Cours d'algèbre 3

Filière : SMIA

Chapitre : Matrices et applications linéaires

Hanine Abdelouahab

Université Mohammed V.
Faculté des sciences
Dep. de Mathématiques -Rabat.

26 mai 2021

Matrice d'une app linéaire

- E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie
- $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E
- $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F
- $f : E \to F$ une application linéaire

1. f est déterminée de façon unique par l'image d'une base de E, donc par les vecteurs $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)$
2. $f(e_j)$ se décompose de manière unique dans la base $\mathcal{B}'$
3. Il existe $a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j} \in \mathbb{K}$ tels que

$$f(e_j) = a_{1,j} f_1 + a_{2,j} f_2 + \cdots + a_{n,j} f_n = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

$f : E \to F$ app lin $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ base de E, $\mathcal{B}' = (f_1, ..., f_n)$ base de F donc $f(e_j) = a_{1,j} f_1 + a_{2,j} f_2 + ... + a_{n,j} f_n = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$

Définition

La matrice de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice $(a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

La j-ème colonne est constituée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. Les vecteurs colonnes sont l'image par f des vecteurs de la base de départ $\mathcal{B}$, exprimée dans la base d'arrivée $\mathcal{B}'$.

Exemples

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3) \end{array}$$

- $f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1+x_2-x_3 \\ x_1-2x_2+3x_3 \end{pmatrix}$
- *Soit* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$
- *Soit* $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$
- $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Quelle est la matrice de f *dans les bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *?*

- $f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 1) = f_1 + f_2$
- $f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, -2) = f_1 - 2f_2$
- $f(e_3) = f(0, 0, 1) = (-1, 3) = -f_1 + 3f_2$

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemples

Même application linéaire :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3) \end{array}$$

- $\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- *Nouvelle base de départ* $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$
- *Nouvelle base d'arrivée* $\mathcal{B}'_0 = (\phi_1, \phi_2)$
- *Quelle est la matrice de* f *dans les bases* $\mathcal{B}_0$ *et* $\mathcal{B}'_0$ *?*
-
  - $f(\epsilon_1) = f(1, 1, 0) = (2, -1) = 3\phi_1 - \phi_2$
  - $f(\epsilon_2) = f(1, 0, 1) = (0, 4) = -4\phi_1 + 4\phi_2$
  - $f(\epsilon_3) = f(0, 1, 1) = (0, 1) = -\phi_1 + \phi_2$

$$Mat_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}'_0}(f) = \begin{array}{c} \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\epsilon_1) & f(\epsilon_2) & f(\epsilon_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Opérations sur les applications linéaires et les matrices

- Soient $f, g : E \to F$ deux applications linéaires
- Soit $\mathcal{B}$ une base de E
- Soit $\mathcal{B}'$ une base de F

Proposition

- $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$
- $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$

$$A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \qquad B = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$$

$$C = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g) \qquad D = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f)$$

Alors $$C = A + B \qquad D = \lambda A$$

- Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires
- Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F et $\mathcal{B}''$ une base de G

Proposition

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$$

$$A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \qquad B = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \qquad C = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$$

Alors $\quad C = B \times A$

Exemples

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

  $$A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,2}$$

- $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $B = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}$
- $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = C = B \times A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrice d'un endomorphisme

- $f : E \to E$ est un endomorphisme
- Deux bases distinctes pour l'espace vectoriel E : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$
- Même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée : $Mat_{\mathcal{B}}(f)$

Exemples

- *identité* $Id : E \to E$, $Id(x) = x$ $\qquad Mat_{\mathcal{B}}(Id) = I_n$
- *homothétie* $h_\lambda : E \to E$, $h_\lambda(x) = \lambda \cdot x$ $\qquad Mat_{\mathcal{B}}(h_\lambda) = \lambda I_n$
- *symétrie centrale* $s : E \to E$, $s(x) = -x$ $\qquad Mat_{\mathcal{B}}(s) = -I_n$
- *rotation*
  - $r_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  - *rotation d'angle* θ, *centrée à l'origine*
  - $\mathbb{R}^2$ *muni de la base canonique* $\mathcal{B}$
  - $r_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$

$$Mat_{\mathcal{B}}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Corollaire

