Chapitre 2

Formules de Taylor - Développements limités

2.1 Formules de Taylor

2.1.1 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 2.2 (Formule de Taylor-Lagrange)**.**

Soient a et b deux nombres réels, tels que $a < b$, et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$, tel que

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \end{aligned}$$

Dans ce cas, la quantité $\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$ est appelée reste de Lagrange.

Preuve

On considère la fonction $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - A(b-x)^{n+1}$$

où A est une constante qui sera choisis de telle manière que $\varphi(a) = 0$.

Comme f est $n+1$ fois dérivable sur $[a,b]$, alors φ est dérivable sur $[a,b]$ et on a

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= -\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}+A(n+1)(b-x)^n\\
&= -\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^{k}+A(n+1)(b-x)^n\\
&= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n+A(n+1)(b-x)^n
\end{aligned}$$

De plus on a $\varphi(a)=\varphi(b)=0$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c\in]a,b[$, tel que $\varphi'(c)=0$. Donc, on aura $-\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n+A(n+1)(b-c)^n=0$, par suite, $A=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$. Ainsi, on aura

$$0=\varphi(a)=f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-a)^k-\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)}$$

Par conséquent, on a

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)}$$

Remarques

1. La démonstration précédente ne dépend pas du fait que $a<b$, donc aussi si $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c\in]a,b[$, tel que

$$f(a)=f(b)+f'(b)(a-b)+\frac{f''(b)}{2!}(a-b)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(a-b)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(a-b)^{n+1}$$

2. Si $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$, alors pour tout $x\in]a,b]$,il existe $c_x\in]a,x[$, tel que

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Exemples

1. Soit $f(x)=\sin x$, alors on sait que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R},\ \begin{cases} f^{(2n)}(x)=(-1)^n\sin x\\ f^{(2n+1)}(x)=(-1)^n\cos x\end{cases}$$

En particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $f^{(2n)}(0)=0$ et $f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$.
Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, f est de classe $\mathscr{C}^{2n+1}$ sur $[0,x]$ (ou $[x,0]$) et $2n+2$

fois dérivable sur $]0,x[$ (ou $]x,0[$), donc d'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c_x \in]0,x[$ (ou $c_x \in]x,0[$), tel que

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(0) + \sin'(0)x + \frac{\sin''(0)}{2!}x^2 + \frac{\sin^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\sin^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \frac{\sin^{(2n+2)}(c_x)}{(2n+2)!}x^{2n+2} \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \frac{(-1)^{n+1}\cos c_x}{(2n+2)!}x^{2n+2}\end{aligned}$$

2. Si $f(x) = \cos x$, alors on sait aussi que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x \\ f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \sin x \end{cases}$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$ et $f^{(2n+1)}(0) = 0$.
Donc de la même manière, on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, il existe $c_x \in]0,x[$ (ou $c_x \in]x,0[$), tel que

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^{2n+1}\sin c_x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

3. Soit $f(x) = \mathrm{e}^x$, alors on sait que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$ et en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(0) = 1$. Donc de la même manière, on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, il existe $c_x \in]0,x[$ (ou $c_x \in]x,0[$), tel que

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{\mathrm{e}^{c_x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

2.2.1 Formule de Taylor-Maclaurin

Lemme 2.3.

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x \in [a,b] \Longleftrightarrow \exists \theta \in [0,1] \text{ tel que } x = a + \theta(b-a)$$

Preuve
Soit $x \in [a,b]$. Montrons qu'il existe $\theta \in [0,1]$, tel que $x = a + \theta(b-a)$.
Soit $\theta = \dfrac{x-a}{b-a}$, comme $x - a \leq b - a$ et comme $x - a \geq 0$ et $b - a > 0$, alors $\theta \in [0,1]$ et on a $x = a + \theta(b-a)$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $\theta \in [0,1]$, tel que $x = a + \theta(b-a)$, alors on a $x - a = \theta(b-a)$ et puisque $\theta \geq 0$ et $b - a > 0$, alors $x - a \geq 0$.
On a aussi $b - x = (1-\theta)(b-a)$ et comme $1 - \theta \geq 0$, alors $b - x \geq 0$.

Théorème 2.4.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur I. Alors pour tout $a \in I$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$, tel que $a+h \in I$, il existe $\theta \in]0,1[$, tel que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

Preuve

Le résultat de ce théorème est une conséquence de la formule de Taylor-Lagrange. En effet, pour $a \in I$ il suffit de prendre $b = a+h$ et d'appliquer la formule de Taylor-Lagrange, donc il existe c compris strictement entre a et $a+h$, tel que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

c compris strictement entre a et $a+h$, donc d'après le lemme précédent, il existe $\theta \in]0,1[$, tel que $c = a+\theta h$ ou $c = a+(1-\theta)h$ suivant le signe de h.

Dans le cas particulier où $a = 0$, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 2.5 (Formule de Maclaurin)**.**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, avec $0 \in I$, et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur I. Alors pour tout $x \in I$, il existe $\theta \in]0,1[$, tel que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Exemples

1. Pour $n = 3$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il exste $\theta_x \in]0,1[$, tel que $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{\sin(\theta_x x)}{24}x^4$

2. Pour $n = 4$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il exste $\theta_x \in]0,1[$, tel que $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{\sin(\theta_x x)}{120}x^5$

3. Pour $n = 5$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il exste $\theta_x \in]0,1[$, tel que
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{exp(\theta_x x)}{720}$

2.5.1 Formule de Taylor-Young

Théorème 2.6 (Formule de Taylor-Young)**.**

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors pour tout $x \in I$, on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n)$$

Preuve

Soit $x \in I$, avec $x \neq a$, alors on peut supposer que $a < x$, donc f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a,x]$, donc d'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c_x \in]a,x[$, tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \left(\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

On pose $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)}{n!}$, comme $f^{(n)}$ est continue et comme $\lim\limits_{x \to a} c_x = a$, alors $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, par suite, on a

$$\frac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \mathrm{o}((x-a)^n)$$

Remarque

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, avec $0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors pour tout $x \in I$, on a

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

Exemples

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

1.

