

Matrice

$$M_2 = A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \text{matrice carrée}$$

$$M_3 = A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

$$M_{2,3} : A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

ligne colonne

La somme de deux matrices

$$A+B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

Produit

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

Produit de deux matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} =$$

$(2,2) \cdot (2,2) \Rightarrow$ produit possible

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} axa'+bxc' & axb'+bxd' \\ cxa'+dxc' & cxb'+dd' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 & 6+x+y \\ -1+2+w & 2w+3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = L_2$$

calculer $A \times B$ et $B \times A$ (conclure)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4 & 3+5 \\ 0+6 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 19 \end{pmatrix}$$

remarque $A \times B \neq B \times A$
 alors le produit n'est pas commutatif
 dans l'ensemble des matrices

La matrice unité $I = (1)$

l'expression de I

$$M_2 \rightarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 \rightarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice trouver n, y et w, tel que

$$3 \begin{pmatrix} x & y \\ 3 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+6 & \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x+y & \\ 2+w & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+6 & 4x+y \\ -1+2+w & 2w+3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x = n+4 \\ 3y = 6+n+y \\ 3z = -1+2+w \\ 3w = 2w+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 2 \\ y = 4 \\ z = \frac{4}{3} \\ w = 3 \end{cases}$$

La matrice inverse de A est A^{-1}

8 $P_1 = A \cdot A^{-1} = I$

↳ Inverse de A

Ex Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer B^2

2) M. q $B^2 = 7B - 10I$

3) en déduire que B est inversible et exprimer son inverse en fonction de B et de I

$$B^2 = B \times B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+1+1 & 3+3+1 & 3+1+3 \\ 3+3+1 & 1+9+1 & 1+3+3 \\ 3+1+3 & 1+3+1 & 1+1+9 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

2) M. q $B^2 = 7B - 10I$

$$7B - 10I = 7 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 21 & 7 & 7 \\ 7 & 21 & 7 \\ 7 & 7 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix} = B^2$$

Ex Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer A^2 , A^3

2) vérifier que $A^3 + A^2 + 4A + I = 0$

ou $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) M. q A est inversible et calculer

A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & 4 \\ 9 & -4 & 3 \end{pmatrix} = A^3$$

2) vérifier que $A^3 + A^2 + 4A + I = 0$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & 4 \\ 9 & -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $A^3 + A^2 + 4A + I = 0$

trouver une matrice:

B telle que:

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 7 & 2 & 0 \\ 12 & 16 & -3 \end{pmatrix}$$

$$xy = a$$

trouver x

$$(x \cdot y) y^{-1} = a \cdot y^{-1}$$

$$xI = a \cdot y^{-1}$$

$$x = a \cdot y^{-1}$$

Corollaire

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang } A \leq 3$$

$$\Rightarrow \text{rang}(A) = ?$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1 + 0 + 0) - (0 + (-1) + 1)$$

$$\det A = 1$$

$$\text{Alors } \text{rang}(A) = 3$$

$$\text{si } \det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 3 - 1 = 2$$

$$\Rightarrow A \text{ est-elle inversible } A^{-1}$$

$$\text{si } \det A \neq 0 \Rightarrow \text{Alors } A \text{ inversible}$$

$$\Rightarrow \text{Inverse de matrice } A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{trans}(\text{com} A)$$

$$\bullet \text{ etape 1 } \det A$$

$$\bullet \text{ Etape 2 } \text{com} A$$

$$\bullet \text{ Etape 3 } \text{trans}(\text{com} A)$$

$$\bullet A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{trans}(\text{com} A)$$

Ex 1 soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(K)$$

a) déterminer le rang de $A \Rightarrow \text{rang}(A)$

b) A est-elle inversible

c) si oui calculer l'inverse A^{-1}

Ex 2 soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Donner la matrice échelonnée de A

2) Déduire le rang de A

Ex 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A

2) donner les valeurs propres de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice P. 5

$$\text{com} A = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{com} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \text{transp}(\text{com} A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{transp}(\text{com} A)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rappel méthode de Gauss

