Cours d'analyse 3

Omar El-Fallah et Youssef Elmadani

Plan

- Fonctions convexes

Fonctions convexes

Tout d'abord, on cherchera à se familiariser avec la notion de la convexité, et ensuite nous allons établir le lien avec les fonctions dérivables. Rappelons que pour tous points $a, b \in I$ tels que $a \leq b$

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{(1-\lambda)a + \lambda b \ : \ \lambda \in [0,1]\} \\ &= \{\lambda a + (1-\lambda)b \ : \ \lambda \in [0,1]\} \\ &= \{\lambda_1 a + \lambda_2 b \ : \ \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1] \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}. \end{aligned}$$

Definition

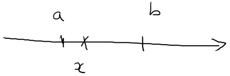
On dit que f est convexe sur I si pour tous points $x, y \in I$ et tout scalaire $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

On dit aussi que f est concave sur I si pour tous points $x, y \in I$ et tout scalaire $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

On remarque que si $-f$ est convexe alors f est concave.



$$x_\lambda = (1-\lambda)a + \lambda b \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

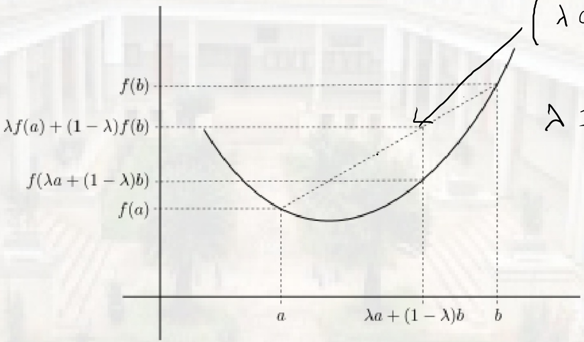
$$\lambda = 0 \qquad x_0 = a \qquad \lambda = 1 \; ; \quad x_1 = b$$

$$\lambda = \,? \; ; \qquad x = a + \lambda(b-a)$$

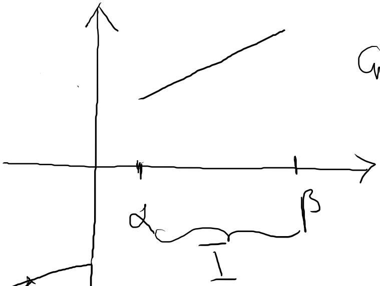
$$0 \leqslant \lambda = \frac{x-a}{b-a} \leqslant 1$$

paramétrisation de $[a,b]$

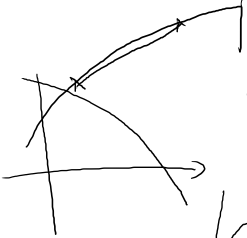
Représentation graphique d'une fonction convexe



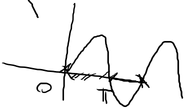
$\left(\lambda a + (1-\lambda) b,\ \lambda f(a) + (1-\lambda) f(a)\right)$



Concave et Convexe

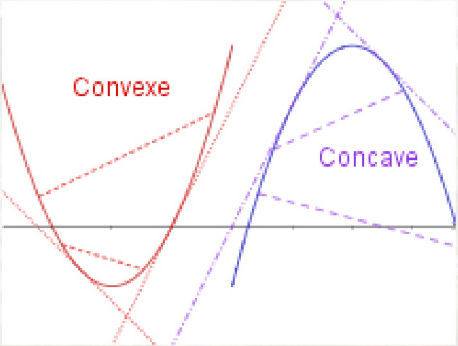


Concave

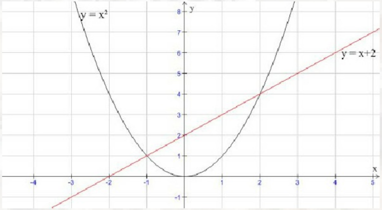


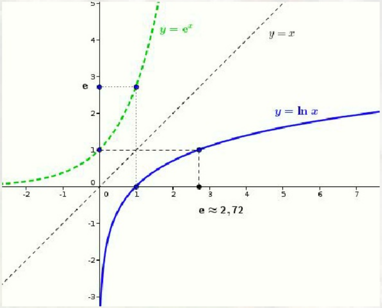
ni convexe ni concave sur $\mathbb{R}_+$