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

2.
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + +o(x^{2n})$$

3.
$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{x^n} + o(x^n) = \sim_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k + o(x^n)$$

2.6.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 2.7 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Alors pour tout $(a,b) \in I \times I$, on a

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n dt$$

Preuve

On procède par récurrence sur n, avec $n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 0$, alors par hypothèse, f est de classe $\mathscr{C}^1$, donc f' est continue sur $[a,b]$ et par suite f' et Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et on a $\int\limits_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

Donc pour $n = 0$, la formule est vraie, car on a $f(b) = f(a) + \int\limits_a^b f'(t)dt$.

Supposons la formule vraie jusqu'à l'ordre n. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{(n+2)}$ sur I et soit $(a,b) \in I \times I$. Comme f est de classe $\mathscr{C}^{(n+2)}$ alors f est aussi de classe $\mathscr{C}^{(n+1)}$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n dt \qquad (*)$$

En faisant une intégration par partie de l'intégrale $\int\limits_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n dt$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n dt &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt\end{aligned}$$

En remplaçant l'intégrale par sa valeur dans la formule $(*)$, on obtient

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(b-t)^{n+1}dt$$

Nous avons donc établi le résultat.

Remarque

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a\in I$ et $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Alors pour tout $h\in\mathbb{R}$, tel que $a+h\in I$, si on pose $b=a+h$ et si on fait un changement de variable, la formule de Taylor avec reste intégral s'écrit sous la forme :

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-t)^nf^{(n+1)}(a+th)dt$$

2.8 Développents limités

Les développements limités permettent l'approximation d'une fonction donnée au voisinage d'un point par une fonction polynôme. Plus le degré de ce polynôme est élevé, plus l'approximation est meilleure.

Pour étudier une fonction au voisinage d'un point, par exemple le calcule de limite, la recherche d'asymptotes, la détermination de la position d'une courbe par rapport à sa tangente ou la recherche d'équivalent, on remplace souvent les fonctions considérées par leurs développements limités.

2.8.1 Définition et propriètés élémentaires

Définition 2.9.

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction, $x_0\in\bar{I}$ et $n\in\mathbb{N}$. On dit que f admet un développent limité d'ordre n au voisinage de x_0, s'il existe un voisinage V de x_0 et il existe $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$, tels que

$$\forall x\in V,\ f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

Dans ce cas, la fonction polynôme $a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n$ s'appelle la partie principale du développement limité de f au voisinage de x_0.

Notations

La notation $DL_n(x_0)$ signifie un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0.

Remarques

1. Rappelons que $\mathrm{o}((x-x_0)^n) = (x-x_0)^n\alpha(x)$, avec $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

2. Si f est continue au point x_0, alors f possède un développement limité d'ordre 0 au voisinage de x_0.

   En effet, si on pose $\alpha(x) = f(x) - f(x_0)$ et $a_0 = f(x_0)$, alors on aura

$$f(x) = a_0 + \alpha(x) = a_0 + \mathrm{o}(1)$$

3. Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, avec $n \geq 0$, alors on a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a_0$.
   Dans ce cas, on prolonge f par continuité au point x_0 en posant $f(x_0) = a_0$.

4. Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, avec $n \geq 1$, alors f est dérivable en x_0 et on a $f'(x_0) = a_1$.

5. Par contre, faites attention, car si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, avec $n \geq 2$, ceci n'entraine pas toujours que $f''(x_0)$ existe, comme le montre l'exemple élémentaire suivant :

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors f est dérivable en 0 et on a $f'(0) = 0$, par contre f n'est pas deux fois dérivable en 0, car on a $f'(x) = 3x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x} \quad \text{n'existe pas}$$

Cependant, si on pose $\alpha(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, alors $\lim\limits_{x\to 0} \alpha(x) = 0$ et on a

$$f(x) = x^2\alpha(x) = \mathrm{o}(x^2)$$

donc f possède un développent limité d'ordre 2 au voisinage de 0.

Remarque

D'après la formule de Taylor, toute fonction f de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle ouvert I, admet un développement limité d'ordre n au voisinage de tout point $x_0 \in I$ et on a :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

Notons que dans ce cas, on a $\forall k \in \{0,1,\dots,n\}$, $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

Proposition 2.10.

i) Si f admet un développement limité au voisinage de x_0, alors ce développement est unique.

ii) Si f admet un développement limité au voisinage de x_0 et si f est paire, alors la partie principale de son développement ne comporte que des puissances paires.

iii) Si f admet un développement limité au voisinage de x_0 et si f est impaire, alors la partie principale de son développement ne comporte que des puissances impaires.

Preuve

i) Supposons que sur un voisinage V de x_0, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + \mathrm{o}((x-x_0)^n) \\ &= b_0 + b_1(x-x_0) + \dots + b_n(x-x_0)^n + \mathrm{o}((x-x_0)^n) \end{aligned}$$

Posons $P(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)(x-x_0) + \ldots + (a-n-b_n)(x-x_0)^n$, alors on voit facilement que $P(x) = (x-x_0)^n \alpha_0(x)$, avec $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha_0(x) = 0$, par suite, $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = 0$,
donc $a_0 - b_0 = 0$.
En dérivant, on voit aussi que $P'(x) = (x-x_0)^{n-1}\alpha_1(x)$, avec $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha_1(x) = 0$, par suite $\lim\limits_{x \to x_0} P'(x) = 0$, donc $a_1 - b_1 = 0$.
Ainsi, par récurrence on voit que $\forall k \in \{0,1,\dots,n\}$, on $P^{(k)} = (x-x_0)^{n-k}\alpha_k(x)$, avec $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha_k(x) = 0$, par suite, $\lim\limits_{x \to x_0} P^{(k)}(x) = 0$, donc $a_k - b_k = 0$.

ii) Supposons f est paire et que sur un voisinage V de x_0, on a

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

Comme f est paire, alors on aussi

$$f(x) = f(-x) = a_0 - a_1(x-x_0) + \dots + (-1)^n a_n(x-x_0)^n + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

Donc d'après l'unicité du développent limité, on a $\forall k \in \{0,1,\dots,n\}$, $a_k = (-1)^k a_k$, donc si k est impair, alors on voit que $a_k = 0$.

iii) Se démontre de la même manière que ii).