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y+2z=2 \\ 2x-y+3z=-1 \end{cases}$$

Résoudre

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 0+2y+3z=3 \\ 0-3y+3z=-3 \end{cases}$$

$E_2' = E_2 + E_1$
 $E_3' = E_3 - 2E_1$
 $E_3'' = 2E_3' + 3E_2'$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ matrice échelonnée}$$

Ex 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice échelonnée

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$L_2' = L_2 - L_1$
 $L_3' = L_3 - 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$L_2'' = L_2'$
 $L_3'' = L_3' - 2L_2'$

Alors la matrice échelonnée de A est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

On décide le rang de A par matrice échelonnée

Le rang = le nombre de ligne non nulle.

$$\text{le rang}(A) = 3$$

عدد الأسطر الغير الصفرية

3] Mg A est inversible et calculer

$$A^{-1}$$

$$\text{On a } A^3 + A^2 + 4A + I = 0$$

$$A^3 + A^2 + 4A = -I$$

$$-A^3 - A^2 - 4A = I$$

$$A(-A^2 - A - 4I) = I$$

$$A^{-1}$$

Alors A est Inversible

$$\text{et son Inverse } A^{-1} = -A^2 - A - 4I$$

$$\text{Ex: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1] La matrice est elle inversible
si on calcule son Inverse.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1(4) - 0 + 3(-1) = -4 - 3 = -1$$

$$\det = -1 \neq 0$$

Alors A est inversible

2ème méthode

SARUS

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det A = (0 - 3 + 0) - (0 - 4 + 0) = -3 + 4 = 1$$

$\det \neq 0 \Rightarrow$ alors A est Inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{trans}(\text{com} A)$$

$\Rightarrow$ La matrice Inverse

On a $\det A$

② $\text{com}(A)$

③ transposé de $\text{com}(A)$

$$\text{trans}(\text{com} A)$$

$$\text{④ } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{trans}(\text{com} A)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{com}(A)) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \det A = 1 \quad \bullet \text{com} A = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{com} A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{trans}(\text{com}(A)) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{trans}(\text{com} A)$$

$$\boxed{\det A = 1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donn : soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$
 dans la matrice dans le bas canonique
 $B = (e_1, e_2, e_3)$

soit $A = \text{Mat}(f, B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1) calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$

2) Déterminer $\text{Ker } f$, f est-elle injective, est-elle surjective

3) en déduire que A est inversible

4) calculer A^{-1}

soit $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec $e'_1 = (1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, -1, 0)$
 et $e'_3 = (0, -1, 1)$

5) Montrer que B' est un bas de $\mathbb{R}^3$

6) Calculer $f(e'_1)$, $f(e'_2)$ et $f(e'_3)$ en fonction de e_1, e_2, e_3

7) en déduire que $A' = \text{Mat}(f, B')$

8) donner la matrice de passage P de B à B'

9) Montrer que P est inversible

$$P^{-1} =$$

10) exprimer A' en fonction de A , P et P^{-1}

Def
 f endomorphisme $\begin{cases} f \text{ linéaire} \\ E = F \end{cases}$
 f isomorphisme $\begin{cases} f \text{ linéaire} \\ + \\ \text{bijectif} \end{cases}$
 f automorphisme $\begin{cases} f \text{ linéaire} \\ + \\ \text{bijectif} \\ \text{endomorphisme} \end{cases}$
 morphisme = linéaire $\begin{cases} + \\ \text{isomorphisme} \end{cases}$

La relation entre f et la matrice A

$$f(x) = A \cdot X \quad \text{avec } X = (x, y, z)$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

matrice

$$1) E = \mathbb{R}^3 \longrightarrow F = \mathbb{R}^3$$

$$B = (e_1, e_2, e_3)$$

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$$

$$A = \text{Mat}(f, B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = (-1, 1, 1), f(e_2) = (1, -1, 1)$$

$$f(e_3) = (1, 1, -1)$$

calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$

$$\Rightarrow f(e_1) = A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1, 1, 1)$$

