Cours d'algèbre 3-Espaces vectoriels

Filière : SMIA

Semaine du 07-04-2021

Hanine Abdelouahab

Université Mohammed V.
Faculté des sciences
Dep. de Mathématiques -Rabat.

17 avril 2021

Définition d'un espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps (souvent $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et E un ensemble non vide.

- Une loi de composition interne une application de $E \times E$ dans E :
$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$
- Une loi de composition externe une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

On note $(E, +, \cdot)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $(+)$ et une loi de composition externe $(\cdot)$.

Définition d'un espace vectoriel

Definition

On dit que $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si :

1. $u+v=v+u$ (pour tous $u,v\in E$) (commutativité)
2. $u+(v+w)=(u+v)+w$ (pour tous $u,v,w\in E$) (Associativité)
3. Il existe un élément neutre $0_E\in E$ tel que $u+0_E=u$ $(\forall u\in E)$
4. Tout $u\in E$ admet un symétrique u' tel que $u+u'=0_E$ Cet élément u' est noté $-u$
5. $1\cdot u=u$ (pour tout $u\in E$)
6. $\lambda\cdot(\mu\cdot u)=(\lambda\mu)\cdot u$ (pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $u\in E$)
7. $\lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v$ (pour tous $\lambda\in\mathbb{K}$, $u,v\in E$)
8. $(\lambda+\mu)\cdot u=\lambda\cdot u+\mu\cdot u$ (pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $u\in E$)

Définition d'un espace vectoriel

- Les éléments de E sont des vecteurs
- Les éléments de $\mathbb{K}$ seront des scalaires
- L' élément neutre 0_E s'appelle aussi le vecteur nul
- Le symétrique $-u$ d'un vecteur $u \in E$ s'appelle aussi l'opposé
- La loi de composition interne sur E, notée $+$, est l'addition
- La loi de composition externe sur E est la multiplication par un scalaire

Premiers exemples

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$

- Un élément $u \in E$ est donc un couple (x, y) avec x élément de $\mathbb{R}$ et y élément de $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$
- *Définition de la loi interne*
  Si (x, y) et (x', y') sont deux éléments de $\mathbb{R}^2$, alors :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

- *Définition de la loi externe* Si λ est un réel et (x, y) est un élément de $\mathbb{R}^2$, alors :

$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

- L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0, 0)$
- Le symétrique de (x, y) est $(-x, -y)$, que l'on note aussi $-(x, y)$

Tout plan passant par l'origine dans $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel

- Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et E un plan passant par l'origine
- Équation $ax + by + cz = 0$
- Un élément u de E est un triplet $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $ax + by + cz = 0$
-
    - Soient $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de E
    - $ax + by + cz = 0$ et $ax' + by' + cz' = 0$
    - Donc $a(x + x') + b(y + y') + c(z + z') = 0$
    - Ainsi $u + v = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$ appartient à E
- L'élément neutre est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$
- Le symétrique est $-\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E$

Axiomes relatifs à la loi interne

1. Commutativité
   Pour tous $u, v \in E$, $u + v = v + u$
2. Associativité
   Pour tous $u, v, w \in E$, on a $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. Existence d'un élément neutre
   Il existe un élément de E, noté 0_E, vérifiant :
   $$\text{pour tout } u \in E,\ u + 0_E = u$$
   - On a aussi $0_E + u = u$
   - Cet élément 0_E s'appelle aussi le vecteur nul
4. Existence d'un symétrique
   Pour tout u de E il existe un élément u' de E tel que $u + u' = 0_E$
   - On a aussi $u' + u = 0_E$
   - Cet élément u' est noté $-u$

Proposition

- *Il existe un unique élément neutre* 0_E
- *Pour* u *un élément de* E*, il existe un unique symétrique* $-u$

Démonstration.