2.10.1 Opération sur les développements limités

2.10.1.1 Somme et multiplication par un scalaire

Proposition 2.11.

Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n au voisinage de x_0, telles que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$$
$$g(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + \cdots + b_n(x-x_0)^n + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

Alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 et on a

$$(\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha a_0 + \beta b_0) + (\alpha a_1 + \beta b_1)(x-x_0) + \ldots + (\alpha a_n + \beta b_n)(x-x_0)^n + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

Preuve
La démonstration de cette proposition est une conséquence directe de l'unicité d'un développement limité.

2.11.0.1 Produit de deux développents limités

Proposition 2.12.

Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n au voisinage de x_0, telles que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \mathrm{o}((x-x_0)^n) = P_n(x) + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$$
$$g(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + \cdots + b_n(x-x_0)^n + \mathrm{o}((x-x_0)^n) = Q_n(x) + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

Alors fg admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, dont la partie principale est obtenue on ne conservant dans le produit P_nQ_n que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Preuve
La démonstration est encore une conséquence de l'unicité d'un développement limité et le fait que si $m > n$, alors $(x-x_0)^m = \mathrm{o}((x-x_0)^n)$.

Exemples

1. $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g(x) = \sin x$, alors f et g sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, les fonctions f et g admettent un développement limité au voisinage de x_0. En

particulier, au voisinage de 0, pour $n = 3$, d'après la formule de Taylor, on a

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \text{ et } \sin x = 1 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Donc, d'après la proposition précédente, un développement limité de la fonction $h(x) = e^x \sin x$ au voisinage de 0 à l'ordre 3 est déterminé par :

$$\begin{aligned}
e^x \sin x &= (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3)(1 - \frac{1}{6}x^3) + o(x^3) \\
&= 1 - \frac{1}{6}x^3 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

2. Déterminons un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de $\cos^3(x)$.
   On a $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$, donc on aura

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^3 \\
&= 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^6 + o(x^3) \\
&= 1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Remarque

On remarque facilement qu'une fonction f admet un développement limité au voisinage de x_0, si et seulement si, la fonction $g(x) = f(x + x_0)$ admet un développement limité au voisinage de 0. Donc on peut toujours se ramener à un développement limité au voisinage de 0, en posant $g(x) = f(x + x_0)$, puis dans l'expression obtenue on remplacera x par $x - x_0$. Ainsi, dans la suite et sauf indication du contraire, on ne considère plus que des développement limités au voisinage de 0.

Exemple

Calculons le développement limité de $\sin x$ au voisinage de $\frac{\pi}{6}$ à l'ordre 5. On a

$$\begin{aligned}
\sin(x + \frac{\pi}{6}) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}x^3 + \frac{1}{48}x^4 + \frac{\sqrt{3}}{240}x^5 + o(x^5)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que le développement limité au voisinage de $\frac{\pi}{6}$ à l'ordre 5 de $\sin x$, s'écrit sous la forme :

$$\sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4 + \frac{\sqrt{3}}{240}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^5 + \mathrm{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^5\right)$$

2.12.0.1 Quotient de deux développents limités

Rappelons d'abord un résultat d'Algèbre sur la division euclidienne suivant les puissances croissantes :

Théorème 2.13 (Division euclidienne suivant les puissances croissantes)**.**

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que $B(0) \neq 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (Q_n, R_n) formé de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, tel que

$$A(X) = B(X)Q_n(X) + X^{n+1}R_n(X) \text{ avec } \deg(Q_n) \leq n$$

Cette opération s'appelle la division euclidienne suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre n de A par B.

Preuve

Pour montrer l'existence on procède par récurrence sur n.
Pour $n = 0$, on pose $Q_0 = \dfrac{a_0}{b_0}$, avec $a_0 = A(0)$ et $b_0 = B(0)$, alors on voit que $(A - Q_0B)(0) = 0$, donc il existe $R_0 \in \mathbb{K}[X]$, tel que $A - Q_0B = XR_0$.
Par suite, on a $A = Q_0B + XR_0$, avec $\deg(Q_0) \leq 0$, donc la propriètè est vraie pour $n = 0$.
Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre n, donc il existe $(Q_n, R_n) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, tel que $A = BQ_n + X^{n+1}R_n$, avec $\deg(Q_n) \leq n$.
Faisons la division euclidienne suivant les puissance croissante à l'ordre 0 de R_n par B, alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ et il existe $P \in \mathbb{K}[X]$, tel que $R_n = \alpha B + XP$.
En remplaçant R_n par sa valeur on aura $A = (Q_n + \alpha X^{n+1})B + X^{n+2}P$, donc il suffit de prendre $Q_{n+1} = Q_n + \alpha X^{n+1}$ et $R_{n+1} = P$, alors on a bien $\deg(Q_{n+1}) \leq n+1$.
Pour l'unicité, on suppose que $A = BQ_n + X^{n+1}R_n = BT_n + X^{n+1}S_n$, avec $\deg(Q_n) \leq n$ et $\deg(S_n) \leq n$. Supposons, par exemple, que $Q_n \neq T_n$.
On a $(Q_n - T_n)B = X^{n+1}(S_n - R_n)$, par suite X^{n+1} divise $(Q_n - T_n)B$.
On a $B(0) \neq 0$, donc X ne divise pas B et par conséquent B et X^{n+1} sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, X^{n+1} divise $(Q_n - T_n)$, par suite, on aura $\deg(Q_n - T_n) \geq n+1$, ce qui est absurde car $\deg(Q_n - T_n) \leq \max(\deg(Q_n), \deg(T_n)) \leq n$. Donc $Q_n = T_n$ et par suite $R_n = S_n$.
Exemples
Faisons la division euclidienne suivant les puissances croissante de $X - \dfrac{1}{6}x^3$ par $1 - \dfrac{1}{2}X^2$, jusqu'à l'ordre 3.
Le calcul se fait de la même manière que la division euclidienne suivant les puissances décrois-

