilon}{\alpha+\beta}\right) < ab$. Or on a $ab \leq \sup(A.B)$. D'où :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \alpha\beta - \frac{\epsilon}{\alpha+\beta}\left(\alpha+\beta-\frac{\epsilon}{\alpha+\beta}\right) < \sup(A.B).$$

C'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \alpha\beta < \sup(A.B) + \frac{\epsilon}{\alpha+\beta}\left(\alpha+\beta-\frac{\epsilon}{\alpha+\beta}\right) = \sup(A.B) + \left(\epsilon - \frac{\epsilon^2}{(\alpha+\beta)^2}\right) < \sup(A.B) + \epsilon.$$

D'où

$$\forall \epsilon > 0, \quad \alpha\beta < \sup(A.B) + \epsilon.$$

De l'exercice 10., on obtient

$$\sup(A)\sup(B) = \alpha\beta \leq \sup(A.B).$$

On en déduit que

$$\sup(A.B) = \sup A \sup B.$$

2. D'une part, on a pour $z \in \frac{1}{A}$, $z = \frac{1}{x}$ où $x \in A$, donc $x \geq \inf A$, ce qui entraine $z = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\inf A}$. D'où $\sup \frac{1}{A} \leq \frac{1}{\inf A}$. D'autre part, on note $\alpha = \inf A$ et $\gamma = \sup \frac{1}{A}$, d'après la propriété de la borne inférieure, pour chaque $\epsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que $a < \alpha + \frac{\epsilon}{\gamma}$, donc $\frac{1}{\alpha+\frac{\epsilon}{\gamma}} < \frac{1}{a}$. Or on a $\frac{1}{a} \leq \sup \frac{1}{A} = \gamma$, d'où :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \frac{1}{\alpha + \frac{\epsilon}{\gamma}} < \gamma$$

Puisque A est un ensemble de réels strictement positifs, on a $\gamma = \sup \frac{1}{A} > 0$, par suite $\alpha + \frac{\epsilon}{\gamma} > 0$, d'où

$$\forall \epsilon > 0, \quad 1 < (\alpha + \frac{\epsilon}{\gamma})\gamma = \alpha \sup \frac{1}{A} + \epsilon.$$

De l'exercice 10., on obtient

$$1 \leq \alpha \sup \frac{1}{A}.$$

C'est-à-dire

$$\frac{1}{\inf A} = \frac{1}{\alpha} \leq \sup \frac{1}{A}.$$

On en déduit que $\sup \frac{1}{A} = \frac{1}{\inf A}$.

Exercice 12 Soient $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour tout $k \in [|0, n|]$, le nombre $\alpha_k = k\alpha - [k\alpha] \in [0, 1[$. De plus, on a :

$$[0,1[= \left[0, \frac{1}{n}\right[\cup \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[\dots \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right[.$$

D'où, l'intervalle $[0, 1[$ est la réunion de n intervalles de longueurs $\frac{1}{n}$.

L'ensemble

$$A = \{\alpha_k = k\alpha - [k\alpha], k \in [|0, n|]\}$$

contient $n + 1$ points et $A \subset [0, 1[$. Donc, il y a au moins 2 points de A qui appartiennent à un même intervalle de longueur $\frac{1}{n}$, soit par exemple α_i et α_j ces deux points, où $i, j \in [|0, n||]$. Donc,

$$|\alpha_j - \alpha_i| < \frac{1}{n}.$$

2. Sans perte de généralité, on peut supposer que $i < j$. D'où en remplaçant α_i et α_j par leur expression respective on obtient

$$|\alpha_j - \alpha_i| = |(j\alpha - [j\alpha]) - (i\alpha - [i\alpha])| < \frac{1}{n},$$

soit

$$\left|\alpha - \frac{[j\alpha] - [i\alpha]}{j - i}\right| < \frac{1}{n(j - i)}.$$

On pose : $q_n = j - i$ et $p_n = [j\alpha] - [i\alpha]$. Alors, $q_n \in \mathbb{N}^*$ et $p_n \in \mathbb{N}$. De plus, $q_n = j - i \leq n$, d'où

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{nq_n}.$$