Preuve

Posons $q = \dfrac{p}{p-1}$, alors $q > 0$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, donc d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

On a aussi

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

En faisant la somme de ces deux inégalités, on obtient,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{p} \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{p}\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

Donc en simplifiant, on aura

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Chapitre 4

Courbes paramétriques et polaires

4.1 Courbes paramétriques

4.1.1 Le plan affine $\mathbb{R}^2$

Rappelons que $\mathbb{R}^2$ peut-être considéré à la fois comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et comme un plan affine réel.
Dans le cas où $\mathbb{R}^2$ est considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont appelés des vecteurs et seront désignés, en général, avec des lettres minuscules surmontés d'une flêche :

$$\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k},\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w},\ \ldots\ldots$$

Dans le cas où $\mathbb{R}^2$ est considéré comme un plan affine, les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont appelés des points et seront, en gńéral, désignés par des lettres majuscules :

$$A,\ B, C,\ M,\ N,\ P,\ Q,\ \ldots\ldots$$

Rappelons aussi qu'à deux points M et N du plan affine $\mathbb{R}^2$ est associé un vecteur de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, désigné par $\overrightarrow{MN}$.
Dans toute la suite, le plan affine $\mathbb{R}^2$ sera muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Ainsi, chaque point M pourra être décrit au moyen de ses coordonnées (x,y) dans ce repère, où x et y sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, c'est à dire $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Dans ce cas, on convient d'écrire $M = (x,y)$.
Si M et N sont deux points du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées respectives (x,y) et (x',y') dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(x'-x, y'-y)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Si M et N sont deux points du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées respectives (x,y) et (x',y') dans le repère

$(O, \vec{i}, \vec{j})$, on définit la distance de M à N, par

$$d(M,N) = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$$

Cette distance coïncide avec ce qu'on appelle la norme du vecteur $\overrightarrow{MN}$, qui est définie par

$$\|\overrightarrow{MN}\| = d(M,N) = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$$

Si M_0 est un point de coordonnées (x_0, y_0) et si $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ est un vecteur non nul, alors la droite $D(M_0, \vec{v})$ passant par M_0 de vecteur directeur $\vec{v}$ a pour équation $bx - ay = bx_0 - ay_0$.
En effet, pour un point M de coordonnées (x, y), on a

$$M \in D(M_0, \vec{v}) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{M_0M}, \vec{v}) \text{ est lié} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & a \\ y - y_0 & b \end{vmatrix} = 0$$

Enfin, si M_1 et M_2 sont deux points du plan, alors la droite (M_1M_2) passant par les points M_1 et M_2 est égale à la droite passant par M_1 est de vecteur directeur $\overrightarrow{M_1M_2}$.
En abrégé, on a $(M_1M_2) = D(M_1, \overrightarrow{M_1M_2}) = D(M_2, \overrightarrow{M_1M_2})$.

4.1.2 Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

4.1.2.1 Définition et exemples

Dans cette section, pour simplifier, au lieu de considérer une partie quelconque de $\mathbb{R}$, on se restreint à un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 4.2.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, qui à $t \in I$ fait correspondre un point $f(t)$ du plan $\mathbb{R}^2$, s'appelle une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

Remarques

1. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction, alors pour tout $t \in I$, on a $f(t) = (x(t), y(t))$, où $(x(t)$ et $y(t)$ sont les coordonnées du point $f(t)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Ainsi, toute application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ peut sécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

2. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction qui à t fait correspondre $f(t) = (x(t), y(t))$, alors l'ensemble $\mathcal{C} = \{(x(t), y(t)) \; : \; t \in I\}$ décrit une courbe du plan $\mathbb{R}^2$, appelée courbe paramétrique définie par la fonction f.

3. En mécanique, on convient de poser $f(t) = M(t)$, où la variable t désigne le temps et $M(t)$ désigne la position d'un point matériel à l'instant t.
   Dans ce cas l'ensemble $\{M(t) = (x(t), y(t)) \ : \ t \in [t_0, T]\}$ représente la trajectoire du point matériel de l'instant initial t_0 à l'instant final T.

Exemples

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à t fait correspondre $(x(t), y(t))$, avec
$$\begin{cases} x(t) = at + \alpha \\ y(t) = bt + \beta \end{cases}$$
   avec $(a,b) \neq (0,0)$. Alors la courbe paramétrique définie par f est la droite passant par le point $A = (\alpha, \beta)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

2. $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à t fait correspondre $(x(t), y(t))$, avec
$$\begin{cases} x(t) = R\cos t + \omega_1 \\ y(t) = R\sin t + \omega_2 \end{cases}$$
   où R est un nombre réel strictement positif. Alors la courbe paramétrique définie par f est le cercle de centre $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$ et de rayon R.

