

Table des matières

3	Intégrales généralisées	1
3.1	Introduction	1
3.2	Définitions	1
3.3	Exemples Fondamentaux	3
3.4	Critères de convergence	3
3.5	Fonctions équivalentes	5
3.6	Exercices	6
3.7	Exercices de Révision	6
3.7.1	Critère de comparaison suite-intégrale.	7
3.7.2	Calcul de $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$	7

Intégrales généralisées

3.1 Introduction

Au chapitre précédent nous avons défini l'intégrale $\int_a^x f(t) dt$ d'une fonction f intégrable sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$. Dans ce chapitre nous allons étudier la possibilité de donner un sens à $\int_a^x f(t) dt$ lorsque la fonction f n'est définie que sur $[a, b[$ (ou sur $]a, b]$ où a et b sont des nombre réels ou désignent $-\infty$ ou ∞).

Exemple 1.

- 1- Pour tout $a > 0$, l'intégrale $\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est bien définie. Quel sens donner à $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$?
- 2- Pour tout $b > 0$, l'intégrale $\int_1^b \frac{1}{x} dx$ est bien définie. Quel sens donner à $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$?

3.2 Définitions

Définition 1. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur tout intervalle $[c, d] \subset [a, b[$.

On appelle **intégrale généralisée** de f sur $[a, b]$ la quantité

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt.$$

Si cette limite **existe** et est **finie**, on dira que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est **convergente**. Autrement, on dira qu'elle est **divergente**.

Exemple 2.

- 1- L'intégrale généralisée $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ est convergente. En effet, on a

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{x^2} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{x} \right]_1^b = 1.$$

2- L'intégrale généralisée $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ est divergente, puisque

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{x} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x]_1^b = \infty.$$

Définition 2. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur tout intervalle $[c, d] \subset]a, b[$.

- 1- S'il existe $b' \in]a, b[$ tel que $\lim_{x \rightarrow a} \int_x^{b'} f(t) dt$ existe et est finie, on la notera $\int_a^{b'} f(t) dt$ et on dira que l'intégrale généralisée $\int_a^{b'} f(t) dt$ est **convergente**. Sinon elle est **divergente**.
- 2- S'il existe $a' \in]a, b[$ tel que $\lim_{x \rightarrow b} \int_{a'}^x f(t) dt$ existe et est finie, on la notera $\int_{a'}^b f(t) dt$ et on dira que l'intégrale généralisée $\int_{a'}^b f(t) dt$ est **convergente**. Sinon elle est **divergente**.

Remarque 1. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur tout intervalle $[c, d] \subset]a, b[$.

- a- S'il existe $a', b' \in]a, b[$ tels que $\int_a^{b'} f(t) dt$ et $\int_{a'}^b f(t) dt$ convergent, alors $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{x' \rightarrow b} \int_x^{x'} f(t) dt = \lim_{x' \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} \int_x^{x'} f(t) dt$. On note cette limite et on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est convergente.
- b- La notation $\int_a^d f(t) dt$, $\int_c^b f(t) dt$ ou $\int_a^b f(t) dt$ désigne une intégrale généralisée mais ne signifie pas qu'elle est convergente.

Exemple 3. Soient $f, g :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = \frac{\ln x}{x}$. Déterminons la nature des intégrales généralisées $\int_0^1 f(t) dt$ et $\int_0^1 g(t) dt$. Soit $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} (1) \int_\epsilon^1 f(t) dt &= 2 \int_{\sqrt{\epsilon}}^1 e^u - 1 du \quad \left(u = \sqrt{t} \text{ et } 2du = \frac{dt}{\sqrt{t}} \right) \\ &= 2 \left[e^u - u \right]_{\sqrt{\epsilon}}^1 = 2(e - 1 - e^{\sqrt{\epsilon}} + \sqrt{\epsilon}) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 2e - 4. \end{aligned}$$

$$(2) \int_\epsilon^1 g(t) dt = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_\epsilon^1 = \frac{-1}{2} (\ln \epsilon)^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\infty.$$

Propriétés

Soient $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur tout intervalle $[c, d] \subset]a, b[$, α un nombre réel et $a', b' \in]a, b[$.