Représentation graphique d’une fonction convexe et concave



Exemples

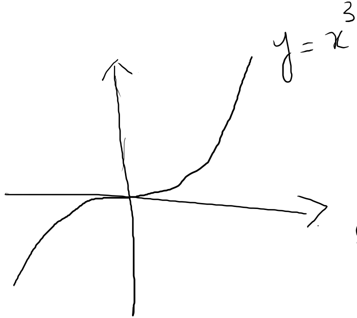




Questions

Déterminer géométriquement lesquelles des fonctions suivantes sont convexes

1. $f(x) = e^x$, si $x \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = x^2$, si $x \in \mathbb{R}$.
3. $f(x) = x^3$, si $x \in \mathbb{R}$.
4. $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(-1) = f(1) = 2$ et $f(x) = x^2$, si $x \in]-1, 1[$
5. $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(-1) = f(1) = 0$ et $f(x) = -x^2$ si $x \in]-1, 1[$



sur $\mathbb{R}_+$ convexe.

sur $\mathbb{R}_-$ concave

sur $\mathbb{R}$ rien du tout.

Exercice

Soit f une fonction réelle et convexe sur I.

1. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout points $x, y \in I$ et tout scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ vérifiant $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, on a

$$f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \leq \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y).$$

$\lambda_2 = 1 - \lambda_1$

$$f(\lambda_1 x + (1-\lambda_1) y)$$

$$\leq \lambda_1 f(x) + \underbrace{(1-\lambda_1)}_{\lambda_2} f y$$

L'inégalité de Jensen

Théorème

Une fonction f est convexe sur un intervalle I si et seulement si pour tout points $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$ et tout scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in [0,1]$ vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i), \qquad (1)$$

où $n \geq \cancel{1}\,2$ est un entier naturel, c'est l'inégalité de Jensen.

Démonstration

~~Pour $n = 1$, l'inégalité de Jensen est trivial, sans même supposer la convexité de f.~~
Pour $n \geq 2$, nous allons la montrer par récurrence. Remarquons que pour $n = 2$, l'inégalité (1) n'est autre que la définition de la convexité. Supposons maintenant que (1) est bien réalisé pour un entier fixe $n \geq 2$, et montrons la pour $n + 1$. Pour cela, on considère des points $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} \in I$ et des scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_{n+1} \in [0, 1]$ vérifiant $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Dans le cas où $\lambda_{n+1} = 0$, on en déduit le résultat trivialement de notre hypothèse de récurrence. Dans le cas où $\lambda_{n+1} \neq 0$, il est claire que

$$\alpha_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \neq 0$$

On pose

$$X_n = \frac{\lambda_n}{\alpha_n} x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\alpha_n} x_{n+1}.$$

Puisque

$$\frac{\lambda_n}{\alpha_n} + \frac{\lambda_{n+1}}{\alpha_n} = 1,$$

donc $X_n \in I$ et d'après notre hypothèse de récurrence

$$f(X_n) \leq \frac{\lambda_n}{\alpha_n} f(x_n) + \frac{\lambda_{n+1}}{\alpha_n} f(x_{n+1}). \qquad (2)$$

$\forall\ x_1, —, x_{n+1} \in I \quad \lambda_1, —, \lambda_{n+1} \in [0,1]$ tq $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$

? $f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$

$$\left(\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

$$= (1-\lambda_{n+1}) x + \lambda_{n+1} y$$

$$(y = x_{n+1}) \quad ; \quad x = \frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n}{1-\lambda_{n+1}}$$

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1}) = f\left((1-\lambda_{n+1}) x + \lambda_{n+1} y\right)$$

$$\leq (1-\lambda_{n+1}) f(x) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$f(x) = f\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n\right) \leq$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = \frac{1}{1-\lambda_{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \frac{1-\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+1}} = 1\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i)$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq (1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i &= \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_i + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1}x_{n+1}\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_i + \alpha_n X_n.\end{aligned}$$

Maintenant, nous appliquons encore une fois notre hypothèse de récurrence au points $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, X_n \in I$ et aux scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_{n-1}, \alpha_n \in [0,1]$, nous obtenons

$$\begin{aligned}f\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_i + \alpha_n X_n\right)\\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i f(x_i) + \alpha_n f(X_n). \qquad (3)\end{aligned}$$

Les inégalités (2) et (3) nous donne

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f(x_i).$$

Ceci termine la démonstration de l'inégalité de Jensen.

Exemple

1. Pour tout points $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Exemple

1. Pour tout points $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

La démonstration repose sur le fait que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe puisque $f"(x) = 2 \geq 0$. Il suffit maintenant d'appliquer l'inégalité de Jensen pour tout scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in [0, 1]$ vérifiant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on obtient alors

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2,$$

et puis considérer le cas particulier lorsque $\lambda_k = \dfrac{1}{n}$.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \qquad x_k \in \mathbb{R}$$

$$\Big(\sum \underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\lambda_k} x_k\Big)^2 = f\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big) \quad \big(f(x) = x^2\big)$$

Puisque f est convexe sur $\mathbb{R}$ et $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$

Alors

$$f\Big(\sum_1^n \lambda_k x_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

$$\Big(\sum_1^n \frac{1}{n} x_k\Big)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

$$\frac{1}{n^2}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

Donc

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2 \leq n \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \quad \blacksquare$$

$$(x_1 + x_2)^2 = 2x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 = \sum_i \sum_j x_i x_j$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j$$

$$\sum_{i=j} x_i^2 + \Big(\sum_{i \neq j} x_i x_j\Big)$$

Critères de convexité

La démonstration de la propriété suivante est à obtenir directement de la définition.

Critère de la pente croissante.

La fonction f est convexe sur I si et seulement si pour tout point $z \in I$, la fonction ϕ_z définie par

$$\phi_z(x) = \frac{f(x) - f(z)}{x - z}, \qquad x \in I \setminus \{z\}, \tag{4}$$

est croissante.

Démonstration

Supposons que la fonction f est convexe sur I, et montrons que ϕ_z est croissante sur $I \setminus \{z\}$, pour chaque $z \in I$.

Fixons $z \in I$, et soit $x, y \in I \setminus \{z\}$. Si $x < y < z$, on prend $\lambda = \dfrac{z-x}{z-x} \in]0,1[$ et $1-\lambda = \dfrac{y-x}{z-x}$. On donc

$$f(y) = f(z+y-z) = f(z+\lambda(x-z)) = f((1-\lambda)z+\lambda x) \leq (1-\lambda)f(z)+\lambda f(x)$$

d'où

$$f(y)-f(z) \leq \lambda(f(x)-f(z))$$

ou encore

$$\frac{f(x)-f(z)}{x-z} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

Le cas $z < x < y$ se traite de façon analogue et si $x < z < y$ alors ce dernier cas permet d'écrire

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

d'où

$$(y - x)(f(z) - f(x)) \leq (z - x)(f(y) - f(x)) =$$
$$= (z - x)(f(y) - f(x)) = (z - x)(f(y) - f(z)) + (z - x)(f(z) - f(x)).$$

On a donc

$$(y - z)(f(z) - f(x)) = [(y - x) - (z - x)](f(z) - f(x)) \leq (z - x)(f(y) - f(z))$$

d'où

$$\frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

ce qui achève la preuve de la croissance de l'application ϕ_z.

Inversement, le résultat est évident si l'on est dans l'un des cas suivants : $x = y, \lambda = 0, \lambda = 1$. On peut donc supposer $x \neq y$ et $\lambda \in]0, 1[$.
Si $x < y$ alors $x < \lambda x + (1 - \lambda)y < y$ d'où $\lambda x + (1 - \lambda)x \in I$ et $\phi_x(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \phi_x(y)$ ce qui s'écrit :

$$\frac{f(\lambda x + (1 - \lambda)y) - f(x)}{(1 - \lambda)(y - x)} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

d'où $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.
Si $y < x$ alors $\mu = (1 - \lambda) \in]0, 1[$ et ce qui précède permet d'écrire :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = f(\mu y + (1 - \mu)x) \leq \mu f(y) + (1 - \mu)f(x) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Critère de la dérivée seconde.

Proposition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La fonction f est convexe si et seulement si la fonction f' est croissante.

Corollaire

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I.

Exercices

Montrer que :

1. La fonction $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $f(x) = \ln x$, $x \in]0, +\infty[$, est concave sur $]0, +\infty[$.
3. La fonction $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, est convexe sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction $f(x) = \cos(x)$, $x \in [0, \pi/2]$, est concave sur $[0, \pi/2]$.
5. La fonction $f(x) = \sin(x)$, $x \in [0, \pi]$, est concave sur $[0, \pi]$.