Soient $f : E \to E$ *une application linéaire et* $\mathcal{B}$ *une base de* E
Quel que soit $p \in \mathbb{N}$

$$Mat_{\mathcal{B}}(f^p) = \left(Mat_{\mathcal{B}}(f)\right)^p$$

La matrice associée à $f^p = f \circ f \circ \cdots \circ f$ est $A^p = A \times A \times \cdots \times A$

Un isomorphisme $f : E \to F$ est une application linéaire bijective

Théorème

- *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels de même dimension finie*
- *Soit* $f : E \to F$ *une application linéaire*
- *Soient* $\mathcal{B}$ *une base de* E, $\mathcal{B}'$ *une base de* F
- *Soit* $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$

1. f *est bijective si et seulement si la matrice* A *est inversible*
2. *Si* $f : E \to F$ *est bijective, alors la matrice de* $f^{-1} : F \to E$ *est la matrice* A^{-1}

$$Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = \left(Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\right)^{-1}$$

- $f : E \to E$
- Même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée
- $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$

Corollaire

- *f est bijective si et seulement si A est inversible*
- *Si f est bijective, alors la matrice associée à f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$ est A^{-1}*

$$Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \big(Mat_{\mathcal{B}}(f)\big)^{-1}$$

Exemples

- *Soient* $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *la rotation d'angle* $\frac{\pi}{6}$ *(centrée à l'origine)*

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

- *Soit* s *la réflexion par rapport à* $(y = x)$ *:*
  $B = Mat_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $Mat_{\mathcal{B}}(s \circ r) = B \times A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- $Mat_{\mathcal{B}}((s \circ r)^{-1}) = (BA)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} =$
  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

- Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base d'un espace vectoriel E
- Pour $x \in E$, $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_p e_p$
- La matrice de x dans $\mathcal{B}$ est $Mat_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

Proposition

$f : E \to F$ app lin, $y = f(x)$, $\mathcal{B}$ base de E et $\mathcal{B}'$ base de F.

$$A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f),\ X = Mat_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}},\ Y = Mat_{\mathcal{B}'}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Alors, si $y = f(x)$, on a $Y = AX$

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f(x)) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times Mat_{\mathcal{B}}(x)$$

Exemples

- E un espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$
- Soit $f : E \to E$ avec $A = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Quel est le noyau de f ?

$$x \in \mathrm{Ker} f \iff f(x) = 0_E \iff Mat_{\mathcal{B}}(f(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker} f = \left\{ x \in E \mid \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ et\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \mid t \in \mathbb{K} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \right)$$

Exemples

- *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* 3 *ayant une base* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$
- *Soit* $f : E \to E$ *avec* $A = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Quelle est l'image de f *?*

- $\mathrm{Ker} f$ *est de dimension* 1
- *Théorème du rang :* $dim \mathrm{Im} f = dim E - dim \mathrm{Ker} f = 2$
- *Les deux premiers vecteurs de la matrice* A *étant linéairement indépendants, ils engendrent* $\mathrm{Im} f$

$$\mathrm{Im} f = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \right)$$

Matrice de passage d'une base à une autre

- Soit E un espace vectoriel de dimension n
- Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E

Définition

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$, notée $Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, est la matrice dont la j-ème colonne est formée des coordonnées du j-ème vecteur de la base $\mathcal{B}'$, par rapport à la base $\mathcal{B}$

Exemples

Dans $\mathbb{R}^2$ *on considère :*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ *est une base*
- $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ *est une base*

Quelle est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ *vers la base* $\mathcal{B}'$ *?*
Méthode : Il faut exprimer ϵ_1 *et* ϵ_2 *en fonction de* (e_1, e_2)

$$\epsilon_1 = -e_1 + 2e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \epsilon_2 = e_1 + 4e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