- 1- Si les intégrales généralisées $\int_a^{b'} f(t) dt$ et $\int_a^{b'} g(t) dt$ convergent alors l'intégrale généralisée $\int_a^{b'} (f + g)(t) dt$ est convergente.

- 2- Si les intégrales généralisées les intégrales généralisées $\int_{a'}^b f(t)dt$ et $\int_{a'}^b g(t)dt$ convergent alors l'intégrale généralisée $\int_{a'}^b (f + g)dt$ est convergente.
- 3- Si l'intégrale généralisée de f converge alors l'intégrale généralisée de αf converge.

3.3 Exemples Fondamentaux

Proposition 1. Soit $a > 0$ un réel.

- 1- L'intégrale généralisée $\int_a^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si $\alpha > 1$. Elle est divergente si $\alpha \leq 1$.
- 2- L'intégrale généralisée $\int_0^a \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si $\alpha < 1$. Elle est divergente si $\alpha \geq 1$.

Démonstration.

- 1- Cas où $\alpha \neq 1$. On a $\int \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + C$ donc

$$\int_a^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{1-\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \begin{cases} \infty, & \text{si } \alpha < 1 \\ \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\int_\epsilon^a \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{a^{1-\alpha} - \epsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{si } \alpha < 1 \\ \infty, & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

- 2- Cas où $\alpha = 1$. $\int_\epsilon^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \ln x - \ln \epsilon \xrightarrow{x \rightarrow \infty \text{ ou si } \epsilon \rightarrow 0} \infty$

□

Proposition 2. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur tout intervalle $[c, d] \subset]a, b[$.

Si f admet un prolongement par continuité en a (resp. en b) alors pour tout $a' \in]a, b[$, l'intégrale généralisée $\int_a^{a'} f(t) dt$ (resp. $\int_{a'}^b f(t) dt$) est convergente.

Exemple 4. L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$ est convergente.

3.4 Critères de convergence

Proposition 3. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive et intégrable sur tout intervalle $[c, d] \subset]a, b[$ et soit $a_0 \in]a, b[$.

- 1- L'intégrale généralisée $\int_{a_0}^b f(t) dt$ est convergente si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \int_{a_0}^x f(t) dt$ est majorée sur $]a, b[$.
- 2- L'intégrale généralisée $\int_a^{a_0} f(t) dt$ est convergente si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \int_x^{a_0} f(t) dt$ est majorée sur $]a, b[$.

Démonstration. Si $(x_n)_n$ est une suite croissante vers b , alors la suite $\int_{a_0}^{x_n} f(t) dt$ est croissante et majorée et donc convergente. Donc

$$\int_{a_0}^b f(t) dt = \lim_n \int_{a_0}^{x_n} f(t) dt \text{ est convergente.}$$

□

Théorème 1. Soient $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions positives et intégrables sur tout intervalle $[c, d] \subset]a, b[$ et telles que pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \leq g(x)$. Pour tout $a_0 \in]a, b[$,

- 1- Si $\int_{a_0}^b g(t) dt$ converge alors $\int_{a_0}^b f(t) dt$ converge et on a $\int_{a_0}^b f(t) dt \leq \int_{a_0}^b g(t) dt$.
- 2- Si $\int_{a_0}^b f(t) dt$ diverge alors $\int_{a_0}^b g(t) dt$ diverge.
- 3- Si $\int_a^{a_0} g(t) dt$ converge alors $\int_a^{a_0} f(t) dt$ converge et on a $\int_a^{a_0} f(t) dt \leq \int_a^{a_0} g(t) dt$.
- 4- Si $\int_a^{a_0} f(t) dt$ diverge alors $\int_a^{a_0} g(t) dt$ diverge.

Théorème 2. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur tout intervalle $[c, d] \subset]a, b[$ et soit $a_0 \in]a, b[$.

