Chapitre 2

Calcul de Primitives

Dans ce chapitre nous allons présenter les méthodes usuelles utilisées pour calculer une primitive.

2.1 Intégration par parties

Théorème 4. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$

$$\boxed{\int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x}$$

Notation

- $\big[F\big]_a^b = F(b) - F(a)$.
- $\big[F\big]$ désigne la fonction $F + c$, où c est une constante.
- $\displaystyle\int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x = \big[uv\big] - \int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x$.

Démonstration. En intégrant les termes de l'égalité $(uv)' = u'v + uv'$ on obtient $\displaystyle\int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b (uv)' = \big[uv\big]_a^b$. Utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient $\displaystyle\int_a^b uv' = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b u'v$. □

Exemple 5. Calcul de $\displaystyle\int_0^1 xe^x\, \mathrm{d}x$.

Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. D'où, en appliquant la formule d'intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x\, \mathrm{d}x &= \int_0^1 u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \big[xe^x\big]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x\, \mathrm{d}x = \big(1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0\big) - \big[e^x\big]_0^1 = 1
\end{aligned}$$

Exemple 6. Calcul de $\displaystyle\int_1^e x\ln x \,\mathrm{d}x$.

Posons $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$. Donc $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$. D'où, en appliquant la formule d'intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x \,\mathrm{d}x &= \left[\tfrac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \tfrac{1}{x}\tfrac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \left(\tfrac{\mathrm{e}^2}{2}\ln \mathrm{e} - \tfrac{1^2}{2}\ln 1\right) - \tfrac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} x\,\mathrm{d}x\\ &= \tfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{x^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}} = \tfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \tfrac{\mathrm{e}^2}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{\mathrm{e}^2+1}{4}.\end{aligned}$$

Exemple 7. Calcul de $\displaystyle\int \arcsin x \,\mathrm{d}x$.

Posons $u'(x) = 1$ et $v(x) = \arcsin x$. Donc $u(x) = x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. D'où, en appliquant la formule d'intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}\int 1\cdot \arcsin x \,\mathrm{d}x &= \left[x \arcsin x\right] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[x\arcsin x\right] - \left[-\sqrt{1-x^2}\right] = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.\end{aligned}$$

Exemple 8. Calcul de $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

Posons $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x^2$. Donc $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = 2x$. D'où, en appliquant la formule d'intégration par partie, on obtient

$$\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x^2 e^x\right] - 2\int x e^x\,\mathrm{d}x = \left[x^2 e^x\right] - 2\Big(\left[x\mathrm{e}^x\right] - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\Big) = (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x + c.$$

2.2 Changement de variable

Théorème 5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\varphi : J \to I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\boxed{\forall a, b \in J;\ \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x \ = \ \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}$$

Démonstration. On a $x = \varphi(t) \implies \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t) \implies \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. D'où $f(x)\,\mathrm{d}x = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. D'autre part, puisque φ est une bijection, $x = \varphi(t) = \varphi(c) \iff t = c$. En remplaçant, on obtient $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. □

Exemple 9. Déterminer une primitive $F = \displaystyle\int \tan t\,\mathrm{d}t = \int \frac{\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t$. Notre changement de variable ici est guidé, d'une part, par le fait que $\displaystyle\int \frac{u'}{u} = \ln|u| + c$ et d'autre part par l'expression $\tan t = -\dfrac{\cos'(t)}{\cos(t)}$. Ainsi en posant $u(t) = \cos(t)$, on a $u'(t) = -\sin(t)$ et

$$F = \int \frac{\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{\cos'(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{u'}{u} = \ln|u| + c = \ln|\cos(t)| + c.$$

Exemple 10. Calculer $\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.

Posons $u = 1 - x^2$. D'où $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2x$ ou encore $\frac{-1}{2}\,\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}x$. En remplaçant, on obtient

$$\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{2}\int_{1-0^2}^{1-(1/2)^2} \frac{\mathrm{d}u}{u^{3/2}} = \frac{-1}{2}\int_{3/4}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{u^{3/2}} = \frac{-1}{2}\Big[\frac{u^{-3/2+1}}{-3/2+1}\Big]_{3/4}^{1} = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1.$$

Exemple 11. Calcul de $\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$. Posons $x = \sin t$. D'où $1 - x^2 = \cos^2 t$, $\mathrm{d}x = \cos t\ \mathrm{d}t$ et $t = \arcsin x$. Ainsi pour $x = 0$ on a $t = \arcsin(0) = 0$ et pour $x = \frac{1}{2}$ on a $t = \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$. En remplaçant, dans l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{3/2}} &= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t}{(1-\sin^2 t)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t\ \mathrm{d}t}{(\cos^2 t)^{3/2}} = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \big[\tan t\big]_0^{\pi/6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

2.3 Intégration des fractions rationnelles

Dans ce paragraphe nous présenterons les techniques d'intégration d'une fraction rationnelle en distinguant les différents cas de figure.

2.3.1 Fractions rationnelle du type : $\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$

Premier cas : $ax^2 + bx + c$ a deux racines réelles distinctes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Dans ce cas, il suffit de décomposer la fraction rationnelle en éléments simples :

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{a(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

Ainsi on a : $\int f(x)\,\mathrm{d}x = A \ln|x - x_1| + B \ln|x - x_2| + c$.

