Algèbre 3-S2

Filière : SMIA
Exemples d'applications

Hanine Abdelouahab

Université Mohammed 5.
Faculté des sciences
Département de Mathématiques-Rabat.

21 mai 2021

Exemples

Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ *suivants :*

$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0 \right\}$ *et* $G = Vect(u, v)$ *où*

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. *Est-ce que* $F = G$ *?*

1. *On remarque que* u *et* v *ne sont pas colinéaires, donc* $dimG = 2$, *de plus* $u \in F$ *et* $v \in F$ *c-à-d* $G \subset F$ *et* $dimF \geq dimG$.
2. *On a* $dimF < dim\mathbb{R}^3 = 3$ *car le vecteur* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin F$ *donc mais puisque* F *contient* G *alors* $dimF \geq dimG = 2$, *donc la dimension de* F *ne peut tre que* 2.
3. *On a donc démontré que* $G \subset F$ *et que* $dimG = dimF$, *ce qui entrane* $G = F$.

Exemples

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P''(X) \end{array}$$

Quel est le rang et la dimension du noyau de f *?*

- *Première méthode : on calcule d'abord le noyau*
  - $P(X) \in \mathrm{Ker} f \iff P''(X) = 0 \iff P'(X) = a \Leftrightarrow P(X) = aX + b$
  - $\mathrm{Ker} f = Vect(1, X)$ *donc* $dim \mathrm{Ker} f = 2$
  - *Par le théorème du rang,* $rgf = dim \mathrm{Im} f = dim \mathbb{R}_n[X] - dim \mathrm{Ker} f = (n+1) - 2 = n - 1$
- *Deuxième méthode : on calcule d'abord l'image*
  - $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ *est une base de l'espace de départ* $\mathbb{R}_n[X]$
  - *donc* $rgf = dim \mathrm{Im} f = dim Vect\big(f(1), f(X), \ldots, f(X^n)\big)$
  - $f(1) = 0$ *et* $f(X) = 0$, *pour* $k \geq 2$, $f(X^k) = k(k-1)X^{k-2}$
  - $\left\{f(X^2), f(X^3), \ldots, f(X^n)\right\} = \left\{2, 6X, 12X^2, \ldots, n(n-1)X^{n-2}\right\} \implies rgf = n - 1$
  - *Par le théorème du rang,* $dim \mathrm{Ker} f = dim \mathbb{R}_n[X] - rgf = 2$