Systèmes linéaires-Méthode du pivot

Cours d'algèbre 3-Filière : SMIA

Hanine Abdelouahab

Université Mohammed 5.
Faculté des sciences
Département de Mathématiques-Rabat.

31 mars 2021

Introduction

- L'équation d'une droite dans le plan (Oxy) s'écrit

$$ax + by = e$$

  où a, b et e sont des constantes réelles
- Cette équation s'appelle équation linéaire dans les variables (ou inconnues) x et y
- Intersection de deux droites D_1 et D_2
- Un point (x, y) est dans l'intersection $D_1 \cap D_2$ s'il est solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} ax + by & = & e \\ cx + dy & = & f \end{array} \right. \qquad (S)$$

Introduction

1. Les droites D_1 et D_2 se coupent en un seul point
   Le système (S) a une seule solution
2. Les droites D_1 et D_2 sont parallèles
   Le système (S) n'a pas de solution
3. Les droites D_1 et D_2 sont confondues
   Le système (S) a une infinité de solutions

Méthode de la substitution

$$\begin{cases} 3x + 2y & = & 1 \\ 2x - 7y & = & -2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y & = & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \\ 2x - 7(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x) & = & -2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y & = & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \\ (2 + 7 \times \frac{3}{2})x & = & -2 + \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y & = & \frac{8}{25} \\ x & = & \frac{3}{25} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{3}{25}, \frac{8}{25} \right) \right\}$$

Inversion de matrice

- Le système linéaire

$$\begin{cases} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{cases}$$

est équivalent à

$$AX = Y \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

- Si le déterminant de la matrice A est non nul, c'est-à-dire si $ad - bc \neq 0$, alors la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

et l'unique solution $X = \binom{x}{y}$ du système est donnée par

$$X = A^{-1} Y$$

Definition

- *On appelle équation linéaire dans les variables (ou inconnues)* $x_1, \ldots, x_p$ *toute relation de la forme*

$$a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p = b$$

  où $a_1, \ldots, a_p$ *et* b *sont des nombres réels donnés*
- *Un système de* n *équations linéaires à* p *inconnues est une liste de* n *équations linéaires*

Le système suivant a 2 équations et 3 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 9 \end{array}\right.$$

Forme générale d'un système linéaire de n équations à p inconnues

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & \cdots & +a_{1p}x_p & = & b_1 & (\leftarrow \text{équation } 1)\\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & \cdots & +a_{2p}x_p & = & b_2 & (\leftarrow \text{équation } 2)\\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots & \\
a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +a_{i3}x_3 & + & \cdots & +a_{ip}x_p & = & b_i & (\leftarrow \text{équation } i)\\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots & \\
a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & + & \cdots & +a_{np}x_p & = & b_n & (\leftarrow \text{équation } n)
\end{array}\right.$$

- Les nombres a_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p$, sont les coefficients
- Les nombres b_i, $i = 1, \ldots, n$, constituent le second membre

Definition

- *Une solution du système linéaire est une liste de p nombres réels $(s_1, s_2, \dots, s_p)$ tels que si l'on remplace x_1 par s_1, x_2 par s_2, etc., dans le système linéaire, on obtient une égalité*
- *L' ensemble des solutions du système est l'ensemble de tous ces p-uplets*

Le système

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$$

admet comme solution $(-18, -6, 1)$, c'est-à-dire

$$x_1 = -18 \qquad x_2 = -6 \qquad x_3 = 1$$

Par contre, $(7, 2, 0)$ ne satisfait que la première équation. Ce n'est donc pas une solution du système

Systèmes équivalents

Résoudre un système linéaire c'est déterminer l'ensemble des solutions du système

Definition

On dit que deux systèmes linéaires sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions

Résoudre un système linéaire donné consistera souvent à le transformer en un système équivalent dont la résolution sera plus simple que celle du système de départ

Théorème

Un système d'équations linéaires a :

- *soit aucune solution*
- *soit une seule solution*
- *soit une infinité de solutions*

- En particulier, si vous trouvez 2 solutions différentes à un système linéaire, alors c'est que vous pouvez en trouver une infinité !
- Un système linéaire qui n'a aucune solution est dit incompatible.

Systèmes homogènes

Systèmes homogènes : $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$

$$\left\{\begin{array}{cccccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & \cdots & +a_{1p}x_p & = & 0 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & \cdots & +a_{2p}x_p & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots \\
a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +a_{i3}x_3 & + & \cdots & +a_{ip}x_p & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots \\
a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & + & \cdots & +a_{np}x_p & = & 0
\end{array}\right.$$

De tels systèmes sont toujours compatibles car $s_1 = s_2 = \cdots = s_p = 0$ toujours la solution, c'est la solution triviale.

