

Equation différentielles du second ordre

①

à coefficients constants

I) Equation diff de 1^{er} ordre

ED à variable séparable:

$$y' = A(x) \cdot B(y)$$

$$A(x) \cdot B(y) dx + C(x) D(y) dy = 0$$

On a: $y' = \frac{dy}{dx}$ I dé

$$\Rightarrow f(x) dx = g(y) dy$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \int g(y) dy$$

$$\Rightarrow F(x) = G(y) + C$$

$$\Rightarrow y = f(x)$$

Exemple

$$\Rightarrow 1) y' = e^{x-y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$\Rightarrow e^y dy = e^x dx$$

$$\Rightarrow \int e^y dy = \int e^x dx$$

$$\Rightarrow e^y = e^x + C$$

$$\Rightarrow y = \ln(e^x + C)$$

$$2) y' = x y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = x dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow |y| = e^{\frac{x^2}{2} + C} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^C$$

$$\Rightarrow y = \pm e^C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow y = K \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \text{ avec } K = \pm e^C$$

$$3) xy dx + (1+x^2) dy = 0$$

$$\Rightarrow (1+x^2) dy = -xy dx$$

$$\Rightarrow (1+x^2) \frac{dy}{y} = -x dx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-x}{1+x^2} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-x}{1+x^2} dx$$

Sol:

$$1) xy' - y = x^2 \cos(x) \quad (E) \quad \boxed{x \neq 0}$$

E.H. $xy' - y = 0$

Solution homogène:

$$x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow |y| = e^C |x|$$

$$\Rightarrow y = \pm e^C |x|$$

$$\Rightarrow y = K |x|$$

$$\Rightarrow y = \pm Kx$$

$$\Rightarrow y = Cx$$

donc $\boxed{y_h = Cx}$

Solution particulière:

$$y_p = C(x) \cdot x$$

$$\text{Alors } y_p' = C'(x)x + C(x)$$

On remplace dans (E)

Alors:

$$x^2 C'(x) + x C(x) - x C(x) = x^2 \cos(x)$$

$$\Rightarrow x^2 C'(x) = x^2 \cos(x) \quad (3)$$

puisque $x \neq 0$.

$$\text{Alors } C'(x) = \cos(x)$$

$$\text{donc } C(x) = \sin(x)$$

$$\text{donc } \boxed{y_p = x \sin(x)}$$

Solution générale

$$\boxed{y_g = Cx + x \sin(x)}$$

$$2) y' - a \frac{y}{x} = x^a e^x \quad (E)$$

$$a \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}^*$$

* Solution homogène

$$y' - a \frac{y}{x} = 0$$

$$\Rightarrow y' = a \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = a \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = a \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = a \ln|x| \Rightarrow \ln|y| = \ln|x|^a$$

$$\Rightarrow |y| = |x|^a \cdot K$$

$$(3) \Rightarrow y = \pm e^K \cdot x^a \Rightarrow \boxed{y = C \cdot x^a}$$

II) Equation différentielles du second ordre à coefficients constants:

$$a y'' + b y' + c y = f(x)$$

avec $(a \neq 0)$

Solution homogène :

$$a y'' + b y' + c y = 0$$

Equation caractéristique:

$$P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta > 0 \Rightarrow \gamma_1$ et γ_2

$$\Rightarrow y_H = A e^{\gamma_1 x} + B e^{\gamma_2 x}$$

Si $\Delta = 0 \Rightarrow \gamma_0$ (racine double)

$$\Rightarrow y_H = (Ax + B) e^{\gamma_0 x}$$

Si $\Delta < 0$ $\gamma = \alpha \pm i\beta$

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \gamma_2 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_H = e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x))$$

Exemple: 1) $y'' - 2y' - 3y = 0$

On obtient $y = A e^{-x} + B e^{3x}$

2) $4y'' - 4y' + y = 0$

On obtient: $y_H = (Ax + B) e^{\frac{1}{2}x}$

$$3) y'' - 2y' + y = 0$$

$$y_H = e^x (A \cos(x) + B \sin(x))$$

Solution particulière

$$a y'' + b y' + c y = f(x)$$

$$f(x) \begin{cases} \rightarrow \cos(x) \\ \rightarrow e^{\lambda x} P_n(x) \\ \rightarrow e^{\lambda x} P_n(x) \cos(x) \end{cases}$$

Si non on utilise
* Méthode "Variation des constantes"

$$y_p = A(x) y_1(x) + B(x) y_2(x)$$

$$\begin{cases} A'(x) y_1(x) + B'(x) y_2(x) = 0 \\ A'(x) y_1'(x) + B'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

