Cours d'algèbre 3-Espaces vectoriels

Filière : SMIA

Hanine Abdelouahab

Université Mohammed V.
Faculté des sciences
Dep. de Mathématiques -Rabat.

5 mai 2021

- Soient $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E $(p \geq 1)$
- Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des éléments de $\mathbb{K}$

Definition

- Le vecteur
$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p$$
est une **combinaison linéaire** des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_p$
- Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les **coefficients** de la combinaison linéaire

Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E

Théorème

- *L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *est un sous-espace vectoriel de* E
- *C'est le plus petit sous-espace vectoriel de* E *contenant les vecteurs* $v_1, \ldots, v_n$

C'est le **sous-espace engendré par** $v_1, \ldots, v_n$, noté
$Vect(v_1, \ldots, v_n)$
$u \in Vect(v_1, \ldots, v_n) \iff \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \;\; u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$

1. **Droite vectorielle** $Vect(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u \quad (u \neq 0_E)$
2. $Vect(u,v) = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$
   Si u et v ne sont pas colinéaires, c'est un **plan vectoriel**
3. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Déterminons $\mathcal{P} = Vect(u,v)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Vect(u,v) \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda u + \mu v \quad \text{pour certains } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x &= \lambda + \mu \\ y &= \lambda + 2\mu \\ z &= \lambda + 3\mu \end{cases}$$

Équation cartésienne : $(x - 2y + z = 0)$

4. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = x^2$
   $Vect(f_0, f_1, f_2) = \{f \mid f(x) = ax^2 + bx + c\} = \mathbb{R}_2[x]$

Definition

Une famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ de E est une **famille libre** (ou **linéairement indépendante**) si toute combinaison linéaire nulle

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0 \quad \ldots \quad \lambda_p = 0$$

Remarque

- Si la famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ de E n'est pas libre, on dit que la famille est **liée** ou **linéairement dépendante**
- Dans ce cas, il existe une combinaison linéaire nulle de $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ **avec au moins un coefficient non nul**

Exemple

- Dans $\mathbb{R}^3$, soit

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- Est-ce une famille libre ou liée ?
- Posons

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Exemple

- Après réduction de Gauss

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda_1 & & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

le système a une infinité de solutions

- Par exemple $\lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$
- $2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est donc une famille liée

Exemple

- $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle libre ou liée ?
- $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$
- On résout ce système et on trouve comme unique solution $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0$
- La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est donc une famille libre

Exemple

- Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$

$$\begin{array}{rcccccc} P_1(X) & = & 1 & - & X & & \\ P_2(X) & = & 5 & + & 3X & - & 2X^2 \\ P_3(X) & = & 1 & + & 3X & - & X^2 \end{array}$$

- $3P_1(X) - P_2(X) + 2P_3(X) = 0$
- $\{P_1, P_2, P_3\}$ forme une famille liée

Proposition

La famille $\{v_1, v_2\}$ est liée si et seulement si v_1 est un multiple de v_2 ou bien v_2 est un multiple de v_1

Démonstration.

- Si $\{v_1, v_2\}$ est liée
  - il existe une combinaison linéaire nulle $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ avec au moins un coefficient non nul
  - Si $\lambda_1 \neq 0$, $v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2$ et v_1 est un multiple de v_2
  - Si $\lambda_2 \neq 0$, $v_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} v_1$ et v_2 est un multiple de v_1
- Réciproquement
  - si v_1 est un multiple de v_2, il existe μ tel que $v_1 = \mu v_2$
  - donc $1 v_1 + (-\mu) v_2 = 0$
  - la famille $\{v_1, v_2\}$ est liée
  - Même conclusion si c'est v_2 qui est un multiple de v_1

□

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Théorème

Une famille $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ de $p \geq 2$ vecteurs de E est une famille liée si et seulement si au moins un des vecteurs de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$

Famille génératrice

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.

Definition

Soient $v_1, \ldots, v_p$ *des vecteurs de* E*. La famille* $\{v_1, \ldots, v_p\}$ *est une* **famille génératrice** *de l'espace vectoriel* E *si tout vecteur de* E *est une combinaison linéaire des vecteurs* $v_1, \ldots, v_p$*.*
Ce qui peut s'écrire aussi :

$$\forall v \in E \qquad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K} \qquad v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$$

C-à-d : $E = Vect(v_1, \ldots, v_p)$

On dit aussi que la famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ **engendre** l'espace vectoriel E.

Famille génératrice

Proposition

Soit $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ *une famille génératrice de* E*. Alors* $\mathcal{F}' = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_q\}$ *est aussi une famille génératrice de* E *si et seulement si tout vecteur de* $\mathcal{F}$ *est une combinaison linéaire de vecteurs de* $\mathcal{F}'$*.*

Nous chercherons bientôt à avoir un nombre minimal de générateurs. Voici une proposition sur la réduction d'une famille génératrice.

