- Proposition 1 :

$f :]a,b] \to \mathbb{R}$ integrable

$\hookrightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ convergente si f admet un prolongement par continuité en a (resp en b)

$\hookrightarrow (\lim_a f(t) = a \;,\; \lim_b f(t) = b)$ prolongement en a et en b.

- Proposition 2 :

- $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction positive et integrable

soit $f(t) \leq g(t) \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.

- si $\int_a^b g(t)\,dt$ convergente

Alors, $\hookrightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ convergente.

- Si $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge Alors $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge.

- Proposition 3 : $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ fonction integrable.

- $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ converge

et on $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$.

- on dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente

Scanné avec CamScanner

$\to f : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, continue tq $\lim_{\infty} f(t)$ existe et $\int_a^{\infty} f(t)dt$ convergente d'

Alors $\lim_{\infty} f(t) = 0$.

• Propositions :

Soient $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$. 2 fonctions positives et intégrables.

Si $f(x) \underset{\substack{a \\ \text{ou } b}}{\sim} g(x)$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ et

$\int_a^b g(t)dt$ convergent toutes les 2 ou

divergent toutes les 2.

f est équivalent à g si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

• Proposition 6 :

$\lim_{\infty} t^{\alpha} f(t) = I \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1 \Rightarrow \int^{\infty} f(t)$ converge

$\lim_{\infty} t^{\alpha} f(t) = I \in]0, +\infty[$ et $\alpha \leq 1 \Rightarrow \int^{\infty} f(t)dt$ diverge

$\lim_{0} t^{\alpha} f(t) = I \in \mathbb{R}$ et $\alpha < 1 \Rightarrow \int_0 f(t)dt$ converge

$\lim_{0} t^{\alpha} f(t) = I \in]0, +\infty[$ et $\alpha \geq 1 \Rightarrow \int_0 f(t)dt$ diverge

* $2^{ème}$ ordre

$$ay'' + by' + cy = d(x).$$

+ Ecrire l'equation homogéne : $ay'' + by' + cy = 0$ (H)

↳ ①: Trouver la solution homogène..

(H) d'equation caractéristique associée

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

- calculons $\Delta = b^2 - 4ac$.

- $\Delta > 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\boxed{y_h = Ae^{x_1 x} + Be^{x_2 x}}$$

- $\Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$

$$\boxed{y_h = (Ax + B)e^{x x}}$$

- $\Delta < 0 \Rightarrow x_1 = \alpha + i\beta$, $x_2 = \alpha - i\beta$.

$\alpha = \frac{-b}{2a}$, $\beta = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$$\boxed{y_h = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta . x))}$$

* Techniques d'intégration :

- **Par partie :**

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

* **ALPES :**
A = Arctan, Arsin, Arcos, Argsh, Argch
L = ln, log.
P = Polynôme
E = exp, a^x.
S = sin, cos, tan, ch, sh.

* u prend la valeur petit.

- **Changement de variable :**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

On pose $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)\,dt.$

$\Rightarrow f(x)\,dx = f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt.$

$x \longrightarrow \varphi(t) \begin{cases} a \to \varphi(a) \\ b \to \varphi(b). \end{cases}$

* **Primitives :**

- $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
- $\int e^x\,dx = e^x + c$
- $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c.$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

- $\int \frac{dx}{x^2+1} = \text{Arctan}(x) + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arcsin}(x) + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \text{Argsh}(x) + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \text{Argch}(x) + c.$

$\rightarrow \int \sin^m(x)\cos^n(x)\,dx.$

- $\rightarrow$ si $n = 2k+1.$

$\int \sin^m(x)\cos^{2k}(x)\cos(x)\,dx$

$\int \sin^m(x)(1-\sin^2(x))^k\cos(x)\,dx$

- $\rightarrow$ si $m = 2k+1$

$\int \cos^n(x)\sin^{2k+1}(x)\,dx$

$\int \cos^n(1-\cos^2(x))^k\sin(x)\,dx$

- $\int \sin^m(x)\cos^n(x)\,dx =$ si $m = 2k$ et $n = 2k.$

* On utilise les identités suivantes.