1. Si un système linéaire homogène a une solution $(x_1, \ldots, x_p) \neq (0, \ldots, 0)$, alors il admet une infinité de solutions.

Definition (Systèmes échelonnés)

Un système est échelonné si :

1. *le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne*

Il est échelonné réduit si en plus :

2. *le premier coefficient non nul d'une ligne vaut* 1
3. *et c'est le seul élément non nul de sa colonne*

- $\left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & -x_2 & -2x_3 & & = & 4 \\ & & & 3x_4 & = & 1 \end{array}\right.$ est échelonné (non réduit)
- $\left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & & -2x_3 & & = & 4 \\ & & x_3 & +x_4 & = & 1 \end{array}\right.$ n'est pas échelonné

Exemple

- Le système linéaire suivant à 3 équations et 4 inconnues est échelonné et réduit

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad +2x_3 \quad\quad = 25 \\ \quad\quad x_2 \; -2x_3 \quad\quad = 16 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad x_4 = 1 \end{cases}$$

- Ce système se résout en

$$\begin{cases} x_1 = 25 - 2x_3 \\ x_2 = 16 + 2x_3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

- L'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{(25 - 2x_3, 16 + 2x_3, x_3, 1) \mid x_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

Opérations sur les équations d'un système

Nous allons utiliser trois opérations élémentaires sur les équations :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$:
   on peut multiplier une équation par un réel non nul
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (et $j \neq i$) :
   on peut ajouter à l'équation L_i un multiple d'une autre équation L_j
3. $L_i \leftrightarrow L_j$:
   on peut échanger deux équations

Ces opérations élémentaires transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent

Exemple

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 & (L_1) \\ 2x & -y & +5z & = & -5 & (L_2) \\ -x & -3y & -9z & = & -5 & (L_3) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & -3y & -9z & = & -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -x & -3y & -9z & = & -5 & \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & -3y & -9z & = & -3 & \\ & -2y & -2z & = & -6 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & y & +3z & = & 1 & L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} L_2 \\ & -2y & -2z & = & -6 & \end{cases}$$

Exemple

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & +3z & = & 1 \\ & -2y & -2z & = & -6 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrr} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & +3z & = & 1 \\ & & 4z & = & -4 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrr} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & +3z & = & 1 \\ & & z & = & -1 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3$$

$$\mathcal{S} = \{(2, 4, -1)\}$$

Partie A. Passage à une forme échelonnée

Soit le système à résoudre :

$$\begin{cases} & -x_2 & +2x_3 & +13x_4 & = & 5 \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ -x_1 & +3x_2 & -3x_3 & -20x_4 & = & -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 & \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ & -x_2 & +2x_3 & +13x_4 & = & 5 & \\ -x_1 & +3x_2 & -3x_3 & -20x_4 & = & -1 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 & \\ & -x_2 & +2x_3 & +13x_4 & = & 5 & \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 & \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -2x_3 & -13x_4 & = & -5 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 \end{array} \right. \qquad L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -2x_3 & -13x_4 & = & -5 \\ & & 2x_3 & +10x_4 & = & 8 \end{array} \right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -2x_3 & -13x_4 & = & -5 \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 4 \end{array} \right. \qquad L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3$$

Partie B. Passage à une forme réduite

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -2x_3 & -13x_4 & = & -5 \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 4 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -2x_2 & & 2x_4 & = & -8 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 4 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & & & -4x_4 & = & -2 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 4 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

Partie C. Solutions

$$\begin{cases} x_1 & & & -4x_4 & = & -2 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 4 \end{cases}$$

$$\iff \quad x_1 = 4x_4 - 2, \quad x_2 = 3x_4 + 3, \quad x_3 = -5x_4 + 4$$

$$\mathcal{S} = \left\{ (4x_4 - 2, 3x_4 + 3, -5x_4 + 4, x_4) \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Théorème (Systèmes homogènes)

Tout système homogène d'équations linéaires dont le nombre d'inconnues est strictement plus grand que le nombre d'équations a une infinité de solutions

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 8x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & & & + & 13x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & & & + & 20x_5 & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\mathcal{S} = \Big\{(-x_2 - 13x_5, x_2, -20x_5, 2x_5, x_5) \mid x_2, x_5 \in \mathbb{R}\Big\}$$