3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, alors le graphe de φ peut-être considéré comme une courbe paramétrique en considérant la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (t, \varphi(t))$.

4.2.0.1 Limite et continuité

Définition 4.3 (Limite)**.**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in \bar{I}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction qui à t fait correspondre $(x(t), y(t))$. Pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on dit que f a pour limite (x_0, y_0) lorsque t tend vers t_0, si $x(t)$ tend vers x_0 et $y(t)$ tend vers y_0 lorsque t tend vers t_0.

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = (x_0, y_0) \Longleftrightarrow \lim_{t \to t_0} x(t) = x_0 \ \text{ et } \ \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0$$

Remarque

En utilisant la distance deux points, on obtient une définition de la limite analogue à celle d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$\lim_{t \to t_0} f(t) = (x_0, y_0)$, si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall t \in I, \ |t - t_0| \leq \alpha \Longrightarrow d(f(t), (x_0, y_0)) \leq \varepsilon$$

En effet, supposons que $\lim_{t\to t_0} f(t) = (x_0, y_0)$, alorspour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall t \in I,\ |t - t_0| \leq \alpha \Longrightarrow \sqrt{(x(t)-x_0)^2 + (y(t)-y_0)^2} \leq \varepsilon$$

Comme $|x(t)-x_0| \leq \sqrt{(x(t)-x_0)^2+(y(t)-y_0)^2}$ et $|y(t)-y_0| \leq \sqrt{(x(t)-x_0)^2+(y(t)-y_0)^2}$, alors pour $t \in I$, tel que $|t-t_0| \leq \alpha$, on a

$$|x(t)-x_0| \leq \varepsilon \ \text{ et } \ |y(t)-y_0| \leq \varepsilon$$

Réciproquement, supposons que $\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim_{t\to t_0} y(t) = y_0$ et fixons $\varepsilon > 0$.
Comme $\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0$, alors il existe $\beta > 0$, tel que

$$\forall t \in I,\ |t-t_0| \leq \beta \Longrightarrow |x(t)-x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et comme $\lim_{t\to t_0} y(t) = y_0$, alors il existe $\delta > 0$, tel que

$$\forall t \in I,\ |t-t_0| \leq \beta \Longrightarrow |y(t)-y_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc, si on prend $\alpha = \min(\beta, \delta)$, alors pour tout $t \in I$, tel que $|t-t_0| \leq \alpha$, on a

$$\begin{aligned} d(f(t),(x_0,y_0)) &= \sqrt{(x(t)-x_0)^2+(y(t)-y_0)^2} \\ &\leq\leq \sqrt{(x(t)-x_0)^2} + \sqrt{(y(t)-y_0)^2} \\ &= |x(t)-x_0| + |y(t)-y_0| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Définition 4.4 (Continuité).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction qui à t fait correspondre $(x(t), y(t))$. On dit que f est continue en t_0, si $x(t)$ et $y(t)$ sont continues en t_0.

Remarques

1. On sait que $x(t)$ et $y(t)$ sont continues en t_0, si et seulement si,

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x(t_0) \ \text{ et } \ \lim_{t\to t_0} y(t) = y(t_0)$$

donc f est continue en t_0, si et seulement si $\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0)$.

2. D'après la remarque précédente, f est continue en t_0, si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall t \in I,\ |t-t_0| \leq \alpha \Longrightarrow d(f(t), f(t_0)) \leq \varepsilon$$

4.4.0.1 Dérivabilité

Définition 4.5.

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction qui à t fait correspondre $(x(t), y(t))$.

i) Si $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivables en t_0, on dit que f est dérivable en t_0 et on pose $f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$.

ii) Si $x(t)$ et $y(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et pour tout $t \in I$, on a $f^{(k)}(t) = (x^{(k)}(t), y^{(k)}(t))$.

Remarque

$$(f \text{ est dérivable en } t_0) \Longleftrightarrow \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \text{ existe}$$

En effet, pour $t \neq t_0$, posons $g(t) = \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$, $X(t) = \dfrac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$ et $Y(t) = \dfrac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}$, alors il est facile de voir que $g(t) = (X(t), Y(t))$, donc d'après notre notre remarque sur les limites, on a

$$(\lim_{t \to t_0} g(t) \text{ existe}) \Longleftrightarrow (\lim_{t \to t_0} X(t) \text{ et } \lim_{t \to t_0} Y(t) \text{ existent})$$

4.5.0.1 Formule de Taylor-Young

Proposition 4.6.