La matrice de passage est donc :

$$Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Proposition

La matrice de passage $Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ *est la matrice associée à l'identité* $Id_E : (E,\mathcal{B}') \to (E,\mathcal{B})$
$Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E)$

Proposition

1. *Une matrice de passage est inversible et* $Pass_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \left(Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1}$
2. *Si* $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ *sont trois bases* $Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times Pass_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$

Exemples

Soit $E = \mathbb{R}^3$ *avec sa base canonique* $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}\right) \text{ et } \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

Quelle est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ *vers* $\mathcal{B}_2$ *?*

- $Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\1 & -1 & 2\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ $Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$
- $Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2} = Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} \times Pass_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ $Pass_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = Pass^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} \times Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2}$
- $Pass_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\1 & -1 & 2\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\2 & -1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

- $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ deux bases de E
- $Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$
- Pour $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on note $X = Mat_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$
- Il s'écrit aussi $x = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$ et on note

$$X' = Mat_{\mathcal{B}'}(x) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Proposition

$X = Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times X'$

En effet : $Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est la matrice de $Id_E : (E, \mathcal{B}') \to (E, \mathcal{B})$
$X = Mat_{\mathcal{B}}(x) = Mat_{\mathcal{B}}\big(Id_E(x)\big) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E) \times Mat_{\mathcal{B}'}(x) =$
$Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times X'$

Formule de changement de base

- Soit $f : E \to E$ une application linéaire
- Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E
- Soit $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de l'application f dans la base $\mathcal{B}$
- Soit $B = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$ la matrice de l'application f dans la base $\mathcal{B}'$
- Soit $P = Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

Théorème

$B = P^{-1}AP$

Exemples

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}\right) \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'endomorphisme dont la matrice dans la base* $\mathcal{B}_1$ *est* A

$$A = Mat_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix}1 & 0 & -6\\-2 & 2 & -7\\0 & 0 & 3\end{pmatrix} P = Pass_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\2 & -1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Que vaut la matrice de f *dans la base* $\mathcal{B}_2$, $B = Mat_{\mathcal{B}_2}(f)$ *?*
$B = P^{-1}AP$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\2 & -1 & 5\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 0 & -6\\-2 & 2 & -7\\0 & 0 & 3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\2 & -1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$

Définition

B est semblable à la matrice A s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$

La relation **être semblable** est une relation d'équivalence :

Proposition

- *réflexivité : une matrice A est semblable à elle-même*
- *symétrie : si A est semblable à B, alors B est semblable à A*
- *transitivité : si A est semblable à B, et B est semblable à C, alors A est semblable à C*

Corollaire

Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme, mais exprimé dans des bases différentes

Déterminant

Le déterminant est une application qui à une matrice associe un scalaire

$$\det : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

Théorème et définition

Il existe une unique application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée **déterminant**, *telle que*

(i) *le déterminant est linéaire par rapport à chaque vecteur colonne, les autres étant fixés*

(ii) *si A a deux colonnes identiques, alors son déterminant est nul*

(iii) *le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1*

Remarque

- *Une application satisfaisant (i) est appelée forme multilinéaire*
- *Si elle satisfait (ii), on dit qu'elle est alternée*

- On note le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})$ par

$$\det A \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Si on note C_i la i-ème colonne de A alors

$$\det A = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{vmatrix} = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

- La propriété (i) s'écrit

$$\det(C_1, \dots, \lambda C_j + \mu C_j', \dots, C_n)$$
$$= \lambda \det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n) + \mu \det(C_1, \dots, C_j', \dots, C_n)$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda a_{1j} + \mu a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \lambda a_{ij} + \mu a'_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nj} + \mu a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemple :

- Comme la seconde colonne est un multiple de 5

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 7 & -10 & -3 \\ 12 & 25 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & -3 \\ 12 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

- Par linéarité sur la troisième colonne

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4-3 \\ 7 & -5 & 3-2 \\ 9 & 2 & 10-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & -5 & 3 \\ 9 & 2 & 10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 7 & -5 & 2 \\ 9 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Nous connaissons déjà le déterminant de deux matrices :