Proposition

Si la famille de vecteurs $\{v_1, \ldots, v_p\}$ *engendre* E *et si l'un des vecteurs, par exemple* v_p*, est combinaison linéaire des autres, alors la famille* $\{v_1, \ldots, v_p\} \setminus \{v_p\} = \{v_1, \ldots, v_{p-1}\}$ *est encore une famille génératrice de* E*.*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Definition

Une famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est une **base** de E si $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice

Théorème

Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base de l'espace vectoriel E. Tout vecteur $v \in E$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$. Autrement dit, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ uniques tels que :

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

Exemple

1. $e_1 = \binom{1}{0}$ $e_2 = \binom{0}{1}$ forment la **base canonique** de $\mathbb{R}^2$
2. $v_1 = \binom{3}{1}$ $v_2 = \binom{1}{2}$ forment aussi une base de $\mathbb{R}^2$
3. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment la **base canonique** de $\mathbb{R}^3$

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$
2. $(1, 1+X, 1+X+X^2, \dots, 1+X+X^2+\dots+X^n)$ autre base de $\mathbb{R}_n[X]$

Exemple

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

1. $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?
2. $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^3$?

1. $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?
   $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que
   $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3 \\ 2\lambda_1+9\lambda_2+3\lambda_3 \\ \lambda_1+4\lambda_3 \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & a_1 \\ 2\lambda_1 & + & 9\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & a_2 \\ \lambda_1 & & & + & 4\lambda_3 & = & a_3 \end{array} \right.$$

Exemple

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

2. $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^3$?

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & 9\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & 4\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

- Le second système admet pour seule solution $(0, 0, 0)$
- Conclusion : $\mathcal{B}$ est une famille génératrice et libre : c'est une base

Définition d'une Application linéaire

Definition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application f de E dans F est une application linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$, pour tous $u, v \in E$;
2. $f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$, pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. La dérivation $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, $P \mapsto P'$ est une application linéaire.
2. L'application $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, $P \mapsto P^2$, est non linéaire car $f(2X) = (2X)^2 \neq 2X^2 = 2f(X)$.

Premiers exemples

L'application f définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-2x, y+3z) \end{array}$$

est une application linéaire. En effet, soient $u=(x,y,z)$ et $v=(x',y',z')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel.

$$\begin{array}{rcl} f(u+v) & = & f(x+x', y+y', z+z') \\ & = & \big(-2(x+x'), y+y'+3(z+z')\big) \\ & = & f(u)+f(v) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda\cdot u) & = & f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ & = & (-2\lambda x, \lambda y + 3\lambda z) \\ & = & \lambda\cdot f(u) \end{array}$$

voir le cours pour d'autres exemples

Proposition

Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Si* f *est une application linéaire de* E *dans* F*, alors :*

- $f(0_E) = 0_F$,
- $f(-u) = -f(u)$, *pour tout* $u \in E$.

Proposition (Caractérisation d'une application linéaire)

Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* f *une application de* E *dans* F*. L'application* f *est linéaire si et seulement si, pour tous vecteurs* u *et* v *de* E *et pour tous scalaires* λ *et* μ *de* $\mathbb{K}$,

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

Image d'une application linéaire

Commenons par des rappels. Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Soit A un sous-ensemble de E. L'ensemble des images par f des éléments de A, appelé **image directe** de A par f, est noté $f(A)$. C'est un sous-ensemble de F. On a par définition :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Dans toute la suite, E et F désigneront des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ sera une application linéaire. $f(E)$ s'appelle l'image de l'application linéaire f et est noté $\mathrm{Im} f$.

Proposition (Structure de l'image d'un sous-espace vectoriel)

1. *Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.*
2. *En particulier, $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.*

f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im} f = F$.

Noyau d'une application linéaire

Definition (Définition du noyau)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Le **noyau** de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, est l'ensemble des éléments de E dont l'image est 0_F :
$\mathrm{Ker}(f) = \left\{x \in E \mid f(x) = 0_F\right\}$
Autrement dit, le noyau est l'image réciproque du vecteur nul de l'espace d'arrivée : $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\{0_F\}$.

Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème (Caractérisation des applications linéaires injectives)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Alors : f injective si et seulement si $Ker(f) = \{0_E\}$

Autrement dit, f est injective si et seulement si son noyau ne contient que le vecteur nul. En particulier, pour montrer que f est injective, il suffit de vérifier que : si $f(x) = 0_F$ alors $x = 0_E$.

1. La dérivation $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, $\sum_{k=0}^{p} a_k X^k \mapsto \sum_{k=1}^{p} k a_k X^{k-1}$, est linéaire. Elle est surjective car tout polynôme possède une primitive ; mais pas injective car les polynômes constants ont la même image.

L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$

L'' ensemble des applications de E dans F, noté $\mathcal{F}(E,F)$, peut être muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe, définies par : f,g étant deux éléments de $\mathcal{F}(E,F)$, et λ étant un élément de $\mathbb{K}$, pour tout vecteur u de E, $(f+g)(u) = f(u) + g(u)$ et $(\lambda \cdot f)(u) = \lambda f(u)$.

Proposition

L'ensemble des applications linéaires entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, noté $\mathcal{L}(E,F)$, muni des deux lois définies précédemment, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Vocabulaire : Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.

- Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est une application linéaire de E dans E.
- Un isomorphisme de E sur F est une application linéaire bijective.
- Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.
- Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E sur $\mathbb{K}$..

- Une application linéaire bijective de E sur F est appelée **isomorphisme** d'espaces vectoriels. Les deux espaces vectoriels E et F sont alors dits **isomorphes**.
- Un endomorphisme bijectif de E (c'est-à-dire une application linéaire bijective de E dans E) est appelé **automorphisme** de E. L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$.

Proposition (Linéarité de l'application réciproque)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est un isomorphisme de E sur F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.