Université Mohammed V de Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Université Mohammed V, Rabat	**Semestre 2, *2021***
Faculté des Sciences	SMIA. Analyse 2.
Département de Mathématiques	Deuxième partie du corrigé de ***la série 2***

Exercice 3.

1. Montrer qu'il existe une fonction $g : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ continue, bornée et telle que

$$\forall x \geq 1, \quad \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\sin(x)} = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2(x)}{x} + \frac{\sin^3(x)}{x\sqrt{x}}\, g(x).$$

2. Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\text{a)} \int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x. \qquad \text{b)} \int_1^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

3. Déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\sin(x)} \mathrm{d}x.$

Solution.

1. Tout d'abord remarquons que

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2(x)}{x} &= \frac{x\sin(x) - \sqrt{x}(\sqrt{x}+\sin(x))\sin(x) + \sin^2(x)(\sqrt{x}+sin(x))}{x(\sqrt{x}+\sin(x))} \\ &= \frac{\sin^3(x)}{x(\sqrt{x}+\sin(x))}. \end{aligned}$$

À partir de là on peut déduire que

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sin(x)}.$$

Il est claire que g est une fonction continue sur $[1, +\infty[$. De plus on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$ donc on peut conclure que la fonction g est bornée. En effet, il suffit d'utiliser la définition de la limite ; ainsi pour $\varepsilon = 1$, il existe $A > 1$ tel que $|g(x)| < 2$ pour tout $x \in]A, +\infty[$. Sur le ségement $[1, A]$ la fonction bornée car elle est continue. D'où la fonction g est bornée sur $[1, +\infty[$.

2. a) Etudions la convergence de l'intégrale $\int_1^\infty \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. Remarquons d'abord que la fonction

$$x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

est continue sur $[1, +\infty[$, donc le problème se pose seulement au voisinage de $+\infty$.

Maintenant, une intégration par parties nous donne

$$\int_1^t \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos(x)}{\sqrt{x}}\right]_1^t - \int_1^t \frac{\cos(x)}{2x^{3/2}}\mathrm{d}x$$

D'une part, la limite $\left[\dfrac{-\cos(x)}{\sqrt{x}}\right]_1^t$ existe quand t tend vers $+\infty$ car

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} = 0.$$

D'autre part, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(x)}{2x^{3/2}}\mathrm{d}x$ est convergente. En effet, la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{x^{3/2}}$ est continue donc localement intégrable sur $[1, +\infty[$ et

$$|\frac{\cos(x)}{x^{3/2}}| \leq \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Comme on a vu dans le cours l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^{3/2}}\mathrm{d}x$ converge car c'est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 3/2 > 1$. Donc d'après un critère de comparaison (voir le cours) on a la convergence absolue et par suite la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(x)}{2x^{3/2}}\mathrm{d}x$.

b) Etudions la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin^2(x)}{x}\mathrm{d}x$. Soulignons d'abord que la fonction sous signe intégrale est continue donc il suffit de voir la nature de cette inégrale au voisinage de $+\infty$. Observons que

$$\frac{\sin^2(x)}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos(2x)}{2x}.$$

D'une part, il est claire que $\int_1^\infty \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann divergente (car $\alpha = 1 \leq 1$).

D'autre part, la méthode utilisée dans la question précédante "a)" permet de déduire la convergence de l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{\cos(2x)}{2x}\mathrm{d}x.$$

Faites le, sinon voir le text suivant : On a la fonction $x \mapsto \frac{\cos(2x)}{2x}$ est une fonction continue sur $[1, +\infty[$, donc le problème se pose seulement au voisinage de $+\infty$. En faisant une intégration par parties, on obtient $\int_2^t \frac{\cos(x)}{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(x)}{x}\right]_2^t + \int_2^t \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x$. Premièrement

$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\sin(t)}{t}=0$. Deuxièment $\int_2^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ est une intégrale convergente car $|\frac{\sin(x)}{x^2}|\leq\frac{1}{x^2}$ et on sait que $\int_2^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha=2>1$).

Conlusion : $\int_1^{\infty}\frac{\sin^2(x)}{x}\mathrm{d}x$ est une intégrale divergente comme somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale divergente

3. Maintenant on nous demande de déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\sin(x)}\mathrm{d}x$

On a déjà montrer dans "1." que pour tout $x\geq 1$, on a

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\sin(x)}=\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}-\frac{\sin^2(x)}{x}+\frac{\sin^3(x)}{x\sqrt{x}}\,g(x).$$

Premièrement $x\to\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\sin(x)}$ est une fonction continue sur $[1,+\infty[$ donc le problème se pose seulement en $+\infty$.