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1, 1, 1)$$

$$f(e_2) = A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1, -1, 1)$$

2] Ker f? f est-elle injective, f est-elle surjective

$$\text{Ker } f = \left\{ (x, y, z) \in E / f(x, y, z) = 0_F \right\}$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in E / A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_F \right\}$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in E / \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x + y + z \\ x - y + z \\ x + y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \quad E_1 \\ x - y + z = 0 \quad E_2 \\ x + y - z = 0 \quad E_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2z = 0 E_2' = E_2 - E_1 \\ 2y = 0 E_3' = E_3 + E_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0, 0, 0\}$$

$$= -5 + 4 - 1 = -2$$

$\Rightarrow$ admet que f injective

$\text{Ker } f = \{0\} \Rightarrow$ Alors f est injective

$\text{Ker } f = \{0, 0, 0\}$ Alors f est injective

bijective $\begin{cases} f \text{ injective} \rightarrow \text{Ker } f = \{0_E\} \\ + \\ f \text{ surjective} \rightarrow \dim \text{Im } f = \dim F \end{cases}$

ou bijective $\begin{cases} f \text{ fonction} \rightarrow (E=F) \\ + \\ f \text{ injectif} \end{cases}$

f est-elle bijective

$\Rightarrow$ On a f isomorphe et injective
Alors f est bijective

3] en déduire que A inversible

$$\text{MI} \quad \det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1 + 1 + 1) - (-1 + (-1) - 1) = 4 \neq 0$$

Alors A est inversible

f est bijective $\Rightarrow$ donc f admet $f^{-1} \Rightarrow$ Alors A admet A^{-1}
Donc A est inversible.

4] Calculer A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{trac}(A)$$

$$\text{Com } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Com } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Conc } \text{can} A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{can} A$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$$

11.9 B' est un base de $\mathbb{R}^3$

base } génératrice
libre

génératrice

Cond B' = dim E

libre $\Rightarrow \det B' \neq 0$

Conc
Cond B' = 3 = dim E

$$\text{et } \det B' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$\det B' = -3 \neq 0 \Rightarrow B'$ est libre

D'autre que B' est un base de $\mathbb{R}^3$

Calculer $f(\epsilon_1), f(\epsilon_2), f(\epsilon_3)$ en fonction de ϵ_1, ϵ_2 et ϵ_3

$$f(x) = A \cdot x \quad \uparrow$$

$$f(\epsilon_1) = A \cdot \epsilon_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\epsilon_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\epsilon_1}$$

$$\Rightarrow f(\epsilon_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{-2\epsilon_2}$$

$$f(\epsilon_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{-2\epsilon_2}$$

7] en déduire la matrice

$$A' = \text{Mat}(f, B')$$

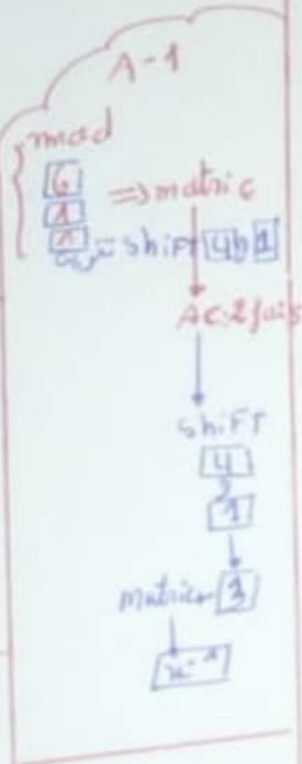
$$A' = \begin{pmatrix} f(\epsilon_1) & f(\epsilon_2) & f(\epsilon_3) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$f(\epsilon_1) = \epsilon_1 \Rightarrow 1\epsilon_1 + 0\epsilon_2 + 0\epsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\epsilon_2) = -2\epsilon_2 = 0\epsilon_1 + 2\epsilon_2 + 0\epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\epsilon_3) = -2\epsilon_1 + 0\epsilon_2 + 0\epsilon_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$