Deuxième cas : $ax^2 + bx + c$ a une racine double $x_0 \in \mathbb{R}$

Ce cas est traité de la même manière que le précédent :

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{a(x - x_0)^2} = \frac{A}{(x - x_0)^2} + \frac{B}{x - x_0}$$

Ainsi on a : $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{A}{x - x_0} + B \ln|x - x_0| + c$.

Troisième cas : ax^2+bx+c n'a pas de racine réelle

Nous illustrons ce cas par un exemple.

Exemple 12. Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^2+x+1}$. Pour calculer son intégrale, on la fait apparaître comme une fraction du type $\dfrac{u'}{u}$:

$$f(x) = \frac{(4x+1)\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1}{2x^2+x+1} = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{4x+1}{2x^2+x+1} + \tfrac{3}{4} \cdot \frac{1}{2x^2+x+1}$$

Le premier terme du membre droit de l'égalité est est de la forme $\dfrac{u'}{u}$, d'où

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left|2x^2+x+1\right| + c$$

Pour le second terme $\dfrac{1}{2x^2+x+1}$, on le mettra sous la forme $\dfrac{1}{u^2+1}$ (dont une primitive est $\arctan u$) :

$$\frac{1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8} + 1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2 + \frac{7}{8}} = \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)^2 + 1}$$

On pose $u = \frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})$ (et donc $du = \frac{4}{\sqrt{7}}\mathrm{d}x$.) D'où,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+x+1} &= \int \frac{8}{7} \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)^2+1} = \frac{8}{7}\frac{\sqrt{7}}{4} \int \frac{du}{u^2+1} \\
&= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan u + c = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right) + c.
\end{aligned}$$

En combinant ces résultats, on obtient

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\left(2x^2+x+1\right) + \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right) + c.$$

2.3.2 Intégration de fractions rationnelles

Une fraction rationnelle $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se décompose comme somme d'un polynôme et d'éléments simples du type $\dfrac{C}{(x-x_0)^k}$ ou $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$.

1- Intégration de l'élément simple $\dfrac{C}{(x-x_0)^k}$

– Si $k=1$ alors $\displaystyle\int \frac{C\,\mathrm{d}x}{x-x_0} = C\ln|x-x_0| + c$

– Si $k \geq 2$, $\displaystyle\int \frac{C\,\mathrm{d}x}{(x-x_0)^k} = C\int (x-x_0)^{-k}\,\mathrm{d}x = \frac{C}{-k+1}(x-x_0)^{-k+1} + c$

2- Intégration de l'élément simple $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k} = C\dfrac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k} + D\dfrac{1}{(ax^2+bx+c)^k}$

– $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u'(x)}{u(x)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-k+1}u(x)^{-k+1} + c = \frac{1}{-k+1}(ax^2+bx+c)^{-k+1} + c$

– Si $k=1$, $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$ et du type $\displaystyle\int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + c$

– Si $k \geq 2$, $\displaystyle\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}\,\mathrm{d}x$ et du type $I_k = \displaystyle\int \frac{du}{(u^2+1)^k}$.

Une intégration par partie permet de passer de I_{k-1} à I_k. Nous allons illustrer cela par un exemple.

Exemple 13. Calcul de $I_2 = \displaystyle\int \frac{du}{(u^2+1)^2}$.

Par une intégration par parties à partir de $I_1 = \displaystyle\int \frac{du}{u^2+1}$ on cherche à faire apparaître I_2. Pour cela on pose $f = \dfrac{1}{u^2+1}$ et $g' = 1$. D'où $f' = -\dfrac{2u}{(u^2+1)^2}$ et $g = u$, et on a

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + \int \frac{2u^2\,du}{(u^2+1)^2} = \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + 2\int \frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^2}du \\
&= \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + 2\int \frac{du}{u^2+1} - 2\int \frac{du}{(u^2+1)^2} \\
&= \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + 2I_1 - 2I_2
\end{aligned}$$

On en déduit que $I_2 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}\dfrac{u}{u^2+1} + c$. Et comme $I_1 = \arctan u$, on obtient

$$I_2 = \int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \tfrac{1}{2}\arctan u + \tfrac{1}{2}\frac{u}{u^2+1} + c$$

2.4 Intégration des fonctions trigonométriques

2.4.1 Intégrales de la forme $\displaystyle\int \sin^m(x)\cos^n(x)\ \mathrm{d}x$

1- Cas où n ou m est impair.