$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$

$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x).$

$\rightarrow \int \frac{P(\cos(x),\sin(x))}{Q(\cos(x),\sin(x))}\,dx.$

* Règles de bioche : $w(x) = f(x)\,dx.$

- si $w(-x) = -f(-x)\,dx = w(x)$ poser $u = \cos(x).$
- si $w(\pi-x) = -f(\pi-x)\,dx = w(x)$ poser $u = \sin(x).$
- si $w(\pi+x) = f(\pi+x)\,dx = w(x)$ poser $u = \tan(x).$

* changement de variable : $(t = \tan\frac{x}{2})$. $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

- $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, • $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, • $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$

$\sqrt{ax^2+bx+c}$.

- $\sqrt{\alpha^2-x^2}$ $\Downarrow$ $x=\alpha\sin t$
- $\sqrt{x^2-\alpha^2}$ $\Downarrow$ $x=\alpha\,\mathrm{ch}\,t$
- $\sqrt{x^2+\alpha^2}$ $\Downarrow$ $x=\alpha\,\mathrm{sh}\,t$

*Intégrale généralisée :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\alpha\to b}\int_a^\alpha f(t)\,dt.$$

Si cette limite existe et est finie. $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ est convergente, Autrement elle est divergente.

- Si $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ convergent.

  $\hookrightarrow \int_a^b (f+g)(t)\,dt$ convergente.

  $\hookrightarrow \int_a^b \alpha f(t)$ convergente

- Soit $a>0$. réel.

- $\int_a^{\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \begin{cases} \to \text{convergente si } (\alpha>1) \\ \to \text{divergente si } (\alpha\leq 1) \end{cases}$

- $\int_0^a \frac{1}{t^\alpha}\,dt \begin{cases} \to \text{convergente si } (\alpha<1) \\ \to \text{divergente si } (\alpha\geq 1) \end{cases}$

→② Trouver la solution particulière

• $f(x) = e^{mx} \cdot P_n(x)$.

↳ m n'est pas racine de EC.

$$\boxed{y_p = e^{mx} Q_n(x)}$$

↳ m est racine de EC.

$\Delta > 0$, racine simple $\Rightarrow \boxed{y_p = e^{mx} \cdot x\, Q_n(x)}$

$\Delta = 0$; racine double $\Rightarrow \boxed{y_p = e^{mx} \cdot x^2 Q_n(x)}$

• $f(x) = e^{mx} \cdot P_n(x) \cdot \cos(\theta x)$ ou $(\sin(\theta x))$

↳ $m + i\theta$ n'est pas racine de EC.

$$\boxed{y_p = e^{mx} \cdot Q_n(x) \cos(\theta x)} \text{ ou } \sin(\theta x)$$

↳ $m + i\theta$ est racine de EC.

$$\boxed{y_p = e^{mx} \cdot x \cdot Q_n(x) \cos(\theta x)} \text{ ou } \sin(\theta x)$$

↳③ La solution générale :

$$\boxed{y_g = y_h + y_p}$$

L'equation différentielles

1er ordre :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

- Ecrire l'equation homogène : $a(x)y' + b(x)y = 0$.

↳ ① Trouver la solution homogène y_h,

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$

$$\boxed{y_h = \alpha e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}}$$

↳ ② Trouver la solution particulière.

+ par vérification : (Mq $g(x) = y_p$ est s. particulière)

- "remplaçons $g(x)$ dans (E)."

+ par la variation de la constante,

posons $\boxed{y_p = \alpha(x) e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}}$

on cherche $\alpha(x) = ??$, $y_p'(x) = \_\_$

- remplaçons ds E.

↳ ③. La solution générale.

$$\boxed{y_g = y_p + y_h}$$

Scanné avec CamScanner

a Equation de bernoulli.

$$y' - G(x)\,y = F(x)\,y^{\alpha} \qquad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1)$$

- Ch. variable $z = y^{1-\alpha}$.

$$\boxed{y^{-\alpha} y' - G(x)\, y^{-\alpha} \cdot y = F(x)}$$

Scanné avec CamScanner