sante :

$$\begin{array}{rrr|l} X & -\frac{1}{6}X^3 & & 1 \ -\frac{1}{2}X^2 \\ \cline{4-4} -X & +\frac{1}{2}X^3 & & X \ +\frac{1}{3}X^3 \\ \cline{1-2} & +\frac{1}{3}X^3 & & \\ & -\frac{1}{3}X^3 & +\frac{1}{6}X^5 & \\ \cline{2-3} & & \frac{1}{6}X^5 & \end{array}$$

Ainsi, on voit que $X - \dfrac{1}{6}X^3 = \left(1 - \dfrac{1}{2}X^2\right) Q_3 + X^4 R_3$, avec $Q_3 = X + \dfrac{1}{3}X^3$ et $R_3 = \dfrac{1}{6}X$.

Proposition 2.14.

Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0 de parties principales P_n et Q_n, telles que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$.

Alors la fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 dont la partie principale est égale au quotient de la division euclidienne suivant les puissances croissantes à l'ordre n de P_n par Q_n.

Preuve

Au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{P_n(x) + \mathrm{o}(x^n)}{Q_n(x) + \mathrm{o}(x^n)} \\ &= \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} + \frac{P_n(x) + \mathrm{o}(x^n)}{Q_n(x) + \mathrm{o}(x^n)} - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \\ &= \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} + \frac{(Q_n(x) - P_n(x))\mathrm{o}(x^n)}{Q_n(x)^2 + Q_n(x)\mathrm{o}(x^n)}\end{aligned}$$

Comme $Q_n(0) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$, alors on voit facilement que

$$\frac{(Q_n(x) - P_n(x))\mathrm{o}(x^n)}{Q_n(x)^2 + Q_n(x)\mathrm{o}(x^n)} = \mathrm{o}(x^n)$$

La division euclidienne suivant les puissances croissantes à l'ordre n de P_n par Q_n s'écrit sous la forme :

$$P_n(x) = (c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n) Q_n(x) + x^{n+1} R_n(x)$$

Donc $\dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)} = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + x^{n+1}\dfrac{R_n(x)}{Q_n(x)} = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \mathrm{o}(x^n)$

Ainsi, on a $\dfrac{f(x)}{g(x)} = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \mathrm{o}(x^n)$.

Exemples

1. Calculons le développement limité de $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

   On a $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)$ et $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)$

La division euclidienne suivant les puissances croissantes à l'ordre 4 de $x-\dfrac{x^3}{6}$ par $1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ donne :

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x & -\frac{x^3}{6} & & & 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \\ \cline{5-5}
-x & +\frac{x^3}{2} & -\frac{x^5}{24} & & x+\frac{x^3}{3} \\ \cline{1-3}
 & \frac{x^3}{3} & -\frac{x^5}{24} & & \\
 & -\frac{x^3}{3} & \frac{x^5}{6} & -\frac{x^7}{72} & \\ \cline{2-4}
 & & \frac{x^5}{8} & -\frac{x^7}{72} &
\end{array}
$$

Donc $x-\dfrac{x^3}{6}=\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}\right)+x^5\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{x^2}{72}\right)$, ainsi on aura

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^4)$$

2. Calculons le développement limité de $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\cos x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

On a $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^4)$ et $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^4)$.

La division euclidienne suivant les puissances croissantes à l'ordre 4 de

$1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}$ par $1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ donne :

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
1 & +x & +\frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{6} & +\frac{x^4}{24} & & & & 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \\ \cline{9-9}
-1 & & +\frac{x^2}{2} & & -\frac{x^4}{24} & & & & 1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{2} \\ \cline{1-5}
 & x & +x^2 & +\frac{x^3}{6} & & & & & \\
 & -x & & +\frac{x^3}{2} & & -\frac{x^5}{24} & & & \\ \cline{2-6}
 & & x^2 & +\frac{2}{3}x^3 & & -\frac{x^5}{24} & & & \\
 & & -x^2 & & +\frac{x^4}{2} & & -\frac{x^6}{24} & & \\ \cline{3-7}
 & & & \frac{2}{3}x^3 & +\frac{x^4}{2} & -\frac{x^5}{24} & -\frac{x^6}{24} & & \\
 & & & -\frac{2}{3}x^3 & & +\frac{x^5}{3} & & -\frac{x^7}{36} & \\ \cline{4-8}
 & & & & \frac{x^4}{2} & +\frac{7}{24}x^5 & -\frac{x^6}{24} & -\frac{x^7}{36} &
\end{array}
$$

Le quotient de cette division euclidien est égal à $1+x+x^2+\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{x^4}{2}$, donc

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\cos x}=1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{2}+\mathrm{o}(x^4)$$

2.14.0.1 Développent limité d'une fonction composée

Nous savons que tout développement limité d'une fonction f au voisinage de x_0 se ramène à un développent limité au voisinage de 0 de la fonction g, avec $g(x) = f(x+x_0)$. Donc, pour simplifier le calcul, dans la proposition suivante on ne considère que des développents limités au voisinage de 0.

Proposition 2.15.

Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, avec $0 \in I$ et $0 \in J$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, telles que $f(I) \subseteq J$ et $f(0) = 0$. On suppose que f et g admettent des développents limités d'ordre n au voisinage de 0 dont les parties principales sont P_n et Q_n.
Alors $g \circ f$ admet un développent limité d'ordre n au voisinage de 0, dont la partie principale est obtenu on ne conservant dans $Q_n \circ P_n$ que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Preuve
f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, donc il existe un voisinage V_1 de 0, tel que $\forall x \in V_1,\ f(x) = P_n(x) + \mathrm{o}(x^n)$.

g admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, donc il existe un voisinage W de 0, tel que $\forall y \in W,\ g(y) = Q_n(y) + \mathrm{o}(y^n)$.