- $\det 0_n = 0$ (par la propriété (ii))
- $\det I_n = 1$ (par la propriété (iii))

Proposition

Soit $A = (C_1, C_2, \dots, C_n) \in M_n(\mathbb{K})$
Soit $A' \in M_n(\mathbb{K})$ *obtenue par opération élémentaire sur les colonnes :*

1. $C_i \leftarrow \lambda C_i$ *avec* $\lambda \neq 0$. *Alors* $\det A' = \lambda \det A$
2. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ *avec* $\lambda \in \mathbb{K}$ *(et* $j \neq i$*). Alors* $\det A' = \det A$
3. $C_i \leftrightarrow C_j$. *Alors* $\det A' = -\det A$

Corollaire

Si une colonne de A *est combinaison linéaire des autres colonnes alors* $\det A = 0$

Proposition

Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) est égal au produit des termes diagonaux

Autrement dit, pour une matrice triangulaire $A = (a_{ij})$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

Corollaire

Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des termes diagonaux

Notation. Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ on note $A_{i,j}$ la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A

Théorème

Les formules suivantes définissent par récurrence pour $n \geq 1$, l'application déterminant de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ qui satisfait aux propriétés (i), (ii), (iii)

- **Déterminant d'une matrice $\mathbf{1} \times \mathbf{1}$.** *Si* $A = (a)$, $\det A = a$
- **Formule de récurrence.** *Si* $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$, *alors pour tout* i

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{i,n} \det A_{i,n}$$

Exemple

Calculer $\det A$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ $\det A$

$$= (-1) \times \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -6 & 1 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_1 \leftrightarrow C_2 \qquad\qquad C_1 \leftarrow \frac{1}{3} C_1$$

$$= (-1) \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 10 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix} = (-1) \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -55 \end{pmatrix}$$

$$C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 \qquad\qquad C_3 \leftarrow C_3 - 10C_2$$

$$= (-1) \times 3 \times (-55)$$

$$= 165$$

Théorème

$\det(A \times B) = \det A \times \det B$

Théorème

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. De plus si A est inversible, alors :

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}$$

Exemple :

Deux matrices semblables ont même déterminant

- Soit $B = P^{-1}AP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$
- Par multiplicativité du déterminant $\det B = \det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \det A \det P = \det A$ puisque $\det P^{-1} = \frac{1}{\det P}$

Théorème

$\det\left(A^T\right) = \det A$

Définition

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée*

- A_{ij} *est la matrice extraite obtenue en effaçant la ligne* i *et la colonne* j *de* A
- *Le nombre* $\det A_{ij}$ *est un mineur d'ordre* $n-1$ *de la matrice* A
- *Le nombre* $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ *est le cofacteur de* A *relatif au coefficient* a_{ij}

- A_{ij} = matrice obtenue en effaant la ligne i et la colonne j de A
- $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ cofacteur de A relatif au coefficient a_{ij}

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

- $C_{ij} = +\det A_{ij}$ ou $C_{ij} = -\det A_{ij}$?

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculons $A_{11}, C_{11}, A_{32}, C_{32}$

Développement suivant une ligne ou une colonne

Théorème

Formule de développement par rapport à la ligne i

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Formule de développement par rapport à la colonne j

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Exemple

Retrouvons la règle de Sarrus en développement par rapport à la première ligne

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\
&\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{31}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
&\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}
\end{aligned}
$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det A &= 0C_{12} + 2C_{22} + 3C_{32} + 0C_{42} && \text{dévelop. par rapport à C2} \\
&= +2\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} && \text{on développe les déterminants } 3 \times 3 \\
&= 2\left(+4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) && \text{par rapport à C1} \\
&\quad -3\left(-4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) && \text{par rapport à L2} \\
&= 2\big(4 \times 5 + 1 \times (-4)\big) - 3\big(-4 \times 7 + 1 \times 11\big) = 83
\end{aligned}$$

Remarque

- *Par développement par rapport à une ligne on se ramène*
    - *à* n *déterminants* $(n-1) \times (n-1)$
    - *et par récurrence à* $n!$ *sous-déterminants...*
- *Il faut que* A *ait beaucoup de zéros*
- *On commence par faire apparatre des zéros par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes*

