

Série 3. Les équations différentielles

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles

$$*(x^3 - x)y' - (x^2 - x - 1)y = 0$$

$$x^3 - x = 0 \text{ alors } y = 0$$

$$I_1 =]-\infty, -1[; I_2 =]-1, 0[; I_3 =]0, 1[; I_4 =]1, +\infty[$$

$$x \in I_1 \text{ ou } x \in I_2, \text{ ou } x \in I_3, \text{ ou } x \in I_4$$

$$y' = \frac{x^2 - x - 1}{x^3 - x} y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x^2 - x - 1}{x^3 - x} dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \text{cte}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \text{cte}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \ln(k)$$

$$y = kx \left|\frac{x+1}{x-1}\right| \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x^2 - x - 1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -1 \\ C &= 1 \end{aligned} \quad = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$* y' - y - \frac{x^2}{y} = 0$$

Équation de Bernoulli $y' = y + x y^{-2} \quad (x \neq -1)$

$$xy' + a(x)y = p(x)e^{w(x)}$$

On fait le changement de variable

$$x \cdot w \neq a \quad y_p = q(x) e^{w(x)} \quad dr = dq$$

$$z = y^{1+\alpha} = y^{1+1} = y^2$$

$$w = a \quad y_p = x q(x) e^{w(x)}$$

$$z' = 2yy'$$

$$y'y - y^2 = x^2 \Rightarrow \frac{z'}{2} - z = x^2 \Rightarrow z' - 2z = 2x^2$$

1^{ère} étape : solution de l'équation sans second membre

$$\frac{z'}{2} - z = 0$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int 2 dx$$

$$z = k e^{2x} \quad k \in \mathbb{R}$$

2^{ème} étape : solution particulière

La méthode de la variation de la constante

$$z_p = h(x) e^{2x}$$

$$z'_p = h'(x) e^{2x} + 2h(x) e^{2x}$$

1^{ère} étape : eq. sans second membre

$$-2u^2 - u(1 + 2x \tan x) = 0$$

$$\int \frac{du}{u} = \int -\frac{1 + 2x \tan x}{x} dx$$

$$\ln |u| = -\ln |x| - 2 \ln |\cos x| + \ln C$$

$$u = \frac{C \cos^2(x)}{x}$$

2^{ème} étape : solution particulière

On va utiliser la méthode de la variation des constantes.

$$z = y - x \tan x$$

$$z = \frac{1}{u} \quad + 2u' + u(1 + x \tan x) = -1$$

On cherche une solution particulière de la forme $U_p = \frac{k(x) \cdot \cos^2(x)}{x}$

$$U_p' = k'(x) \frac{\cos^2(x)}{x} + k(x) \left[\frac{(-1)2 \cos x \sin x \cdot x - \cos^2 x}{x^2} \right]$$

$$k' \cos^2(x) - \frac{k(x)}{x} [2x \cos x \sin x + \cos^2(x)] + \frac{k(x)}{x} [\cos^2(x) + 2x \sin x \cos x] = -1$$

$$k' \cos^2(x) = -1 \quad k' = \frac{-1}{\cos^2 x} \quad k = -\tan x$$

$$U_p = \frac{-\tan x \cos^2 x}{x} = \frac{-\sin x \cos x}{x}$$

3^{ème} étape : solution générale.

$$U = \frac{k \cos^2 x}{x} - \frac{\sin x \cos x}{x}$$

$$z = \frac{x}{k \cos^2 x - \sin x \cos x}$$

$$y = \frac{x}{k \cos^2 x - \sin x \cos x} + x \tan x$$

Exercice 3:

$$y'' - y = \cos x \quad P(x)e^{ax} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