Comme f admet un développement limité au voisinage de 0, alors f est continue en 0 et comme $f(0) = 0$ et W est un voisinage de 0, alors il existe un voisinage V_2 de 0, tel que $f(V_2) \subseteq W$.

Soit $V = V_1 \cap V_2$ et soit $x \in V$, donc $x \in V_1$ et $f(x) \in W$, par suite on a

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = Q_n(f(x)) + \mathrm{o}(x^n) = Q_n(P_n(x) + \mathrm{o}(x^n)) + \mathrm{o}(x^n)$$

Or, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on voit facilement que $(P_n(x) + \mathrm{o}(x^n))^k = P_n(x)^k + \mathrm{o}(x^n)$.
Par suite, on aura

$$\forall x \in V,\ (g \circ f)(x) = (Q_n \circ P_n)(x) + \mathrm{o}(x^n)$$

Ainsi, on aura

$$\forall x \in V,\ (g \circ f)(x) = (Q_n \circ P_n)(x) + \mathrm{o}(x^n)$$

Donc on ne conservant dans $Q_n \circ P_n$ que les termes de degré inférieur ou égal à n, on aura le résultat.

2.15.0.1 Développent limité obtenu à partir de celui d'une dérivée

Proposition 2.16.

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, avec $0 \in I$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On suppose que f' admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, qui s'écrit sous la forme :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

Alors f un développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de 0 et on a

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \mathrm{o}(x^{n+1})$$

Preuve

f' admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, donc il existe $\alpha > 0$, tel que pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$, on a $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$

Soit φ la fonction définie sur $]-\alpha, \alpha[$ par $\varphi(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$, alors φ est dérivable sur $]-\alpha, \alpha[$ et pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$, on a $\varphi'(x) = \mathrm{o}(x^n) = x^n \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Soit $x \in]-\alpha, \alpha[$, alors on peut supposer, par exemple, que $x > 0$, donc en appliquant le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0, x]$, il existe $c_x \in]0, x[$, tel que

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(c_x) = x c_x^n \varepsilon(c_x)$$

On a $0 < c_x < x$, donc $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq x^{n+1} |\varepsilon(c_x)|$, par suite, on aura

$$\left| f(x) - f(0) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \right| \leq x^{n+1} |\varepsilon(c_x)| \leq x^{n+1} \beta(x)$$

avec $\beta(x) = \sup\limits_{0<y<x} |\varepsilon(y)|$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, alors il est facile de voir que $\lim\limits_{x \to 0} \beta(x) = 0$

Ainsi, on aura

$$f(x) - f(0) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} = \mathrm{o}(x^{n+1})$$

Exemples

1. Soit $f :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
   Alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, +\infty[, \ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

   Donc, d'après Taylor-Young, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f admet un développement limité jusqu'à l'ordre n au voisinage de 0 et on a

$$f(x) = \frac{1}{x+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

2. Soit $f :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln(1+x)$.
   Alors on a $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, donc d'après la proposition précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f admet un développement limité jusqu'à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0 et on a

$$f(x) = \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} + \mathrm{o}(x^{n+1})$$

3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
   Alors $f = g \circ h$, où $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $h(x) = x^2$, donc d'après le développement limité d'une fonction composée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \mathrm{o}(x^{2n})$$

4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \arctan(x)$.
   Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, donc d'après la proposition précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f(x) = \arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

5. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $f :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par$f(x) = (1+x)^\alpha$.
   Alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1, +\infty[,\ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

   Donc, d'après Taylor-Young, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f admet un développement limité jusqu'à l'ordre n au voisinage de 0 et on a

$$f(x) = (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

   Donc, en particulier, on a

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2^n n!} x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

   On a aussi

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \cdots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!} x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

2.16.1 Utilisation des développements limités

2.16.1.1 Recherche d'équivalent simple - Calcul de limites

Proposition 2.17.

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage d'un point x_0 de partie principale $P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n$ non nulle.
Soit $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$ le plus petit entier, tel que $a_p \neq 0$, alors $f(x)$ est équivalent à $a_p(x-x_0)^p$ au voisinage de x_0.

$$f(x) \sim_{x_0} a_p(x-x_0)$$

Preuve
Comme p est le plus petit entier ≥ 0, tel que $a_p \neq 0$, alors qu voisinage de x_0, on a

$$f(x) = a_p(x-x_0)^p + a_{p+1}(x-x_0)^{p+1} + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

Donc, on voit que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - a_p(x-x_0)^p}{a_p(x-x_0)^p} = 0$$

Donc $f(x)$ est équivalent à $a_p(x-x_0)^p$ au voisinage de x_0.

Remarque
Rappelons que si f est équivalent à g au voisinage de x_0, alors on écrit $f(x) \sim_{x_0} g(x)$.
Rappelons aussi que si $f_1(x) \sim_{x_0} g_1(x)$ et $f_2(x) \sim_{x_0} g_2(x)$, alors $(f_1 f_2)(x) \sim_{x_0} (g_1 g_2)(x)$ et $\dfrac{f_1}{f_2}(x) \sim_{x_0} \dfrac{g_1}{g_2}(x)$.
Ainsi, pour chercher un équivalent de $(fg)(x)$ ou de $\dfrac{f}{g}(x)$ au voisinage de x_0, il suffit de chercher un équivalent de $f(x)$ et de $g(x)$ au voisinage de x_0.

Exemples

1. On a $\cos x - 1 = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)$ au voisinage de 0, donc $\cos x - 1 \sim_0 -\dfrac{x^2}{2}$.

2. On a $\sin x - x = -\dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$ au voisinage de 0, donc $\sin x - x \sim_0 -\dfrac{x^3}{6}$.