- 1- Si $\int_{a_0}^b |f(t)| dt$ converge alors $\int_{a_0}^b f(t) dt$ converge et on a $\left| \int_{a_0}^b f(t) dt \right| \leq \int_{a_0}^b |f(t)| dt$.
- 2- Si $\int_a^{a_0} |f(t)| dt$ converge alors $\int_a^{a_0} f(t) dt$ converge et on a $\left| \int_a^{a_0} f(t) dt \right| \leq \int_a^{a_0} |f(t)| dt$.

Définition 3. Lorsque l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(t)| dt$ converge, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente.

Exemple 5.

- 1- L'intégrale généralisée $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$ est convergente.
 - 2- L'intégrale généralisée $\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ est convergente.
 - 3- L'intégrale généralisée $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente.
- En effet, $\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{1 - \cos x}{x} \right]_a^b + \int_a^b \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$.
- 4- L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$ est convergente si $\alpha < 1$.
 - 5- L'intégrale généralisée $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$ est convergente si $\alpha > 1$.

décroissante

Proposition 4. Soit $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positives et continue sur $[a, d]$, $\forall d \in \mathbb{R}$. Si l'intégrale généralisée $\int_a^\infty f(t) dt$ est convergente, alors $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Démonstration. Supposons que $\int_a^\infty f(t) dt$ est converge et que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$. Il existerait donc un réel $\epsilon > 0$ et un réel $A > a$ tels que $\forall x \in [A, \infty[$, $f(x) > \epsilon$. Alors, pour tout $x \in [A, \infty[$, $\int_A^x f(t) dt \geq (x - A)\epsilon \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$. Ce qui est absurde. □

Exemple 6. L'intégrale généralisée $\int_a^\infty \ln(1+t) dt$ n'est pas convergente.

Proposition 5. Soit $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive et intégrable sur $[a, d]$, $\forall d \in \mathbb{R}$, et soit $(x_n)_n \subset [a, \infty[$ une suite croissante et telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$ et $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. Alors on a

$$\int_a^\infty f(t) dt \text{ converge} \iff \text{la suite } (S_n)_n \text{ converge.}$$

De plus, on a $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Démonstration. Il est clair que $S_n \leq \int_{x_1}^{x_{n+1}} f(t) dt \leq \int_{x_1}^\infty f(t) dt$, d'où $\int_{x_1}^\infty f(t) dt$ converge \implies la suite $(S_n)_n$ converge.

D'autre part, pour tout $x \geq a$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \leq x_n$. D'où $\int_a^x f(t) dt \leq \int_a^{x_1} f(t) dt + S_n$ et donc

$$(S_n)_n \text{ converge} \implies \int_a^\infty f(t) dt \text{ converge.}$$

□

Corollaire 1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante et soit a un réel positif. L'intégrale généralisée $\int_a^\infty f(t) dt$ converge si, et seulement si, la suite de terme général $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ converge.

Démonstration. Il suffit de remarquer que, $\forall k \in [n, n+1]$ on a $f(n+1) \leq f(k) \leq f(n)$ et donc

$$\sum_{k=1}^n f(k) \leq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k-1)$$

et d'appliquer la proposition précédente.

□

3.5 Fonctions équivalentes

Définition 4. Soient f et g deux fonctions telles que $f(x)$ et $g(x)$ sont non nuls quand x tend vers x_0 .

On dit que f est équivalente à g quand x tend vers x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On note alors $f(x) \sim_{x_0} g(x)$.

Remarque 2. Dans cette définition x_0 peut désigner un nombre réel ou l'une des entités $-\infty$ ou ∞ .

Exemple 7.

1- $\ln(x) \sim_1 x - 1$.

2- $1 - \cos x \sim_0 x^2/2$.

3- $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, on a alors $f \sim_{\infty} x^n$

Proposition 6. Si $f_1(x) \sim_{x_0} f_2(x)$ et $g_1(x) \sim_{x_0} g_2(x)$ alors

- 1- $f_1(x)g_1(x) \sim_{x_0} f_2(x)g_2(x)$ et
- 2- $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim_{x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$.

Démonstration. La démonstration découle des propriétés des opérations sur les limites. □

Proposition 7. Soient $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions positives et intégrables sur tout $]c, d[\subset]a, b[$ et soit $a' \in]a, b[$ un réel donné.

- 1- Si $f(x) \sim_a g(x)$, alors les intégrales généralisées $\int_a^{a'} f(t) dt$ et $\int_a^{a'} g(t) dt$ convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux.
- 2- Si $f(x) \sim_b g(x)$, alors les intégrales généralisées $\int_{a'}^b f(t) dt$ et $\int_{a'}^b g(t) dt$ convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux.

Démonstration. Nous démontrons la première assertion. La démonstration de la deuxième s'obtient par les mêmes arguments.

On a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, donc $\exists \eta \in]a, b[: x \in]a, \eta[\implies \frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3}{2}$.

Ainsi, $\exists \eta \in]a, b[$ tel que $x \in]a, \eta[\implies \frac{1}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2} g(x)$.

La conclusion découle des résultats sur les comparaisons des intégrales généralisées. □

3.6 Exercices

Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

1- $\int_0^1 \frac{1}{\ln t} dt.$

2- $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t^\alpha} dt, \alpha > 0.$

3- $\int_0^1 \frac{\ln(1+t^\alpha)}{1-\cos t} dt, \alpha > 0.$

4- $\int_2^{\infty} \frac{1}{(\ln t)^2} dt.$

5- $\int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{t}}{\sqrt{t}} dt.$

6- $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^t-1}} dt.$

3.7 Exercices de Révision

Règle de Riemann pour la convergence des intégrales au voisinage de 0 et de $+\infty$.

- $\lim_{\infty} t^\alpha f(t) = l \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$, alors $\int^{\infty} f(t) dt$ converge.

- $\lim_0 t^\alpha f(t) = l \in \mathbb{R}$ et $\alpha < 1$, alors $\int_0 f(t)dt$ converge.
- $\lim_\infty t^\alpha f(t) = l \in]0, +\infty]$ et $\alpha \leq 1$, alors $\int_0^\infty f(t)dt$ diverge.
- $\lim_\infty t^\alpha f(t) = l \in]0, +\infty]$ et $\alpha \geq 1$, alors $\int_0 f(t)dt$ diverge.

3.7.1 Critère de comparaison suite-intégrale.

Rappels

Soit $f : [p, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ localement intégrable, décroissante et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Notons $S_n = f(p) + \dots + f(n)$ et $F(x) = \int_p^x f(t)dt$. On a alors

- 1- (S_n) converge ssi $\int_p^\infty f(t)dt$ converge et
- 2- $\forall n \geq p, S_n - f(p) \leq F(n) \leq S_{n-1}$.

Applications

- a- Pour $\alpha > 0$, étudier la convergence de la suite $S_n(\alpha) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$
- b- (Facultatif) Donner un équivalent simple de la suite $(S_n(\alpha))$, pour chaque $\alpha \in]0, 1]$.

3.7.2 Calcul de $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- i) Montrer que $\forall t \in [0, \sqrt{n}]$, $(1 - \frac{t^2}{n})^n \leq e^{-t^2} \leq (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$

ind. Utiliser la concavité de \ln ou le changement de variables $u = t/\sqrt{n}$

- ii) En déduire que $\int_0^n (1 - \frac{t^2}{n})^n dt \leq \int_0^n e^{-t^2} dt \leq \int_0^\infty (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt$

- c- En déduire que

$$\sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (\sin(\theta))^{2n+1} d\theta \leq \int_0^n e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (\sin(\theta))^{2n-2} d\theta$$

Ind. Faire les changements de variables $t = \sqrt{n} \cos(\theta)$ et $t = \sqrt{n} \cot(s)$

- d- En déduire que $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$.

Ind. La première et la dernière intégrales s inégalités précédentes sont équivalentes à $\sqrt{\pi}/2$ (voir intégrales de Wallis, la Série 3.)