Solution générale

$$y_G = y_H + y_p$$

Exemple:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}$$

sol homogène

$$y'' + y = 0 \quad \Delta < 0$$

$$y_H = A \cos(x) + B \sin(x)$$

Solution particulière

$$y_p = A(x) \cos(x) + B(x) \sin(x)$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} A'(x) \cos(x) + B'(x) \sin(x) = 0 \\ A'(x) \sin(x) + B'(x) \cos(x) = \frac{1}{\cos(x)} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} A'(x) \cos(x) + B'(x) \sin(x) = 0 \\ A'(x) \sin(x) + B'(x) \cos(x) = \frac{1}{\cos(x)} \end{cases}$$

$$B'(x) = 1 \Rightarrow \boxed{B(x) = x}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow A'(x) = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\Rightarrow A(x) = \ln(|\cos(x)|)$$

$$\text{Donc } y_p = \ln(|\cos(x)|) \cos(x) + x \sin(x)$$

$$\text{Alors } \boxed{y = y_p + y_H}$$

Résolution : $ay'' + by' + cy = f(x)$

$$\text{Si } f(x) = e^{Kx} (A_1 \cos(\omega x) + A_2 \sin(\omega x))$$

Si $K \pm i\omega$ n'est pas racine de (EC)

$$\text{Alors } y_p = e^{Kx} (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))$$

Si $K \pm i\omega$ racine de (EC)

$$y_p = x e^{Kx} (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))$$

$$\text{Si } f(x) = P(x) e^{Kx}$$

Si K pas racine de (EC)

$$y_p = Q(x) e^{Kx} \quad (\text{avec } \deg(Q) = \deg(P))$$

Si K racine simple de (EC)

$$y_p = x Q(x) e^{Kx}$$

Si K racine double de (EC)

$$y_p = x^2 Q(x) e^{Kx}$$

$$\text{Si } f(x) = e^{\alpha x} R(x)$$

On cherche une solution particulière de (E)

$$y_p = e^{\alpha x} x^S Q(x)$$

$$S = \begin{cases} 0 & \text{Si } P(\alpha) \neq 0 \\ 1 & \text{Si } P(\alpha) = 0 \text{ et } P'(\alpha) \neq 0 \\ 2 & \text{Si } P(\alpha) = 0 \text{ et } P'(\alpha) = 0 \text{ et } P''(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C$$

$$\Rightarrow |y| = e^C \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow y = \pm e^C \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y = \frac{K}{\sqrt{1+x^2}}$$

avec $K = \pm e^C$

$$4) (x^2-1)y' = y$$

$$\Rightarrow (x^2-1) \frac{dy}{dx} = y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

$$\Rightarrow |y| = \sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} \cdot e^C$$

$$\Rightarrow y = \pm e^C \sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}$$

$$\Rightarrow y = K \sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} \quad (2)$$

ED Linéaires du 1^{er} ordre

$$a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

$a(x) \neq 0$

On a a et b et f continue sur I

• Intervalle de résolution:

$$J = I \cap \{x \in \mathbb{R} / a(x) \neq 0\}$$

• Solution homogène (SSM):

$$y_H = C e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}$$

$$y_H = C \cdot f(x)$$

• Solution Particulière (MVC)
(méthode de Lagrange)

$$y_P = C(x) \cdot f(x)$$

$$y'_P = C'(x) \cdot f(x) + C(x) \cdot f'(x)$$

• Solution Générale

$$y_G = y_H + y_P$$

Exemple

$$1) xy' - y = x^2 \cos(x)$$

$$2) y' - a \frac{y}{x} = x^a e^x$$

(2)

* Solution particulière

$$y_p = C(x) x^a$$

$$\text{avec } y_p' = C'(x) x^a + C(x) x^{a-1}$$

On remplace dans (E)

$$C'(x) x^a + a x^{a-1} C(x) - a x C(x) = x^a e^x$$

$$\Rightarrow C'(x) x^a = x^a e^x$$

$$\Rightarrow C'(x) = e^x$$

$$\Rightarrow C(x) = e^x$$

$$\text{d'où } y_p = e^x x^a$$

Alors :

$$y_g = y_p + y_h$$

$$\Rightarrow y_g = C x^a + e^x x^a$$

* Equation de Bernoulli

$$(B) : a(x) y' + b(x) y = c(x) y^\alpha$$

On se ramène à une équation linéaire du premier ordre en multipliant (B) par $y^{-\alpha}$

Exemple

$$(A) y' + x y + 2 x y^2 = 0$$

$$(B) y' + x y = -2 x y^2$$

$$(C) x y^{-2} \quad \hookrightarrow y^{-2} y' + x y^{-1} = -2 x$$

On pose que $z = y^{-1}$

$$z' = -y^{-2} y'$$

$$-z' + 2 x z = -2 x$$

$$z_h = K e^{x^2}$$

$$z_p = -x e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2}$$

$$z = K e^{x^2} - x e^{-x^2} - \frac{e^{-x^2}}{2}$$

$$\text{d'où } z = y^{-1} \Rightarrow y = \frac{1}{z}$$

$$y = \frac{1}{2 K e^{x^2} - 2 x e^{-x^2} - e^{-x^2}}$$

* Equation de Riccati

$$(R) : y' + a(x) y + b(x) y^2 + c(x) = 0$$

si l'intégration n'est possible que si l'on connaît une solution particulière y_p

Résolution

On se ramène à une équation de Bernoulli on pose que $y(x) = y_p + z(x)$