Cours d'algèbre 3

Filière : SMIA

Chapitre : Déterminants

Hanine Abdelouahab

Université Mohammed V.
Faculté des sciences
Dep. de Mathématiques -Rabat.

26 mai 2021

Déterminant

Le déterminant est une application qui à une matrice associe un scalaire

$$\det : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

Théorème et définition

Il existe une unique application de $M_n(\mathbb{K})$ *dans* $\mathbb{K}$, *appelée* **déterminant**, *telle que*

(i) *le déterminant est linéaire par rapport à chaque vecteur colonne, les autres étant fixés*

(ii) *si* A *a deux colonnes identiques, alors son déterminant est nul*

(iii) *le déterminant de la matrice identité* I_n *vaut* 1

Remarque

- *Une application satisfaisant (i) est appelée forme multilinéaire*
- *Si elle satisfait (ii), on dit qu'elle est alternée*

- On note le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})$ par

$$\det A \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Si on note C_i la i-ème colonne de A alors

$$\det A = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{vmatrix} = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

- La propriété (i) s'écrit

$$\det(C_1, \ldots, \lambda C_j + \mu C_j', \ldots, C_n)$$
$$= \lambda \det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n) + \mu \det(C_1, \ldots, C_j', \ldots, C_n)$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda a_{1j} + \mu a_{1j}' & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \lambda a_{ij} + \mu a_{ij}' & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nj} + \mu a_{nj}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}' & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij}' & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemple :

- Comme la seconde colonne est un multiple de 5

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 7 & -10 & -3 \\ 12 & 25 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & -3 \\ 12 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

- Par linéarité sur la troisième colonne

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4-3 \\ 7 & -5 & 3-2 \\ 9 & 2 & 10-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & -5 & 3 \\ 9 & 2 & 10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 7 & -5 & 2 \\ 9 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Nous connaissons déjà le déterminant de deux matrices :

- $\det 0_n = 0$ (par la propriété (ii))
- $\det I_n = 1$ (par la propriété (iii))

Proposition

Soit $A = (C_1, C_2, \ldots, C_n) \in M_n(\mathbb{K})$
Soit $A' \in M_n(\mathbb{K})$ *obtenue par opération élémentaire sur les colonnes :*

1. $C_i \leftarrow \lambda C_i$ *avec* $\lambda \neq 0$. *Alors* $\det A' = \lambda \det A$
2. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ *avec* $\lambda \in \mathbb{K}$ *(et* $j \neq i$*). Alors* $\det A' = \det A$
3. $C_i \leftrightarrow C_j$. *Alors* $\det A' = -\det A$

Corollaire

Si une colonne de A *est combinaison linéaire des autres colonnes alors* $\det A = 0$

Proposition

Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) est égal au produit des termes diagonaux

Autrement dit, pour une matrice triangulaire $A = (a_{ij})$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

Corollaire

Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des termes diagonaux

Notation. Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ on note $A_{i,j}$ la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A

Théorème

Les formules suivantes définissent par récurrence pour $n \geq 1$, l'application déterminant de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ qui satisfait aux propriétés (i), (ii), (iii)

- **Déterminant d'une matrice $\mathbf{1 \times 1}$.** *Si* $A = (a)$, $\det A = a$
- **Formule de récurrence.** *Si* $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$, *alors pour tout* i

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{i,n} \det A_{i,n}$$

Exemple

Calculer $\det A$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ $\det A$

$$= (-1) \times \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -6 & 1 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_1 \leftrightarrow C_2$ $\qquad$ $C_1 \leftarrow \frac{1}{3} C_1$

$$= (-1) \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 10 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix} = (-1) \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -55 \end{pmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1$ $\qquad$ $C_3 \leftarrow C_3 - 10C_2$

$$= (-1) \times 3 \times (-55)$$

$$= 165$$

Théorème

$\det(A \times B) = \det A \times \det B$

Théorème

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. De plus si A est inversible, alors :

$\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$

Exemple :

Deux matrices semblables ont même déterminant

- Soit $B = P^{-1}AP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$
- Par multiplicativité du déterminant
  $\det B = \det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \det A \det P = \det A$ puisque
  $\det P^{-1} = \frac{1}{\det P}$

Théorème

$\det\left(A^T\right) = \det A$

Définition

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée*

- A_{ij} *est la matrice extraite obtenue en effaçant la ligne* i *et la colonne* j *de* A
- *Le nombre* $\det A_{ij}$ *est un mineur d'ordre* $n-1$ *de la matrice* A
- *Le nombre* $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ *est le cofacteur de* A *relatif au coefficient* a_{ij}

- A_{ij} = matrice obtenue en effaant la ligne i et la colonne j de A
- $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ cofacteur de A relatif au coefficient a_{ij}

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

- $C_{ij} = +\det A_{ij}$ ou $C_{ij} = -\det A_{ij}$?