On a déjà montré dans "2." que $\int_1^{\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ est une intégrale convergente tandis que $\int_1^{\infty}\frac{\sin^2(x)}{x}\mathrm{d}x$ est une intégrale divergente. Donc il reste à étudier la convergence de

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^3(x)}{x\sqrt{x}}\,g(x)\mathrm{d}x.$$

On sait bien que g est bornée, donc il existe un nombre réel $M>0$ tel que $|g(x)|\leq M$ pour tout $x\geq 1$. Donc

$$\left|\frac{\sin^3(x)}{x\sqrt{x}}\,g(x)\right|\leq\frac{M}{x^{3/2}}.$$

La convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^{3/2}}\mathrm{d}x$ nous permet de conclure que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^3(x)}{x\sqrt{x}}\,g(x)\mathrm{d}x$$

converge absolument, donc elle converge.

Conclusion : 'intégrale $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\sin(x)}\mathrm{d}x$ est une inégrale divergente comme somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale divergente

Exercie 4.

a- Etudier la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}}{x}\,\mathrm{dx}$.

b- Si cette intégrale est convergente, calculer sa valeur.

Solution.

1. On va déterminer la nature de l'intégrale généralisée :

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\mathrm{d}x.$$

Soit a un réel fixé tel que $a>0$.

<u>Au voisinage de 0 :</u>

Il est clair que la fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$ est intégrable sur tout intervalle $[b, c] \subset]0, a]$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} &= \lim_{x\to 0} \Big[- \frac{e^{-x}-1}{-x} + 2\frac{e^{-2x}-1}{-2x} \Big] \\ &= -1+2 \\ &= 1.\end{aligned}$$

<u>Autre méthode de calcul de la limite :</u> $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$.

Au voisinage de 0, on a $e^{-2x} = 1 - 2x + o(x)$ et $e^{-x} = 1 - x + o(x)$. Donc,

$$e^{-x} - e^{-2x} = (1-x) - (1-2x) + o(x) = x + o(x).$$

Autrement dit, $\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} = 1 + o(1)$. Par conséquent :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} = 1.$$

La fonction $x \to \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$ est donc prolongeable par continuité en 0. Il en résulte que :

$$\text{L'intégrale } \int_0^a \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} dx \text{ converge.}$$

<u>Au voisinage de $+\infty$:</u>

Soit

$$I_a = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} \mathrm{d}x,$$

et Posons

$$I_1 = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \text{ et } I_2 = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x} \mathrm{d}x.$$

Pour $x \geq a$, on a

$$0 < \frac{e^{-x}}{x} \leq \frac{e^{-x}}{a} \text{ et } 0 < \frac{e^{-2x}}{x} \leq \frac{e^{-2x}}{a}.$$

Comme les deux intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{a} dx$ et $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{a} dx$ convergent (Pourquoi ?), alors par le critère de comparaison, I_1 et I_2 convergent. Donc, $I_a = I_1 - I_2$ converge.

<u>Conclusion :</u> L'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} dx$$

converge.

2. Soit $a > 0$ et notons toujours par I_a l'intégrale

$$I_a = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} \mathrm{d}x.$$

Comme les deux intégrales $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x$ et $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x} \mathrm{d}x$ convergent, et comme

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x} \mathrm{d}x &= \lim_{A \to +\infty} \int_a^{A} \frac{e^{-2x}}{x} \mathrm{d}x \\ &= \lim_{A \to +\infty} \int_{2a}^{2A} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t \qquad \text{(par le changement de variable } t = 2x) \\ &= \int_{2a}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned} I_a &= \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x} \mathrm{d}x \\ &= \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x - \int_{2a}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x \\ &= \int_a^{2a} \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Maintenant, puisque la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $[a, 2a]$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est intégrable positive sur $[a, 2a]$, d'après la première formule de la moyenne, il existe $c_a \in [a, 2a]$ tel que :

$$\begin{aligned} I_a = \int_a^{2a} \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x &= e^{-c_a} \int_a^{2a} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \\ &= e^{-c_a} \Big(\ln(2a) - \ln(a) \Big). \\ &= e^{-c_a} \ln(2) \end{aligned}$$

Comme c_a tend vers 0 quand a tend vers 0, on en déduit que

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a \to 0} I_a \\ &= \lim_{a \to 0} e^{-c_a} \ln(2) \\ &= \ln(2). \end{aligned}$$

<u>Autre méthode de calcul de la limite :</u> $\lim_{a \to 0^+} I_a = \int_a^{2a} \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x$.

$$I_a = \int_a^{2a} \frac{e^{-x} - 1}{x} \mathrm{d}x + \int_a^{2a} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}-1}{x}$ est prolongeable par continuité au point 0, donc l'intégrale $\int_0^t \dfrac{e^{-x} - 1}{x} \mathrm{d}x$ converge pour tout nombre réel t et la fonction $F : t \mapsto \int_0^t \dfrac{e^{-x} - 1}{x} \mathrm{d}x$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'où

$$\lim_{a \to 0} F(2a) - F(a) = F(0) - F(0) = 0.$$

Pour conclure il suffit de voir que pour tout $a > 0$, on a

$$I_a = F(2a) - F(a) + \int_a^{2a} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = F(2a) - F(a) + \ln(2a) - \ln(a) = F(2a) - F(a) + \ln(2).$$