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$
La comatrice C est la matrice des cofacteurs

$$C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème

Soient A une matrice inversible et C sa comatrice. On a alors
$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} C^T$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\det A = 2 \implies A$ est inversible
- La comatrice C s'obtient en calculant 9 déterminants 2×2 (sans oublier les signes $+/-$)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Donc

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Soit un système d'équations linéaires à n équations et n inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

- Il peut s'écrire sous forme matricielle $AX = B$ o

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Définissons la matrice $A_j \in M_n(\mathbb{K})$ par

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème (Règle de Cramer)

Soit un système de n équations à n inconnues

$$AX = B$$

Supposons que $\det A \neq 0$. *Alors l'unique solution* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *du système est donnée par*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \qquad \ldots \qquad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

Exemple

Résolvons le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 6 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 30 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \end{array}\right.$

- On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

- $\det A = 44 \qquad \det A_1 = -40 \qquad \det A_2 = 72 \qquad \det A_3 = 152$
- $x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} = -\dfrac{10}{11} \qquad x_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A} = \dfrac{18}{11} \qquad x_3 = \dfrac{\det A_3}{\det A} = \dfrac{38}{11}$

- E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E
- $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vecteurs de $E \implies$ base ?
- On définit $A \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice dont la j-ème colonne est formée des coordonnées du vecteur v_j dans $\mathcal{B}$

Théorème

Les vecteurs $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *forment une base de* E *si et seulement si* $\det A \neq 0$

Démonstration.

$$\begin{aligned}(v_1, v_2, \dots, v_n) \text{ est une base} &\iff Rg(v_1, v_2, \dots, v_n) = n \\ &\iff RgA = n \\ &\iff A \text{ est inversible} \\ &\iff \det A \neq 0\end{aligned}$$

□

Corollaire

Une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

forme une base si et seulement si $\det (a_{ij}) \neq 0$

Exemple :

Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$?

- Il suffit de calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & b & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3 - b^3$
- Conclusion :
  - Si $a^3 \neq -b^3$ alors les trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$
  - Si $a^3 = -b^3$ alors les trois vecteurs sont liés
- Exercice : montrer que $a^3 = -b^3$ si et seulement si $a = -b$

- Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et p colonnes
- Soit k un entier inférieur à n et à p

Définition

On appelle mineur d'ordre k le déterminant de toute matrice carrée de taille k extraite de A

- Une telle matrice est obtenue en supprimant $n-k$ lignes et $p-k$ colonnes de A
- A n'a pas besoin d'être une matrice carrée

Exemple

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

- Un mineur d'ordre 1 est un coefficient de A
- Un mineur d'ordre 2 est le déterminant d'une matrice 2×2 extraite de A
  - Par exemple en supprimant L_2, C_1 et C_3 on obtient $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
  - Donc un des mineurs d'ordre 2 de A est $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

- Un mineur d'ordre 3 est le déterminant d'une matrice 3×3 extraite de A
  - Par exemple en supprimant C_2 on obtient le mineur

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -28$$

- Il n'y a pas de mineur d'ordre 4

Définition

Le rang d'une matrice est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes

Théorème

Le rang d'une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ *est le plus grand entier* r *tel qu'il existe un mineur d'ordre* r *extrait de* A *non nul*

Exemple

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculons le rang de la matrice $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

- $RgA \neq 4$, puisque les colonnes sont dans $\mathbb{R}^3$
- Calculons le mineur d'ordre 3 obtenu en supprimant C_1 dans A

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 2$$

- Si $\alpha \neq 2$, le rang de la matrice A est 3

Exemple

- Si $\alpha = 2$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
  - on vérifie que les 4 mineurs d'ordre 3 de A sont nuls

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

  - Donc $RgA \leq 2$
  - En supprimant L_3, C_3, C_4 dans A, on obtient un mineur d'ordre 2 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Donc si $\alpha = 2$, le rang de A est 2