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculons $A_{11}, C_{11}, A_{32}, C_{32}$

Développement suivant une ligne ou une colonne

Théorème

Formule de développement par rapport à la ligne i

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Formule de développement par rapport à la colonne j

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Exemple

Retrouvons la règle de Sarrus en développement par rapport à la première ligne

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\
&\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{31}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
&\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}
\end{aligned}
$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det A &= 0C_{12} + 2C_{22} + 3C_{32} + 0C_{42} \quad \text{dévelop. par rapport à C2} \\
&= +2\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix}\text{on développe} \\ \text{les déterminants } 3\times 3\end{matrix} \\
&= 2\left(+4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) \quad \text{par rapport à C1} \\
&\quad -3\left(-4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) \quad \text{par rapport à L2} \\
&= 2\big(4\times 5 + 1\times(-4)\big) - 3\big(-4\times 7 + 1\times 11\big) = 83
\end{aligned}$$

Remarque

- *Par développement par rapport à une ligne on se ramène*
  - *à* n *déterminants* $(n-1)\times(n-1)$
  - *et par récurrence à* $n!$ *sous-déterminants...*
- *Il faut que* A *ait beaucoup de zéros*
- *On commence par faire apparatre des zéros par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes*

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$
La comatrice C est la matrice des cofacteurs

$$C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème

Soient A une matrice inversible et C sa comatrice. On a alors
$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\, C^T$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\det A = 2 \implies A$ est inversible
- La comatrice C s'obtient en calculant 9 déterminants 2×2 (sans oublier les signes $+/-$)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Donc

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Soit un système d'équations linéaires à n équations et n inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

- Il peut s'écrire sous forme matricielle $AX = B$ o

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Définissons la matrice $A_j \in M_n(\mathbb{K})$ par

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème (Règle de Cramer)

Soit un système de n *équations à* n *inconnues*

$$AX = B$$

Supposons que $\det A \neq 0$. *Alors l'unique solution* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *du système est donnée par*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \qquad \ldots \qquad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

Exemple

Résolvons le système $\begin{cases} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 6 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 30 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \end{cases}$

- On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

- $\det A = 44$ $\det A_1 = -40$ $\det A_2 = 72$ $\det A_3 = 152$
- $x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} = -\dfrac{10}{11}$ $x_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A} = \dfrac{18}{11}$ $x_3 = \dfrac{\det A_3}{\det A} = \dfrac{38}{11}$

- E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E
- $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vecteurs de $E \implies$ base ?
- On définit $A \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice dont la j-ème colonne est formée des coordonnées du vecteur v_j dans $\mathcal{B}$

Théorème

Les vecteurs $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ forment une base de E si et seulement si $\det A \neq 0$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
(v_1, v_2, \ldots, v_n) \text{ est une base} &\iff Rg(v_1, v_2, \ldots, v_n) = n \\
&\iff RgA = n \\
&\iff A \text{ est inversible} \\
&\iff \det A \neq 0
\end{aligned}
$$

□

Corollaire

Une famille de n *vecteurs de* $\mathbb{R}^n$

$$
\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}
$$

forme une base si et seulement si $\det (a_{ij}) \neq 0$

Exemple :

Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$?

- Il suffit de calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & b & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3 - b^3$
- Conclusion :
  - Si $a^3 \neq -b^3$ alors les trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$
  - Si $a^3 = -b^3$ alors les trois vecteurs sont liés
- Exercice : montrer que $a^3 = -b^3$ si et seulement si $a = -b$

- Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et p colonnes
- Soit k un entier inférieur à n et à p

Définition

On appelle mineur d'ordre k le déterminant de toute matrice carrée de taille k extraite de A

- Une telle matrice est obtenue en supprimant $n - k$ lignes et $p - k$ colonnes de A
- A n'a pas besoin d'être une matrice carrée

Exemple

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

- Un mineur d'ordre 1 est un coefficient de A
- Un mineur d'ordre 2 est le déterminant d'une matrice 2×2 extraite de A
  - Par exemple en supprimant L_2, C_1 et C_3 on obtient $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
  - Donc un des mineurs d'ordre 2 de A est $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

- Un mineur d'ordre 3 est le déterminant d'une matrice 3×3 extraite de A
  - Par exemple en supprimant C_2 on obtient le mineur

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -28$$

- Il n'y a pas de mineur d'ordre 4

Définition

Le rang d'une matrice est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes

Théorème

Le rang d'une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est le plus grand entier r tel qu'il existe un mineur d'ordre r extrait de A non nul

Exemple

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculons le rang de la matrice $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

- $RgA \neq 4$, puisque les colonnes sont dans $\mathbb{R}^3$
- Calculons le mineur d'ordre 3 obtenu en supprimant C_1 dans A

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 2$$

- Si $\alpha \neq 2$, le rang de la matrice A est 3

Exemple

- Si $\alpha = 2$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
  - on vérifie que les 4 mineurs d'ordre 3 de A sont nuls

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

  - Donc $RgA \leq 2$
  - En supprimant L_3, C_3, C_4 dans A, on obtient un mineur d'ordre 2 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Donc si $\alpha = 2$, le rang de A est 2