1^{ère} étape : Équation homogène

$$y'' - y = 0$$

$$\text{équation caractéristique } r^2 - 1 = 0 \quad r_1 = 1 \text{ ou } r_2 = -1$$

$$y_0 = A e^x + B e^{-x}$$

$$ay'' + by' + cy = P(x) e^{ax}$$

• si on est pas sol de l'éq. car. $y_p = Q(x)e^{ax}$

• si est solution simple de l'éq. caract. $y_p = x Q(x)e^{ax}$

• si est solution double de l'éq. car. $y_p = x^2 Q(x)e^{ax}$

$$d^2 P, d^2 Q$$

$$k'e + 2ke^{2x} - 2ke^{2x} = 2x^2$$

$$k' = 2x^2 e^{-2x}$$

$$k = \int 2x^2 e^{-2x} dx$$

$$y_p = -\frac{1}{2} (2x^2 + 2x + 1)$$

3^{ème} étape: Solution générale.

$$z = ke^{2x} - \frac{1}{2} (2x^2 + 2x + 1)$$

$$y^2 = ke^{2x} - \frac{1}{2} (2x^2 + 2x + 1) \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$y = \sqrt{ke^{2x} - \frac{1}{2} (2x^2 + 2x + 1)} \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$+ y' = x + y \frac{y+y^2}{x} \quad (3) \quad (\text{Équation de Riccati})$$

(Vérifier que $x \tan x$ est une solution particulière)

$$y_p = x \tan x \quad y'_p = \tan x + x(1 + \tan^2 x)$$

$$x + \frac{x \tan x + x^2 \tan^2 x}{x} = x + \tan x + x \tan^2 x = y'_p$$

donc $y_p = x \tan(x)$ est une solution particulière de (3)

On fait le changement de variable: $z = y - y_p$

$$y = z + y_p \quad y' = z' + \tan x + x(1 + \tan^2 x)$$

$$z' + \tan x + x(1 + \tan^2 x) = x + \frac{z + x \tan x + (z + x \tan x)^2}{x}$$

$$z' + \tan x + x + x \tan^2 x = x + \frac{z + x \tan x + z^2 + 2xz \tan x + x^2 \tan^2(x)}{x}$$

$$z' = \frac{z(1 + 2x \tan x) + z^2}{x}$$

c'est une équation de Bernoulli $\alpha = 2$

On fait le changement de variable

$$J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow J_2 \rightarrow J_3 \rightarrow J_4 \rightarrow J_5 \rightarrow J_6 \rightarrow J_7 \rightarrow J_8 \rightarrow J_9 \rightarrow J_{10} \rightarrow J_{11} \rightarrow J_{12} \rightarrow J_{13} \rightarrow J_{14} \rightarrow J_{15} \rightarrow J_{16} \rightarrow J_{17} \rightarrow J_{18} \rightarrow J_{19} \rightarrow J_{20} \rightarrow J_{21} \rightarrow J_{22} \rightarrow J_{23} \rightarrow J_{24} \rightarrow J_{25} \rightarrow J_{26} \rightarrow J_{27} \rightarrow J_{28} \rightarrow J_{29} \rightarrow J_{30} \rightarrow J_{31} \rightarrow J_{32} \rightarrow J_{33} \rightarrow J_{34} \rightarrow J_{35} \rightarrow J_{36} \rightarrow J_{37} \rightarrow J_{38} \rightarrow J_{39} \rightarrow J_{40} \rightarrow J_{41} \rightarrow J_{42} \rightarrow J_{43} \rightarrow J_{44} \rightarrow J_{45} \rightarrow J_{46} \rightarrow J_{47} \rightarrow J_{48} \rightarrow J_{49} \rightarrow J_{50} \rightarrow J_{51} \rightarrow J_{52} \rightarrow J_{53} \rightarrow J_{54} \rightarrow J_{55} \rightarrow J_{56} \rightarrow J_{57} \rightarrow J_{58} \rightarrow J_{59} \rightarrow J_{60} \rightarrow J_{61} \rightarrow J_{62} \rightarrow J_{63} \rightarrow J_{64} \rightarrow J_{65} \rightarrow J_{66} \rightarrow J_{67} \rightarrow J_{68} \rightarrow J_{69} \rightarrow J_{70} \rightarrow J_{71} \rightarrow J_{72} \rightarrow J_{73} \rightarrow J_{74} \rightarrow J_{75} \rightarrow J_{76} \rightarrow J_{77} \rightarrow J_{78} \rightarrow J_{79} \rightarrow J_{80} \rightarrow J_{81} \rightarrow J_{82} \rightarrow J_{83} \rightarrow J_{84} \rightarrow J_{85} \rightarrow J_{86} \rightarrow J_{87} \rightarrow J_{88} \rightarrow J_{89} \rightarrow J_{90} \rightarrow J_{91} \rightarrow J_{92} \rightarrow J_{93} \rightarrow J_{94} \rightarrow J_{95} \rightarrow J_{96} \rightarrow J_{97} \rightarrow J_{98} \rightarrow J_{99}$$

$$u = z^{1-\alpha} = z^{-1}$$

$$z = \frac{1}{u} \quad z' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$-x \frac{u'}{u^2} = \frac{1}{u} (1 + 2x \tan x) + \frac{1}{u^2}$$

$$-x u' - u(1 + 2x \tan x) = 1$$

Solution générale :

$$y_0 = A e^x + B e^{2x} - \frac{1}{m^2 - 3m + 2}$$

$y(0)$
 $y'(0)$

→ In $m=1$

$$y_p = a x e^x : y_p' = a(1+x)e^x : y_p'' = a(2+x)e^x$$

$$a(2+x-3-3x+2x)e^x = e^x$$

$$-a = 1 \quad a = -1 \quad y_p = -x e^x$$

$$y_0 = A e^x + B e^{2x} - x e^x$$

de $m=2$

$$-z + z^2 = x^2$$

1^{ère} étape : E.S.S.M.

$$-z' + z = 0 \quad z = k e^x$$

2^{ème} étape : solution particulière

$$z_p = k(x) e^x \quad z_p' = k' e^x + k e^x$$

$$-k' e^x - k e^x + k e^x = x$$

$$k' = -x^2 e^{-x}$$

double intégration par parties

$$z_p = x^2 + 2x + 2$$

3^{ème} étape : solution générale

$$z_0 = k e^x + x^2 + 2x + 2$$

$$y' - y = -x^2 y^2 = 0$$

équation de Bernoulli $\alpha=2$

On fait le changement de variable

$$z = y^{1-2} = y^{-1}$$

$$y = \frac{1}{z} \quad y' = -\frac{z'}{z^2}$$

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z} - x^2 \frac{1}{z^2} = 0$$

$$-z' + z = x^2$$

$$z = k e^x + x^2 + 2x + 2$$

$$y(x) = \frac{1}{k e^x + x^2 + 2x + 2}$$

$$y(0) = \frac{1}{3}$$

$$y(0) = \frac{1}{k+2} = \frac{1}{3}$$

$$a = -\frac{1}{2} \quad \&$$

$$y_p = -\frac{1}{2} \cos x$$

3^{ème} étape solution générale: $y = Ae^x + Be^{-x} - \frac{1}{2} \cos x.$

b) En déduire toutes les fcts $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont dérivables et vérifiant l'équation

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) - \int_0^x f(t) dt = \cos x$$

Potons: $y = \int_0^x f(t) dt$ y vérifie $y(0) = 0$

$$y'' - y = \cos x$$

$$\begin{cases} y = Ae^x + Be^{-x} - \frac{1}{2} \cos x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$A+B - \frac{1}{2} = 0 \quad B = \frac{1}{2} - A$$

$$y = Ae^x + \left(\frac{1}{2} - A\right)e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x$$

$$f(x) = y'(x) = Ae^x - \left(\frac{1}{2} - A\right)e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^{mx}$$

solution de l'eq. homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$

l'équation caractéristique: $r^2 - 3r + 2 = 0 \quad r_1 = 1 \quad r_2 = 2$

$$y_0 = Ae^x + Be^{2x}$$

solution particulière: si $m \neq 1$ et $m \neq 2$

$$y_p = a e^{mx} \quad ; \quad y_p' = am e^{mx} \quad ; \quad y_p'' = am^2 e^{mx}$$

$$(am^2 e^{mx} - 3am e^{mx} + 2a e^{mx}) = e^{mx}$$

$$a(m^2 - 3m + 2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{m^2 - 3m + 2} \quad ; \quad y_p = \frac{1}{m^2 - 3m + 2} e^{mx}$$