Cours d'algèbre 3-Sous espaces vectoriels

Filière : SMIA

Semaine du 21-04-2021

Hanine Abdelouahab

Université Mohammed V.
Faculté des sciences
Dep. de Mathématiques -Rabat.

21 avril 2021

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Definition

Une partie F de E est appelée un **sous-espace vectoriel** si

- $0_E \in F$
- $u + v \in F$ pour tous $u, v \in F$
- $\lambda \cdot u \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $u \in F$

Remarque : On peut montrer que F est sous espace vectoriel Ssi $0 \in F$ et $u + \lambda v \in F$ pour tous $u, v \in F \lambda \in \mathbb{K}$

Exemple

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

1. $(0, 0) \in F$
2. - si $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ appartiennent F
   - alors $x_1 + y_1 = 0$ et $x_2 + y_2 = 0$
   - donc $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0$
   - et ainsi $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ appartient F
3. - si $u = (x, y) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
   - alors $x + y = 0$ donc $\lambda x + \lambda y = 0$
   - d'où $\lambda u \in F$

Voici des sous-ensembles qui ne sont pas des sous-espaces vectoriels

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$
   En effet le vecteur nul $(0, 0)$ n'appartient pas F_1
2. $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$
   En effet $u = (1, 0), v = (0, 1) \in F_2$, mais $u + v = (1, 1) \notin F_2$
3. $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$
   En effet $u = (1, 1) \in F_3$ mais, pour $\lambda = -1$,
   $-u = (-1, -1) \notin F_3$

Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est lui-mme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois induites par E

Théorème (Caractérisation par la notion de combinaison linéaire)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie non vide de E
F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$\lambda u + \mu v \in F \qquad \text{pour tous } u, v \in F \qquad \text{et tous } \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

Autrement dit si et seulement si toute combinaison linéaire de deux éléments de F appartient F

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E

Proposition

L'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E

$F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n$ est un sous-espace vectoriel

Démonstration.

- $0_E \in F$, $0_E \in G$ donc $0_E \in F \cap G$
-
  - Soient $u, v \in F \cap G$
  - F est un sous-espace vectoriel, alors $u, v \in F$ implique $u + v \in F$
  - De mme $u, v \in G$ implique $u + v \in G$
  - Donc $u + v \in F \cap G$
-
  - Soient $u \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
  - F est un sous-espace vectoriel, alors $u \in F$ implique $\lambda u \in F$
  - De mme $u \in G$ implique $\lambda u \in G$
  - Donc $\lambda u \in F \cap G$

Conclusion : $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E $\square$

Exemple

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0 \quad \text{et} \quad x - y + 2z = 0\right\}$$

- $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0\right\}$
- $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\right\}$
- F et G sont des plans vectoriels
- $\mathcal{D} = F \cap G$ est un sous-espace vectoriel

La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E

Definition

L'ensemble de tous les éléments $u + v$, où u est un élément de F et v un élément de G, est appelé **somme** des sous-espaces vectoriels F et G

Proposition

1. $F + G$ *est un sous-espace vectoriel de* E
2. $F + G$ *est le plus petit sous-espace vectoriel contenant* F *et* G

Exemple

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$$

- Montrons que $F + G = \mathbb{R}^3$
- Soit $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
- $w = (x, y, z) = (0, y, z) + (x, 0, 0)$, avec $(0, y, z) \in F$ et $(x, 0, 0) \in G$
- Donc $w \in F + G$
- Pas unicité : $(1, 2, 3) = (0, 2, 3) + (1, 0, 0) = (0, 2, 0) + (1, 0, 3)$

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E

Definition

F et G sont en **somme directe** dans E si

- $F \cap G = \{0_E\}$
- $F + G = E$

On note alors $F \oplus G = E$

F et G sont des sous-espaces vectoriels **supplémentaires** dans E

Proposition

F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout élément de E s'écrit d'une manière **unique** *comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G*

Écriture unique : si $\left\{ \begin{array}{l} w = u + v \\ w = u' + v' \end{array} \right.$ avec $\left\{ \begin{array}{l} u \in F, v \in G \\ u' \in F, v' \in G \end{array} \right.$ alors

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u' \\ v = v' \end{array} \right.$$

Exemple

1. $F = \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ et $G = \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\right\}$
    - $F \oplus G = \mathbb{R}^2$?
    - $F \cap G = \{(0,0)\}$
    - $F + G = \mathbb{R}^2$ car $(x,y) = (x,0) + (0,y)$
    - Conclusion : $F \oplus G = \mathbb{R}^2$
    - Autre méthode : la décomposition $(x,y) = (x,0) + (0,y)$ est unique
2. Gardons F et notons $G' = \left\{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$. Montrons que l'on a aussi $F \oplus G' = \mathbb{R}^2$
    - $F \cap G' = \{(0,0)\}$
    - $F + G' = \mathbb{R}^2$: $(x,y) = (x-y,0) + (y,y)$
3. Deux droites distinctes du plan passant par l'origine forment des sous-espaces supplémentaires

Exemple

- $F \cap G = \{0\}$: si $u = (x, y, z) \in F \cap G$ alors $x - y - z = 0$ (car $u \in F$) et $y = z = 0$ (car $u \in G$), donc $u = (0, 0, 0)$
- Montrons $F + G = \mathbb{R}^3$
  - Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
  - On cherche $v \in F$ et $w \in G$ tels que $u = v + w$
  - $v = (y_1 + z_1, y_1, z_1)$ et $w = (x_2, 0, 0)$
  - Donc $(x, y, z) = (y_1 + z_1 + x_2, y_1, z_1)$
  - Ainsi $y_1 = y$, $z_1 = z$, $x_2 = x - y - z$
  - $(x, y, z) = (y + z, y, z) + (x - y - z, 0, 0) \in F + G$

Conclusion : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

- Soient $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ($p \geq 1$)
- Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des éléments de $\mathbb{K}$

Definition

- Le vecteur

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p$$

  est une **combinaison linéaire** des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_p$
- Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les **coefficients** de la combinaison linéaire

Soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E

Théorème

- *L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *est un sous-espace vectoriel de* E
- *C'est le plus petit sous-espace vectoriel de* E *contenant les vecteurs* $v_1, \dots, v_n$

C'est le **sous-espace engendré par** $v_1, \dots, v_n$, noté
$Vect(v_1, \dots, v_n)$

$$u \in Vect(v_1, \dots, v_n) \iff \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \;\; u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

1. **Droite vectorielle** $Vect(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u \quad (u \neq 0_E)$
2. $Vect(u, v) = \left\{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\right\}$
   Si u et v ne sont pas colinéaires, c'est un **plan vectoriel**
3. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Déterminons $\mathcal{P} = Vect(u, v)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Vect(u, v) \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda u + \mu v \quad \text{pour certains } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \lambda + \mu \\ y & = & \lambda + 2\mu \\ z & = & \lambda + 3\mu \end{array} \right.$$

   Équation cartésienne : $(x - 2y + z = 0)$
4. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = x^2$
   $Vect(f_0, f_1, f_2) = \left\{f \mid f(x) = ax^2 + bx + c\right\} = \mathbb{R}_2[x]$