Nous illustrons cette méthode dans le cas où $n = 2k+1$. Le cas où $m = 2l+1$ peut être traité de la même manière en remplaçant $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$.

$$\begin{aligned}
\int \sin^m x \cos^n x\ \mathrm{d}x &= \int \sin^m x\,(\cos^2 x)^k\ \cos x\ \mathrm{d}x \\
&= \int \sin^m x(1-\sin^2 x)^k\ \cos x\ \mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathrm{C}_j^k\ (-1)^j \int \sin^{m+2j} x\ \ \cos x\ \mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{C}_j^k\ (-1)^j\ \frac{(\sin x)^{m+2j+1}}{m+2j+1} + c.
\end{aligned}$$

Exemple 14. Calcul de $\int \sin^2 x \cos^3 x \; \mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^3 x \; \mathrm{d}x &= \int \sin^2 x(1-\sin^2 x) \cos x \; \mathrm{d}x \\ &= \int \sin^2 x \cos x \; \mathrm{d}x - \int \sin^4 x \cos x \; \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + \; \mathrm{c}\end{aligned}$$

Exemple 15. Calcul de $\int \sin^5 x \cos^4 x \; \mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \cos^4 x \; \mathrm{d}x &= \int \cos^4 x \; (1-\cos^2 x)^2 \sin x \; \mathrm{d}x \\ &= \int \cos^4 x \; \sin x \; \mathrm{d}x - 2\int \cos^6 x \; \sin x \; \mathrm{d}x + \int \cos^8 x \; \sin x \; \mathrm{d}x \\ &= \frac{-1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{7}\cos^7 x - \frac{1}{9}\cos^9 x + \mathrm{c}.\end{aligned}$$

2- Cas où n et m sont pairs.

Si $m = 2k$ et $n = 2l$, alors on utilise les identités suivantes :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \qquad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

Exemple 16. Calcul de $\int \sin^2 x \cos^2 x \; \mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x \; \mathrm{d}x &= \int \cos^2 x(1-\cos^2 x) \; \mathrm{d}x = \int \cos^2 x \; \mathrm{d}x - \int \cos^4 x \; \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x) \; \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2 x \; \mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \; \mathrm{d}x \\ &= \frac{2x+\sin 2x}{4} - \frac{x+\sin 2x}{4} - \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \; \mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} \; \mathrm{d}x = \frac{x}{4} - \frac{1}{8}\Big[x + \frac{\sin 4x}{4}\Big] = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + \; \mathrm{c}\end{aligned}$$

2.4.2 Intégrales du type $\int \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)} \, \mathrm{d}x$

$$\int P(\cos x, \sin x) \; \mathrm{d}x \qquad \int \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)} \; \mathrm{d}x$$

Les règles de Bioche

On pose $\boxed{\omega(x) = f(x) \; \mathrm{d}x}$, d'où :

$\omega(-x) = -f(-x) \; \mathrm{d}x$, $\qquad \omega(\pi + x) = f(\pi + x) \; \mathrm{d}x$ et $\qquad \omega(\pi - x) = -f(\pi - x) \; \mathrm{d}x$.

On adopte les règles suivantes :

- Si $\omega(-x) = \omega(x)$ alors on pose $u = \cos x$
- Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ alors on pose $u = \sin x$
- Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ alors on pose $u = \tan x$

Exemple 17. Calcul de la primitive $\displaystyle\int \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{2 - \cos^2 x}$.

Posons $\omega(x) = \dfrac{\cos x \, \mathrm{d}x}{2 - \cos^2 x}$. On a alors

$$\omega(\pi - x) = \frac{\cos(\pi - x) \, d(\pi - x)}{2 - \cos^2(\pi - x)} = \frac{(-\cos x) \, (-\mathrm{d}x)}{2 - \cos^2 x} = \omega(x).$$

Le changement de variable $u = \sin x$ implique que $\mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x$. D'où

$$\int \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{2 - \cos^2 x} = \int \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{du}{1 + u^2} = \big[\arctan u \big] = \arctan(\sin x) + c.$$

Le changement de variable $t = \tan \dfrac{x}{2}$

$$\boxed{\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \tan x = \frac{2t}{1 - t^2} \quad \mathrm{d}x = \frac{2 \, \mathrm{d}t}{1 + t^2}}$$

La fonction $x \mapsto \tan \frac{x}{2}$ est une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ vers $[-1, 0]$

Exemple 18.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1 - \sin x} = \int_{-1}^{0} \frac{\frac{2 \, \mathrm{d}t}{1+t^2}}{1 - \frac{2t}{1+t^2}} = 2 \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2 - 2t} = 2 \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{(1 - t)^2} = 2 \left[\frac{1}{1 - t} \right]_{-1}^{0} = 2\big(1 - \frac{1}{2}\big) = 1$$

2.5 Exercices

Exercice 5.

1. Calculer les intégrales à l'aide d'intégrations par parties :
   1- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t \sin t \, \mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \sin t \, \mathrm{d}t$, puis par récurrence $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t^n \sin t \, \mathrm{d}t$.
   2- $\displaystyle\int t \operatorname{sh} t \, \mathrm{d}t$, $\displaystyle\int t^2 \operatorname{sh} t \, \mathrm{d}t$, puis par récurrence $\displaystyle\int t^n \operatorname{sh} t \, \mathrm{d}t$.
2. Calculer les intégrales à l'aide de changements de variable :
   a- $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - t^2} \, \mathrm{d}t$,
   b- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 + \cos t} \, \mathrm{d}t$,
   c- $\displaystyle\int \operatorname{th} t \, \mathrm{d}t$, où $\operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$,
   d- $\displaystyle\int e^{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$.