3. On a $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, donc d'après la remarque précédente, $\tan x \sim_0 x$.

4. Cherchons un équivalent simple de $\dfrac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$ au voisinage de 0.

On a

$$\begin{aligned}1-\cos(1-\cos x) &= 1-\cos\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^4)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)^2+\mathrm{o}(x^4)\\ &= \frac{x^4}{8}+\mathrm{o}(x^4)\end{aligned}$$

Donc $1-\cos(1-\cos x) \sim_0 \dfrac{x^4}{8}$, par suite $\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} \sim_0 \dfrac{1}{8}$.

Remarque

Rappelons que si $f(x) \sim_{x_0} g(x)$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
Donc pour chercher $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, il suffit, en utisant les développements limités, de chercher un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de x_0.

Exemples

1. Calculons $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, où $f(x) = \left(\dfrac{sh(x)}{\sin(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.
   On a $f(x) = exp\left(\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{sh(x)}{\sin(x)}\right)\right)$.
   Avec $\sin(x) = x-\dfrac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)$, $sh(x) = x+\dfrac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)$, donc on aura
   $\dfrac{sh(x)}{\sin(x)} = \dfrac{1+\dfrac{x^2}{6}+\mathrm{o}(x^2)}{1-\dfrac{x^2}{6}+\mathrm{o}(x^2)} = \left(1+\dfrac{x^2}{6}\right)\left(1+\dfrac{x^2}{6}\right)+\mathrm{o}(x^2)$,
   car $\dfrac{1}{1-u} = 1+u+\mathrm{o}(u)$ et ici $u = x^2$. Ainsi, on aura
   $\dfrac{sh(x)}{\sin(x)} = 1+\dfrac{x^2}{3}+\mathrm{o}(x^2)$, donc $\ln\left(\dfrac{sh(x)}{\sin(x)}\right) = \dfrac{x^2}{3}+\mathrm{o}(x^2)$, donc $\ln\left(\dfrac{sh(x)}{\sin(x)}\right) \sim_0 \dfrac{x^2}{3}$,
   par suite, $f(x) \sim_0 \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.

2. Calculons $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, où $f(x) = \dfrac{\sin x - \arcsin x}{\sin^3 x}$.
   On a $\sin x = x-\dfrac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)$ et $\arcsin x = x+\dfrac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)$, donc $\sin x-\arcsin x = -\dfrac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3)$.
   On aussi $\sin^3 x = \left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)^3+\mathrm{o}(x^3) = x^3+\mathrm{o}(x^3)$.
   Donc $f(x) \sim_0 \dfrac{\frac{1}{3}x^3}{x^3} = \dfrac{1}{3}$, par suite, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{3}$.

3. Calculons $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, où $f(x) = \dfrac{5^x-3^x}{4^x-2^x}$.
   On a $5^x = exp(x\ln 5) = 1+x\ln 5+\mathrm{o}(x)$, $3^x = exp(x\ln 3) = 1+x\ln 3+\mathrm{o}(x)$,
   $4^x = exp(x\ln 4) = 1+x\ln 4+\mathrm{o}(x)$ et $2^x = exp(x\ln 2) = 1+x\ln 2+\mathrm{o}(x)$.
   Donc $5^x-3^x \sim_0 x\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$ et $4^x-2^x \sim_0 x\ln 2$.

Par suite, on a $f(x) \sim_0 \dfrac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln 2}$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln 2}$.

2.17.0.1 Caractérisation d'extremums

Soient I un intervalle ouvert, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et admettant un développent limité d'ordre n, avec $n \geq 2$, au voisinage d'un point $x_0 \in I$, de partie principale

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

alors on a la proposition suivante :

Proposition 2.18.

i) Si x_0 est un extremum de f, alors $a_1 = 0$.

ii) Réciproquement, supposons que $a_1 = 0$ et soit $p \in \{2, \ldots, n\}$ le plus petit entier, tel que $a_p \neq 0$,

  a) si p est pair et si $a_p > 0$, alors x_0 est un minimum local de f.

  b) si p est pair et si $a_p < 0$, alors x_0 est un maximum local de f.

  c) si p est impair, alors x_0 n'est pas un extremum de f.

Preuve

i) f possède un développent limité d'ordre n, avec $n \geq 2$, au voisinage de x_0, donc f est continue et f dérivable au point x_0 et on a $f(x_0) = a_0$ et $f'(x_0) = a_1$. Comme x_0 est un extremum local de f, alors $f'(x_0) = 0$, donc $a_1 = 0$.

ii) $p \in \{2, \ldots, n\}$ est le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$, donc

$$(f(x) - f(x_0)) \sim_{x_0} a_p(x-x_0)^p$$

par suite, sur un voisinage V de x_0, $f(x) - f(x_0)$ et $a_p(x-x_0)^p$ ont même signe, donc on aura le résultat :

a) Si p est pair et $a_p > 0$, alors $\forall x \in V,\ f(x) - f(x_0) \geq 0$, donc x_0 est un minimum local de f.

b) Si p est pair et $a_p < 0$ et, alors $\forall x \in V,\ f(x) - f(x_0) \leq 0$, donc x_0 est un maximum local de f.

c) Si p est impair, alors $a_p(x-x_0)^p$ change de signe, donc dans ce cas, x_0 n'est pas un extremum.

Exemples

1. Soit $f(x) = \dfrac{x \sin x}{x^2+1}$, alors il facile de voir qu'au voisinage de 0, on a $f(x) = x^2 + \mathrm{o}(x^2)$, donc d'après la proposition précédente, on a $f(0) = f'(0) = 0$ et 0 est un minimum local de f.

2. Soit $f(x)=\sin x-\ln(1+x)+\cos x-1$, alors au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))-(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3))+(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)) \\ &= -\frac{1}{2}x^3+o(x^3) \end{aligned}$$

Donc d'après la proposition précédente, on a $f(0)=f'(0)=0$ et 0 n'est pas un extremum local de f.

2.18.0.1 Position d'une courbe par rapport à une tangente

Soient I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et admettant un développent limité d'ordre n, avec $n \geq 2$, au voisinage d'un point $x_0 \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$, de partie principale

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

Supposons qu'il existe $k \in \{2,\ldots,n\}$, tel que $a_k \neq 0$ et soit $p \in \{2,\ldots,n\}$ le plus petit entier, tel que $a_p \neq 0$, alors on a la proposition suivante :

Proposition 2.19.

i) f est prolongeable par continuité au point x_0 en posant $f(x_0)=a_0$.

ii) Le prolongement obtenu est dérivable en x_0 et on a $f'(x_0)=a_1$.

iii) La droite d'équation $y=a_0+a_1(x-x_0)$ est tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$ et on a

   a) Si p est pair et $a_p>0$, alors le graphe de f est au-dessus de sa tangente en x_0.

   b) Si p est pair et $a_p<0$, alors le graphe de f est en-dessous de sa tangente en x_0.

   c) Si p est impair, alors le graphe de f traverse sa tangente en x_0 et dans ce cas, on dit que f possède un point d'inflexion en x_0.

Preuve

i) f possède un développent limité d'ordre n, avec $n \geq 2$, au voisinage de x_0, donc $\lim\limits_{x\to x_0} = a_0$, par suite se prolonge par continuité au point x_0 en posant $f(x_0)=a_0$.

ii) On a $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-a_0}{x-x_0}=a_1$, donc f est dérivable au point x_0 et on a $f'(x_0)=a_1$.

iii) La tangente au point x_0 a pour équation $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=a_0+a_1(x-x_0)$.

On a $(f(x)-a_0-a_1(x-x_0)) \sim_{x_0} a_p(x-x_0)$, donc $f(x)-a_0-a_1(x-x_0)$ et $a_p(x-x_0)$ ont même signe sur un voisinage V de x_0. On en déduit donc que

   a) Si p est pair et $a_p>0$, alors $f(x)-a_0-a_1(x-x_0)\geq 0$ sur V, donc le graphe de f est au-dessus de sa tangente en x_0.

b) Si p est pair et $a_p < 0$, alors $f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) \leq 0$ sur V, donc le graphe de f est en-dessous de sa tangente en x_0.

c) Si p est impair, alors $f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)$ change de signe à droite et à gauche de x_0, donc le graphe de f traverse sa tangente en x_0.

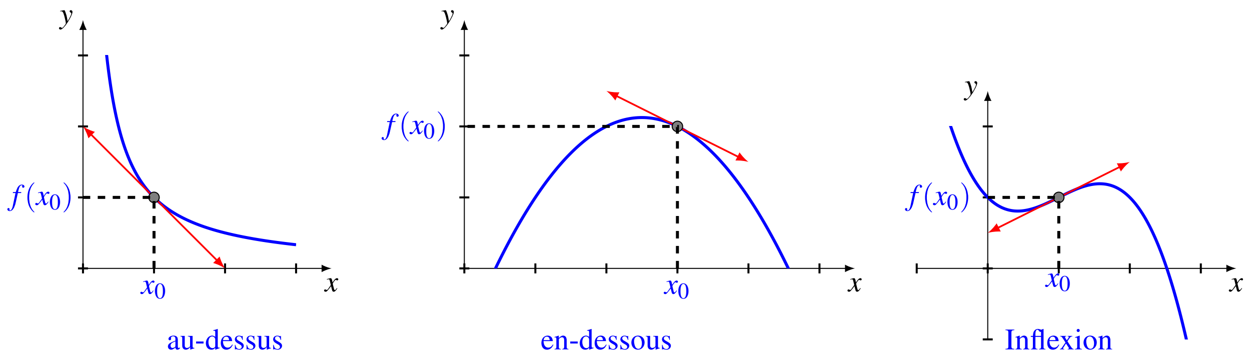


FIGURE 2.1 – Différentes positions d'un graphe par rapport à sa tangente

2.19.1 Développents limités généralisés

2.19.1.1 Développents limités généralisés au voisinage d'un point de $\mathbb{R}$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définit sur I et soit $x_0 \in \bar{I}$. On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ n'existe pas et qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, tel que $\lim\limits_{x \to x_0} x^m f(x)$ existe.
On désigne par p le plus petit entier ≥ 1 tel que $\lim\limits_{x \to x_0} x^p f(x)$ existe, alors on a la définition suivante :

Définition 2.20.

On dit que f admet un développement limité généralisé d'ordre n au voisinage de x_0, si la fonction g définie par $g(x) = x^p f(x)$ admet un développement limité d'ordre $n + p$ au voisinage de x_0

Remarque
Si f admet un développement limité généralisé d'ordre n au voisinage de x_0, alors il $a_0, a_1, \ldots, a_{n+p} \in \mathbb{R}$, et il existe un voisinage V de x_0, tels que pour tout $x \in V$, on a

$$g(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_{p+n}(x - x_0)^{p+n} + \mathrm{o}((x - x_0)^{p+n})$$

Donc, on aura

$$f(x) = \frac{a_0}{(x - x_0)^p} + \frac{a_1}{(x - x_0)^{p-1}} + \ldots + \frac{a_{p-1}}{(x - x_0)} + a_p + a_{p+1}(x - x_0) + \ldots + a_{p+n}(x - x_0)^n + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$$

Exemple

Développement limité généralisé d'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.
On a $\lim\limits_{x \to 0} x f(x) = 1$ et on a

$$\begin{aligned} x\frac{\cos(x)}{\sin x} &= \frac{x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + o(x^5)}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} o(x^5)} \\ &= \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)} \\ &= 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{x^4}{45} + o(x^4) \end{aligned}$$

Donc le développement limité généralisé d'ordre 3 au voisinage de 0 est donné par

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{x^3}{45} + o(x3)$$

On en déduit donc que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \to 0^-} \frac{\cos x}{\sin x} = -\infty$$

2.20.0.1 Développents limités généralisés au voisinage de l'infini

Définition 2.21.