soit l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x+y-3, x+5y+2z)$$

1) M. q f est linéaire

2) Déterminer $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$

3) f est elle surjective? Injective

4) Voir à la fin

$$\text{Ker } f = \{x \in E / f(x) = 0_F\}$$

$$\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$$

$$f(x, y, z) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (x+y-3, x+5y+2z) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x+5y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3=0 \\ 4y+2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 & L_1 \\ x+5y=-2z & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ 4y=-3z \end{cases} \quad L_2 - L_1$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ y=-\frac{3}{4}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{4}z \\ y=-\frac{3}{4}z \end{cases}$$

$$\text{Ker } f = \left\{ \frac{7}{4}z, -\frac{3}{4}z, z \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \frac{1}{4}z(7, -3, 4)$$

$$\text{Ker } f = \text{vect}((7, -3, 4)) \neq \{0\} \text{ pas injective}$$

$$\text{Vect}(x_1)$$

B(x) génératrice de $\text{Ker } f$

de plus $x_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ donc B est libre

B est bas de $\text{Ker } f$

$$\dim \text{Ker } f = 1$$

Method 1

$$\text{Im } f = \{f(x) / x \in E\} \subset F$$

$$= \{f(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \{(x+y-3, x+5y+2z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$\{(x, y) + (-3, 2z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$\{x(1, 1) + y(1, 5) + (-3, 2z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$\text{Im } f = \text{Vect}((1, 1), (1, 5), (-3, 2)) \subset \mathbb{R}^2$$

$$\text{Im } f = \text{Vect}((1, 1), (1, 5))$$

C(x, x2) famille génératrice

$$x x_1 + B x_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$x(1, 1) + B(1, 5) = 0_{\mathbb{R}^2} \quad \begin{cases} x=0 \\ B=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+B=0 \\ x+5B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=0 \\ B=0 \end{cases}$$

C est libre

Dans C est bas de $\text{Im } f$

$$\Rightarrow \dim E = \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f$$

$$\dim \text{Im } f = \dim E - \dim \text{Ker } f$$

$$= 3 - 1$$

$$= 2$$

la matrice de passage

Ex soit Application linéaire $E \rightarrow F$

de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) = (x + 2y, y, 3y)$$

1) Mq f est linéaire

2) Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$

3) f est-elle injective? surjective?

$$\text{Ker } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$\text{Ker } f = \{x \in E / f(x) = 0_F\}$$

$$\text{Ker } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$$

$$f(x, y) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (x, 2x + y, y) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ker } f = \{(0, 0)\} = \{0_E\}$$

Application est injective

$$\text{Im } f = \{f(x) / x \in E\}$$

$$\{ \in F \text{ s'écrit} \}$$

$$\text{M1 } \text{Im } f = \{f(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{x, 2x + y, y / x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x, 2x, 0\} + \{0, y, y\} / x, y \in \mathbb{R}$$

$$\{x(1, 2, 0) + y(0, 1, 1) / x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Im } f = \text{Vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$$

$$\text{Vect}\{x_1, x_2\}$$

Donne la base de $\text{Im } f$

$$B = (x_1, x_2) \text{ génératrice}$$

de $\text{Im } f$

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Base libre

Donc B est une base de $\text{Im } f$

$$\text{et } \boxed{\dim \text{Im } f = \dim E - \dim \text{Ker } f}$$

$$= 2 - 0$$

$$\boxed{\dim f = 2}$$

$$\text{Ker } f = \{0\} \rightarrow \text{injective}$$

$$f \text{ surjective } \text{Im } f = F$$

$$\dim \text{Im } f = 2 \neq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

$$\text{Im } f \neq F = \mathbb{R}^3$$

f n'est surjective

la matrice de passage

⑧ P

$$B(e_1, e_2, e_3) \xrightarrow{P} B'(e_1', e_2', e_3')$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

عند الانتقال من الأساس B إلى الأساس B'،
المatrice de passage P = (B')

⑨ M9 $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$\rightarrow P^{-1} = \frac{1}{\det P} \text{adj} P$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

10 exprimer A' en fonction de A
et P et P⁻¹ → calculer A'

$$A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$