Université Mohammed V
Faculté des Sciences de Rabat
Département de Mathématiques

Année universitaire 2020-2021
Semestre 2 - SMIA

Algèbre 3 (SMIA).
Série I.

Exercice 1. *Résoudre les systèmes suivants*

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 2. *Déterminer, pour $P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$, x, y, z des réels tels que*

$$P(X) = xP_1(X) + yP_2(X) + zP_3(X).$$

Avec $P_1(X) = 1 + X - X^2$, $P_2(X) = 1 - X + X^2$, $P_3(X) = -1 + X + X^2$

Exercice 3. *Discuter suivant les valeurs du paramètre m, l'existence de solutions du système:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (1-m)z & = & m+2 \\ (1+m)x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & my & + & 3z & = & m+2. \end{array}\right.$$

Exercice 4. *Trouver l'ensemble des solutions des systèmes suivants:*

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+4z+7t & = & 0 \\ x+3y+4z+5t & = & 0 \\ x+3y+3z+2t & = & 0 \\ x+y+z+t & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+5z+3t & = & 1 \\ x+4y+7z+3t & = & 0 \\ y+2z & = & -1 \\ x+2y+3z+2t & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 5. *Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ et a :*

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y-z+t & = & \lambda \\ 2x+y-z & = & \lambda-1 \\ 5x+4y-2z & = & 2\lambda \\ (\lambda+2)x+(\lambda+2)y-z & = & 3\lambda+a \\ 3x-z+3t & = & -\lambda^2 \end{array}\right.$$

Exercices supplémentaires.

Exercice 6. *Trouver les solutions de*

$$\begin{cases} 3x+2z=0 \\ 3y+z+3t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ 2x-y+z-t=0 \end{cases}$$

Exercice 7. *Écrire les conditions, portant sur les réels a, b, c, pour que les systèmes suivants admettent des solutions non nulles ; expliciter ces solutions.*

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z & = & 0 \\ bcx+acy+abz & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x-a(y+z) & = & 0 \\ y-b(x+z) & = & 0 \\ z-c(x+y) & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 8. *Soit a un nombre réel. On étudie le système linéaire suivant :*

$$\mathcal{S}_a \ : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & - & y & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

(1) *En fonction des valeurs du paramètre a, déterminer si le système $\mathcal{S}_a$ peut :*
   (i) *n'admettre aucune solution ;*
   (ii) *admettre exactement une solution ;*
   (iii) *admettre une infinité de solutions.*

(2) *Résoudre le système $\mathcal{S}_a$ lorsque celui-ci admet une (des) solution(s).*

Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ 3x-7y=z\}$
$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ x^2-z^2=0\}$
$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ x+y-z=x+y+z=0\}$
$E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ z(x^2+y^2)=0\}$
Les parties suivantes sont-elles des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$: