Chapitre 4

Équations Différentielles

4.1 Introduction

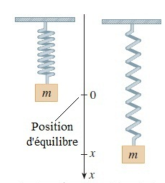
Dans de nombreuses situations, la modélisation mathématique d'un problème naturel prend la forme d'une équation qui contient une fonction inconnue ainsi que quelque une des ces dérivées. Ceci n'a rien de surprenant car souvent ,devant un phénomène qui change constamment, on cherche à prédire le future sur la base du présent. Pour illustrer cela, voici quelques exemples.

Évolution d'une population : Le modèle d'évolution que nous considérons ici suppose que la population croît à un taux proportionnel à sa taille. Cette hypothèse semble raisonnable pour une population qui vit dans des conditions idéales (environnement illimité, nourriture abondante, absence de prédateurs, immunité contre les maladies ...)

Si l'on note $N(t)$ la taille de la population à l'instant t, le taux de croissance de la population est la dérivée $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}(t)$. Notre hypothèse s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}(t) = kN(t), \text{ où } k \text{ est une constante de proportionnalité.}$$

Mouvement d'un ressort : Considérons le mouvement d'un objet de masse m accroché au bout d'un ressort suspendu au dessus du sol.



Les lois de la Physique indiquent que si, à partir de la position d'équilibre, le ressort est soumis à une force qui l'allonge ou le contracte de x unités alors le ressort va exercer une force de réaction F qui est proportionnelle à x : $F = -kx$ où k est la constante de raideur du ressort.

Si l'on ignore toutes les autres forces (résistance de l'air, frottement ...,) alors, by la seconde loi de Newton (Force=masse$\times$accélération), on a : $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t)$.

Dans ce modèle, c'est la dérivée seconde de la position $x(t)$ qui est proportionnelle à $x(t)$.

Définition 1. On appelle *équation différentielle* toute équation qui contient une *fonction inconnue* ainsi que quelques unes de ses dérivées :

$$h(f^{(n)}(x), f^{(n-1)}(x), \dots, f(x), x) = 0,$$

où $h : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, f est la fonction inconnue que l'on cherche à déterminer, $f^{(k)}$ sa dérivée $k^{\text{ème}}$ et x est la variable.

L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre le plus élevé des dérivées citées dans l'équation.

4.1.1 Exemples

Exemple 1.

1- L'équation différentielle $f'(x) + xf(x) = 0$ est du premier ordre.

2- L'équation différentielle $y'' + 2y' + xy - x = 0$ est du second ordre.

3- L'équation différentielle

$$y^{(4)} + \mathrm{e}^{x+1}y'' + xy - \cos x = 0$$

est d'ordre 4.

4.2 Solution d'une équation différentielle du premier ordre

La solution d'une équation différentielle consiste à trouver l'ensemble des fonctions qui la vérifient. L'objet de ce cours est de présenter quelques méthodes classiques de résolution de certains types d'équations différentielles du premier et du second ordre.

Nous allons dans ce paragraphe présenter quelques méthodes de résolution d'équations différentielles de premier ordre.

4.2.1 Équation à variables séparables

Définition 2. Une équation différentielle du premier ordre est une fonction donnée, est dite à variables séparables s'il est possible de l'écrire sous la forme suivante :

$$y'(x)h(y(x)) = g(x),$$

où h et g sont des fonctions connues.

4.2.2 Exemples

Exemple 2.

a- L'équation $y' = xy$ est à variables séparables. En effet, elle peut s'écrire sous la forme $\dfrac{y'}{y} = x$.

b- L'équation $y' = \dfrac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^{y+1}}$ est à variables séparables.

c- L'équation $y' = \sqrt{x} + \mathrm{e}^{y+1}$ est à variables séparables.

solution

Soit $y'(x)h(y(x)) = g(x)$ une équation différentielle à variables séparables. En intégrant, par rapport à x, les membres de l'équation on obtient :

$$\int y'(x)h(y(x))\ \mathrm{d}x = \int g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Ainsi, si l'on note H et G des primitives respectives de h et g, on a :

$$H(y(x)) = G(x) + C.$$

Cette solution implicite peut conduire à une solution explicite.

4.2.3 Exemples

Exemple 3. Résoudre l'équation différentielle $y' = x^2 y$. On a alors

$$\begin{aligned} y' = x^2 y \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = x^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \int \frac{y'}{y}\mathrm{d}x = \int x^2 \mathrm{d}x \\ &\Longrightarrow \quad \ln|y(x)| = \frac{x^3}{3} + C \end{aligned}$$

D'où $y(x) = K \exp \dfrac{x^3}{3}$.

Exemple 4. Résoudre l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{6x^2}{2y + \cos y}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{6x^2}{2y+\cos y} \quad &\Longleftrightarrow \quad (3y + \cos y)\mathrm{d}y = 6x^2 \mathrm{d}x \\ &\Longleftrightarrow \quad \int (3y + \cos y)\mathrm{d}y = \int 6x^2 \mathrm{d}x \\ &\Longrightarrow \quad y^2 + \sin y = 2x^3 + C \end{aligned}$$

On obtient ici une solution implicite.

4.2.4 Équation différentielle linéaire du premier ordre

Définition 3. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation différentielle de la forme $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$, où a et b sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle ouvert donné de $\mathbb{R}$.

L'équation $y'(x) - a(x)y(x) = 0$ est dite homogène. On l'appelle aussi l'équation sans second membre.

Remarque 1. Il est clair qu'une équation différentielle linéaire et homogène est une équation à variable séparables.

4.2.5 Solution

Théorème 1. Soit f_0 une solution particulière de l'équation différentielle $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$. Alors une fonction f est solution de cette équation si, et seulement si, $f - f_0$ est une solution de l'équation sans second membre.

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ Évident.
$\boxed{\Longleftarrow}$ On a $(f - f_0)'(x) = a(x)(f - f_0)(x)$ et $f_0'(x) = a(x)f_0(x) + b(x)$. On obtient le résultat en sommant les membres de ces égalités. □

Remarque 2. Pour résoudre l'équation différentielle linéaire $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$, on procède suivant les étapes suivantes :

1- On résout d'abord l'équation sans second $y'(x) - a(x)y(x) = 0$.

2- On cherche une solution particulière de l'équation $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$.

3- On calcule la somme des deux solutions précédentes et obtient la solution générale.

4.2.6 Exemples

Exemple 1

Soit l'équation différentielle $xy'(x) = y(x) + x^2$. L'équation homogène $xy'(x) - y(x) = 0$ est à variables séparables, donc en séparant les variables puis en intégrant par rapport à x on obtient

$$\ln|y(x)| = \ln|x| + C, \text{ ou encore } \; y(x) = Kx.$$

La fonction $y_0(x) = x^2$ est une solution solution particulière de l'équation.

D'après le théorème précédent, la fonction $f(x) = Kx + x^2$ est la solution générale.

4.3 Méthode du facteur d'intégration

Exemple 5. Considérons l'équation différentielle suivante : $xy' + y = 2x$. Pour $x \neq 0$, cette équation linéaire s"écrit aussi : $y' + \frac{1}{x}y = 2$.

Cette équation n'est pas à variables séparables, mais en remarquant que $xy' + y = (xy)'$ on peut la réécrire sous la forme $(xy)' = 2x$ et la résoudre en intégrant les membres de l'égalité par rapport à x.

On obtient alors $xy = x^2 + C$ ou encore, pour $x \neq 0$, $y = x + \frac{C}{x}$, où C est une constante.

Est-il possible de généraliser la technique de l'exemple précédent ? En d'autres termes, pour l'équation différentielle linéaire

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \tag{4.1}$$

existe t-il une fonction $I(x)$ telle que

$$I(x)(y'(x) + a(x)y(x)) = (I(x)y(x))'? \tag{4.2}$$

Si oui, l'équation (4.1) s'écrit $(I(x)y)' = I(x)b(x)$. En intégrant par rapport à x, on obtient $I(x)y(x) = \int I(x)b(x)\ \mathrm{d}x + C$. D'où la solution

$$y(x) = \frac{1}{I(x)}\Big[\int I(x)b(x)\ \mathrm{d}x + C\Big]$$

Définition 4. La fonction $I(x)$ qui vérifie l'équation (4.2) s'appelle le facteur d'intégration de l'équation différentielle.

4.3.1 Détermination du facteur d'intégration

En développant l'équation (4.2) on obtient, après simplification, $I(x)a(x) = I'(x)$. En séparant les variables, et en intégrant les membres de l'équation on obtient $I(x) = A\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}$, où A est une constante. Pour simplifier, on peut prendre $A = 1$ et obtenir une fonction vérifiant l'équation (4.2). Pour résoudre l'équation différentielle linéaire $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ on multiplie les deux membres de l'équation par $I(x) = \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}$ puis on intègre par rapport à x.

Exemple 6. Résoudre $y'(x) + 3x^2y(x) = 6x^2$.

Soit $I(x) = \mathrm{e}^{\int 3x^2\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x^3}$. L'équation s'écrit alors $(\mathrm{e}^{x^3}y(x))' = \mathrm{e}^{x^3}6x^2$. D'où, en intégrant par rapport à x, on obtient

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x^3}\int 6x^2\mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}x = 2 + C\mathrm{e}^{-x^3}, \text{où } C \text{ est une constante.}$$

Nous avons donc démontré le résultat suivant :

Proposition 1. Soient $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Les solutions de l'équation différentielle $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ sont les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ de la forme
$\boxed{y(x) = (B(x) + C)\mathrm{e}^{-A(x)}}$,

où $A(x) = \int a(t)\ \mathrm{d}t,\ B(t) = \int b(t)\mathrm{e}^{A(t)}\ \mathrm{d}t$ et C est une constante réelle.

4.3.2 Exercices

1- Trouver la solution de l'équation différentielle $x^2y' + xy = 1$ définie pour $x > 0$ et vérifiant $y(1) = 2$.

2- Résoudre l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.

3- Résoudre l'équation différentielle $x^2y' + 2xny = \cos^2 x$.

4- Résoudre l'équation différentielle $y' = x + y$ sous la condition $y(0) = 2$.

4.4 Méthode de la variation de la constante

Soit l'équation différentielle $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$, où $a, b : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

La méthode de la variation de la constante, pour résoudre cette équation, consiste à :

1- Trouver la solution de l'équation homogène $y'(x) + a(x)y(x) = 0$. Notons y_0 cette solution.

2- Trouver une solution particulière, de l'équation $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$, de la forme $y_p(x) = u(x)y_0(x)$, où $u : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable.

D'une part, y est solution de l'équation $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ si, est seulement si, $y = y_0 + y_p$ et d'autre part on a $y_0(x) = \mathrm{e}^{-\int a(t)\ \mathrm{d}t}$.

La méthode de la variation de la constante est donc un moyen pour déterminer une solution particulière.

La solution $y_p = u(x)y_0$ vérifie l'équation $y_p' + a(x)y_p = b(x)$. Or $y_p' = u'(x)y_0 + u(x)y_0'$. En remplaçant dans l'équation précédente, on obtient $u'(x)y_0 = b(x)$, d'où

$$\boxed{u(x) = \int \frac{b(x)}{y_0(x)}\mathrm{d}x.}$$

Exemple 7. Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = \frac{xy}{1+x^2} + x.$$

La solution de l'équation homogène $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{x}{1+x^2}$ est donnée par $y_0(x) = C\sqrt{1+x^2}$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

Une solution particulière de (E) est donnée par $y_p(x) = u(x)\sqrt{1+x^2}$, où $u(x) = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + C$.

Ainsi la solution générale de (E) est donnée par

$$y(x) = C\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2, \text{ où } C \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

4.5 Équation différentielle de $2^{\text{ème}}$ ordre à coefficients constants

Définition 5. On appelle équation différentielle de second ordre à coefficients constants toute équation de la forme $y'' + by' + cy = a(x)$, où $a : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et b et c sont des constantes réelles.

Pour résoudre une telle équation, on procède en deux étapes :

1- On cherche la solution y_0 de l'équation sans second membre, puis

2- une solution particulière y_p de l'équation avec second membre.

La solution générale est donnée par $y = y_0 + y_p$.

4.5.1 Résolution de $y'' + by' + cy = 0$

Définition 6. Une solution de l'équation différentielle $y'' + by' + cy = 0$ st une fonction réelle y deux fois dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $y''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$.

Proposition 2. Si y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation différentielle $y'' + by' + cy = 0$ et si α et β sont des nombres réels, alors la fonction $\alpha y_1 + \beta y_2$ est aussi solution de cette équation.

La démonstration de cette proposition est évidente.

Remarque 3. Il est évident que la fonction nulle $y \equiv 0$ est solution de l'équation. Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + by' + cy = 0$ est un sous-espace de l'espace vectorielle des fonctions réelles.

Définition 7. L'équation $r^2 + br + c = 0$ s'appelle l'*équation caractéristique* de l'équation différentielle $y'' + by' + cy = 0$.

Théorème 2. Si r est une solution de l'*équation caractéristique*, alors la fonction $y(x) = \mathrm{e}^{rx}$ est une solution de l'équation différentielle.

Proposition 3. Soit l'équation différentielle $y'' + by' + cy = 0$.

1- Si l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de l'équation sont les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $y(x) = C_1\mathrm{e}^{r_1 x} + C_2\mathrm{e}^{r_2 x}$, où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

2- Si l'équation caractéristique a une racine réelles double r, alors les solutions de l'équation sont les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $y(x) = C_1 x\mathrm{e}^{rx} + C_2\mathrm{e}^{rx}$, où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

3- Si l'équation caractéristique a deux racines complexes distinctes $r_1 = \alpha + \imath\beta$ et $r_2 = \alpha - \imath\beta$, alors les solutions sont les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\Big(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\Big)$, où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

Démonstration de 1-

Si r_1 et r_2 sont deux racines distinctes de l'équation caractéristique $r^2+br+c=0$ alors $r_1+r_2=-b$ et $r_1r_2 = c$. Donc l'équation s'écrit $y'' + (r_1 + r_2)y' + r_1r_2y = 0$. Soit y une fonction deux fois dérivable et soit f la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-r_1x}y(x)$. On a donc $y'(x) = (f'(x) + r_1f(x))\mathrm{e}^{r_1x}$ et $y''(x) = (f''(x) + 2r_1f'(x) + r_1^2f(x))\mathrm{e}^{r_1x}$. D'où $y'' + (r_1+r_2)y' + r_1r_2y = (f''(x) + (r_1-r_2)f'(x))\mathrm{e}^{r_1x}$. Ainsi y est solution de l'équation si, et seulement si, $f''(x) + (r_1 - r_2)f'(x) = 0$, donc si, et seulement si, f' est solution de $y' + (r_1 - r_2)y = 0$. Donc $f'(x) = C_1\mathrm{e}^{(r_1-r_2)x}$, d'où $f(x) = \dfrac{C_1}{r_1-r_2}\mathrm{e}^{r_2x} + C_2$ et donc

$y(x) = \dfrac{C_1}{r_1-r_2}\mathrm{e}^{r_2x} + C_2\mathrm{e}^{r_1x}$, où C_1 et C_2 sont deux constantes. □

Démonstration de 2-

Suivant les mêmes étapes du cas précédent, on voit que y est solution de l'équation si, et seulement si, f est solution de l'équation $y'' = 0$. D'où $f(x) = C_1x + C_2$, et donc $y(x) = C_1x\mathrm{e}^{rx} + C_2\mathrm{e}^{rx}$

Démonstration de 3-

Il suffit de reprendre les étapes de la démonstration de 1-. Les détails sont laissés en exercice.

Exemple 8. Résoudre l'équation différentielle

1- $y'' + y' - 6y = 0$

2- $4y'' + 12y' + 9y = 0$

2- $y'' - 6y' + 13y = 0$

4.6 Résolution de l'équation avec second membre

4.6.1 Résolution de l'équation $y'' + by' + cy = h(x)$

Considérons $(E)\quad y'' + by' + cy = h(x)$ où h est une fonction connue.

Théorème 3. La solution générale y de (E) est la somme de la solution générale y_0 de l'équation homogène et d'une équation particulière y_p de (E).

Démonstration. Une fonction y est solution de (E) si, et seulement si,

$$y'' + by' + cy = y_p'' + by_p' + cy_p.$$

Donc, si et seulement si, $y - y_p = y_0$. □

Proposition 4. Soit $P(x)$ un polynôme. L'équation $(E) \quad y'' + by' + cy = P(x)\mathrm{e}^{rx}$ admet comme solution particulière la fonction $y_p(x) = Q(x)\mathrm{e}^{rx}$, où $Q(x)$ est un polynôme tel que :

1- deg(Q)=deg(P), si r n'est pas une racine de l'équation caractéristique.

2- deg(Q)=deg(P)+1, si r est une racine simple de l'équation caractéristique.

3- deg(Q)=deg(P)+2, si r est une racine double de l'équation caractéristique.

Exemple 9. Soit l'équation $y'' + b^2y = \cos(\omega x)$, où $b > 0$ et $\omega > 0$ sont deux constantes données.

Pour trouver une solution particulière, nous allons chercher une solution particulière dans $\mathbb{C}$ de l'équation $y'' + b^2y = \mathrm{e}^{\imath\omega x}$ puis nous restreindre à sa partie réelle.

Les racines de l'équation caractéristique sont $\imath b$ et $-\imath b$

Exemple 10.

1- Si $\omega \neq b$ alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = C\mathrm{e}^{\imath\omega x} = C\cos\omega x + \imath C\sin\omega x$.

2- Si $\omega = b$ alors $\imath\omega$ est une racine simple de l'équation caractéristique. On cherche alors une solution particulière de la forme $y_p(x) = Cx\mathrm{e}^{\imath\omega x}$.

4.6.2 Exemples

Définition 8. Une **équation de Bernoulli** est une équation différentielle de la forme :

$$(\mathrm{E}_B) \qquad y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha},$$

où $a, b : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables et à dérivées continues et α est un nombre réel différent de 1.

Remarque 4. En effectuant le changement de variables $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$, on a

$$(\mathrm{E}_B) \iff \frac{z'}{1-\alpha} = a(x)z + b(x).$$

Définition 9. Une **équation de Riccati** est une équation différentielle de la forme :

$$(\mathrm{E}_R) \qquad y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x),$$

où $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables et à dérivées continues.

Remarque 5. Si y_p est une solution particulière de (E_R), alors en effectuant le changement de variables $z(x) = y(x) - y_p(x)$ on obtient

$$(\mathrm{E}_R) \Longleftrightarrow z'(x) = [a(x) + 2b(x)y_p(x)]z(x) + b(x)z^2(x),$$

qui est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$.

4.6.3 Un exemple d'équation d'Euler

Résoudre l'équation différentielle d'Euler $\left\{\begin{aligned} x^2y'' + xy' + y = & \; 0 \\ y(1) = & \; 1 \\ y'(1) = & \; 0 \end{aligned}\right.$

Nous allons procéder au changement de variable $t = \ln(x) \Longleftrightarrow x = \mathrm{e}^t$. L'équation différentielle devient alors : $(\mathrm{e}^t)^2 y''(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t) + y(\mathrm{e}^t) = 0$, où $y' = \dfrac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, \mathrm{e}^t}$ et $y'' = \dfrac{\mathrm{d}^2\, y}{(\mathrm{d}\, \mathrm{e}^t)^2}$. Posons alors $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$, de sorte que $z'(t) = \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t)$ et $z''(t) = z'(t) + \mathrm{e}^{2t} y''(\mathrm{e}^t)$. En reportant dans l'équation différentielle précédente, on obtient $z'' + z = 0$.

On a donc $z(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ ou encore $y(x) = C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x$. Compte tenu des conditions initiales on trouve que $y(x) = \cos \ln x$ est une solution.