Soit $f :]a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $]a, +\infty[$. On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n au voisinage de $+\infty$, s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, tel que

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Remarque

1. Dans la définition, on a $o\left(\dfrac{1}{x^n}\right) = \dfrac{1}{x^n}\alpha(x)$, où $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$.
2. Un développement limité généralisé au voisinage de $+\infty$ est aussi appelé un développement asymptotique.
3. Une fonction f admet un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$, si et seulement si, la fonction g définie par $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un développement limité au voisinage de 0. Dans ce cas, si au voisinage de 0 on a

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$$

Alors au voisinage de $+\infty$ on aura

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

4. On définit de la même manière un développement limité généralisé au voisinage de $-\infty$ d'une fonction f définie sur $]-\infty, a[$.

Exemples

1. Développement asymptotique d'ordre 1 au voisinage de $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

   Soit $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. Au voisinage de $+\infty$, on a $x > 0$, donc $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x-x^2}$, par suite, g admet un développent limité généralisé au voisinage de 0 et on a

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x-x^2} &= \frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x}\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}(x^2)\right)(1+x+x^2+\mathrm{o}(x^2)) \\ &= \frac{1}{x}\left(1+x+x^2+\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{x}+1+\frac{3}{2}x+\mathrm{o}(x) \end{aligned}$$

   Donc au voisinage de $+\infty$, on a

$$f(x) = 1+x+\frac{3}{2x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

   De la même manière pour un développement asymptotique d'ordre 1 au voisinage de $-\infty$, on considère toujours la fonction $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ et comme au voisinage de $-\infty$, on peut supposer que $x < 0$, donc $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2-x}$.
   On en déduit donc de ce qui précède qu'un développement asymptotique d'ordre 1 au voisinage de $-\infty$ de f est donné par :

$$f(x) = 1-x-\frac{2}{3x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. Développement asymptotique d'ordre 1 au voisinage de $\pm\infty$ de

$$f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

   Soit $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, alors on a $g(x) = \dfrac{1}{x^2}\arctan\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$, donc g admet un développent limité généralisé au voisinage de 0 et on a

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x^2}\arctan\left(x-x^2+x^3-\frac{1}{3}x^3+\mathrm{o}(x^3)\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(x-x^2+\frac{2}{3}x^3+\mathrm{o}(x^3)\right) \\ &= \frac{1}{x}-1+\frac{2}{3}x+\mathrm{o}(x) \end{aligned}$$

Donc au voisinage de $\pm\infty$, on a

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{3x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

2.21.0.1 Recherche d'asymptotes obliques

Définition 2.22.

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$, si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.

Remarque

1. De la même manière on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$, si $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$

2. Si f possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, d'équation $y = ax + b$, alors on a

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$$

3. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c$, on dit que la droite d'équation $y = c$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

3. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à la courbe de f au voisinage de x_0.

4. En pratique pour chercher les asymptotes obliques d'une fonction f au voisinage de $\pm\infty$, il suffit de faire un développement asymptotique de f au voisinage de $\pm\infty$ sous la forme :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^p} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^p}\right) \quad \text{avec } p \geq 1$$

Dans ce cas, la fonction f a pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$ et la position du graphe de f par rapport à son asymptote se déduit du signe de $\frac{c}{x^p}$ au voisinage de l'infini.

Exemples

1. Recherche d'asymptotes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

   D'abord la fonction f a pour tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

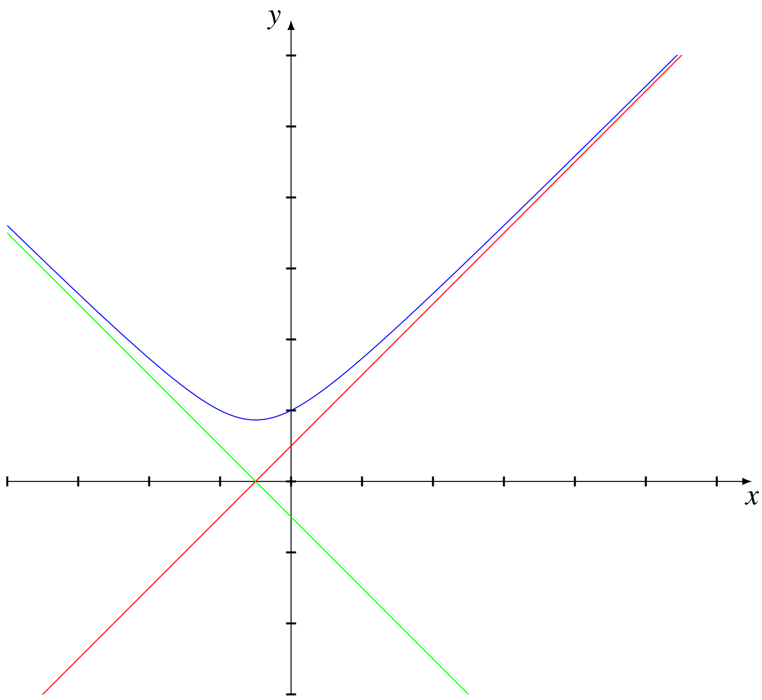
Le développement asymptotique d'ordre 1 de f au voisinage de $+\infty$ est donné par :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc la droite d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ est une asymptote verticale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$. Le développement asymptotique d'ordre 1 de f au voisinage de $-\infty$ est donné par :

$$f(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc la droite d'équation $y = -x - \dfrac{1}{2}$ est une asymptote verticale à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.
La représentation graphique de f est donné par :



2. Recherche des asymptotes de la fonction f définie sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$$

Le tableau de variation de f est donné par :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Le développement asymptotique d'ordre 1 de f au voisinage de $\pm\infty$ est donné par :

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc la droite d'équation $y = x$ est une asymptote verticale à la courbe de f au voisinage de $\pm\infty$.

On a aussi $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 1$ est aussi une asymptote à la courbe de f.

Ainsi, la courbe représentative de f est donnée par :