Université Mohammed V de Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 2020/21
SMIA-S2
M8 : Analyse 2
Série 1

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

(1) $\displaystyle\int_0^1 x\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$; (3) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^4}{x^{10}+1}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^4+x^3-x+1}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$; (5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x$;

(6) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sinh x\cosh^3 x}\,\mathrm{d}x$; **Ind**. Utiliser l'extension de la règle de Bioche aux fonctions hyperboliques.

(7) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{a+b\cos x}\,\mathrm{d}x$; avec $a>b>0$ (8) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\cos 2x\,\mathrm{d}x$;

Exercice 2. Calculer les primitives suivantes : $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$, $\displaystyle\int \frac{\sin x}{2+\sin^2 x+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3. (Intégrales de Wallis). Soit $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$ et que $I_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}I_{n-1}$. En déduire I_{2p} et I_{2p+1} en fonction de p.
2. Montrer que I_{n+1} est équivalent à I_n. En déduire que I_n est équivalent à $\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ et la formule de Wallis

$$\sqrt{\pi}=\lim_{p\to\infty}\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!\sqrt{p}}=\lim_{p\to\infty}\frac{2\cdot 4\ldots(2p)}{3\cdot 5\ldots(2p-1)}\cdot\sqrt{\frac{2}{2p+1}}.$$

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}-x-1, & \text{si } -3\le x\le 0\,;\\ -\sqrt{1-x^2}, & 0\le x\le 1.\end{cases}$ Calculer $\displaystyle\int_{-3}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 5. Soient a un réel srtictement positif et :

$$I_n(a)=\int_0^1 \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx.$$

1. Calculer $I_1(a)$
2. Trouver une relation de récurrence entre $I_n(a)$ et $I_{n+1}(a)$. En déduire $I_2(a)$.