- Soient 0_E et $0'_E$ deux éléments neutres. Pour tout u de E
  $(\star) \quad u + 0_E = 0_E + u = u \quad$ et $\quad (\star\star) \quad u + 0'_E = 0'_E + u = u$
  - Alors $(\star)$ avec $u = 0'_E$ donne $0'_E + 0_E = 0_E + 0'_E = 0'_E$
  - Et $(\star\star)$ avec $u = 0_E$ donne $0_E + 0'_E = 0'_E + 0_E = 0_E$
  - D'où $0_E = 0'_E$
- Si u' et u'' sont deux symétriques du même u,
  on a $u + u' = u' + u = 0_E \qquad$ et $\qquad u + u'' = u'' + u = 0_E$
  - $u' + (u + u'') = u' + 0_E = u'$
  - $u' + (u + u'') = (u' + u) + u'' = 0_E + u'' = u''$
  - On en déduit $u' = u''$

$\square$

Axiomes relatifs à la loi externe

5. Soit 1 l'élément neutre de la multiplication de $\mathbb{K}$. Pour tout élément u de E, on a
$$1 \cdot u = u$$

6. Pour tous éléments λ et μ de $\mathbb{K}$ et pour tout élément u de E, on a
$$\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \times \mu) \cdot u$$

Axiomes liant les deux lois

7. Distributivité par rapport à l'addition des vecteurs
Pour tout élément λ de $\mathbb{K}$ et pour tous éléments u et v de E, on a
$$\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$$

8. Distributivité par rapport à l'addition des scalaires

L'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- **Loi interne**
  Pour $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f + g$ est définie par
  $\forall x \in \mathbb{R} \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- **Loi externe**
  Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la fonction $\lambda \cdot f$ est définie par
  $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \times f(x)$
- **Élément neutre**
  L'élément neutre pour $(+)$ est la fonction nulle, définie par
  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$
- **Symétrique**
  Le symétrique de $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est g définie par
  $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = -f(x)$

Autres exemples

1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynmes
   - $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$
   - L'addition est l'addition de deux polynmes $P(X) + Q(X)$
   - La multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est $\lambda \cdot P(X)$
   - L'élément neutre est le polynme nul
   - L'opposé de $P(X)$ est $-P(X)$
2. L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
   L'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,...

Règles de calcul

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$
Soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

Proposition

1. $0 \cdot u = 0_E$
2. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
3. $(-1) \cdot u = -u$
4. $\lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0 \quad ou \quad u = 0_E$

- La soustraction $u - v = u + (-v)$
- $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$ et $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$

Sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Definition

Une partie F de E est appelée un **sous-espace vectoriel** si

- $0_E \in F$
- $u + v \in F$ pour tous $u, v \in F$
- $\lambda \cdot u \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $u \in F$

Exemple

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

- $(0, 0) \in F$
- si $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ appartiennent F
- alors $x_1 + y_1 = 0$ et $x_2 + y_2 = 0$
- donc $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0$
- et ainsi $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ appartient F

- si $u = (x, y) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
- alors $x + y = 0$ donc $\lambda x + \lambda y = 0$
- d'où $\lambda u \in F$

Voici des sous-ensembles qui ne sont pas des sous-espaces vectoriels

1. $F_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\right\}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$
   En effet le vecteur nul $(0, 0)$ n'appartient pas F_1
2. $F_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\right\}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$
   En effet $u = (1, 0), v = (0, 1) \in F_2$, mais $u + v = (1, 1) \notin F_2$
3. $F_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\right\}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.
   En effet $u = (1, 1) \in F_3$ mais, pour $\lambda = -1$,
   $-u = (-1, -1) \notin F_3$

Théorème

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* F *un sous-espace vectoriel de* E. *Alors* F *est lui-même un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel pour les lois induites par* E

Exemple

1. Est-ce que l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions paires forme un espace vectoriel ?
    - $\mathcal{P}$ sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
    - $\mathcal{P} = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\right\}$

    $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

    1. la fonction nulle est une fonction paire
    2. si $f, g \in \mathcal{P}$ alors $f + g \in \mathcal{P}$
    3. si $f \in \mathcal{P}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda f \in \mathcal{P}$

    Par le théorème $\mathcal{P}$ est un espace vectoriel
2. L'ensemble des fonctions impaires
$$\mathcal{I} = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\right\}$$
est un espace vectoriel
3. L'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices symétriques est un espace vectoriel

Théorème

L'ensemble des solutions d'un système homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$