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors pour tout $t \in I$, on a

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0) f'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!} f''(t_0) + \cdots + \frac{(t - t_0)^n}{n!} f^{(n)}(t_0) + \mathrm{o}((t - t_0)^n)$$

Preuve

Supposons que pour tout $t \in I$, on a $f(t) = (x(t), y(t))$.

Comme f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors x et y sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, donc d'après la formule de Taylor-Young appliquée à une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, pour tout $t \in I$, on a

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t - t_0)^k}{k!} x^{(k)}(t_0) + \mathrm{o}((t - t_0)^n) \quad \text{et} \quad y(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t - t_0)^k}{k!} y^{(k)}(t_0) + \mathrm{o}((t - t_0)^n)$$

Comme $f(t) = (x(t), y(t))$ et comme pour tout entier k, $f^{(k)}(t) = (x^{(k)}(t), y^{(k)}(t))$, alors on a

$$\begin{aligned}
f(t) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} x^{(k)}(t_0) + \mathrm{o}((t-t_0)^n), \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} y^{(k)}(t_0) + \mathrm{o}((t-t_0)^n) \right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} x^{(k)}(t_0), \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} y^{(k)}(t_0) \right) + (\mathrm{o}((t-t_0)^n), \mathrm{o}((t-t_0)^n)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} (x^{(k)}(t_0), y^{(k)}(t_0)) + ((t-t_0)^n \alpha(t), (t-t_0)^n \beta(t)) \quad (\text{avec } \lim_{t\to t_0} \alpha(t) = \lim_{t\to t_0} \beta(t) = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} (x^{(k)}(t_0), y^{(k)}(t_0)) + (t-t_0)^n (\alpha(t), \beta(t)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} (x^{(k)}(t_0), y^{(k)}(t_0)) + \mathrm{o}((t-t_0)^n) \quad (\text{car } \lim_{t\to t_0} (\alpha(t), \beta(t)) = (0,0))
\end{aligned}$$

4.6.0.1 Développements limités

Définition 4.7.

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de t_0, s'il existe $v_0, v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^2$, tels que

$$f(t) = v_0 + (t-t_0)v_1 + \ldots + (t-t_0)^n v_n + \mathrm{o}((t-t_0)^n)$$

où $\mathrm{o}((t-t_0)^n) = (t-t_0)^n \alpha(t)$, avec $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction, telle que $\lim_{t\to t_0} \alpha(t) = 0$.

Remarques

1. Si $f(t) = (x(t), y(t))$ et si $x(t)$ et $y(t)$ possèdent des développements limités d'ordre n au voisinage de t_0, alors f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de t_0.
   En effet, si au voisinage de t_0, on a

$$\begin{aligned}
x(t) &= a_0 + a_1(t-t_0) + \ldots + a_n(t-t_0)^n + (t-t_0)^n \alpha(t) \quad (\text{avec } \lim_{t\to t_0} \alpha(t) = 0) \\
y(t) &= b_0 + b_1(t-t_0) + \ldots + b_n(t-t_0)^n + (t-t_0)^n \beta(t) \quad (\text{avec } \lim_{t\to t_0} \beta(t) = 0)
\end{aligned}$$

   alors on voit facilement qu'au voisinage de t_0, on a

$$f(t) = (a_0, b_0) + (t-t_0)(a_1, b_1) + \ldots + (t-t_0)^n (a_n, b_n) + (t-t_0)^n (\alpha(t), \beta(t))$$

2. Si $f(t) = (x(t), y(t))$ et si $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^n$, alors $x(t)$ et $y(t)$ admettent des développements limités d'ordre n au voisinage de 0et par suite, $f(t)$ admet un développement limité d'ordre n.

Exemples

1. $f(t)=(x(t),y(t))$, avec $x(t)=2t+\dfrac{1}{2t+1}$ et $y(t)=t^2-\dfrac{1}{2t+1}$.
   Effectuons un développement limité de f d'ordre 3 au voisinage de 0.
   On a $x(t)=1+4t^2-8t^3+\mathrm{o}(t^3)$ et $y(t)=-1+2t-3t^2+8t^3+\mathrm{o}(t^3)$.
   Par suite, $f(t)=(1,-1)+t(0,2)+t^2(4,-3)+t^3(-8,8)+\mathrm{o}(t^3)$.

2. $f(t)=(x(t),y(t))$, avec $x(t)=\dfrac{\sin^2 t}{2+\sin t}$ et $y(t)=\dfrac{t^3}{1-t^2}$.
   Effectuons un développement limité de f d'ordre 3 au voisinage de 0.
   On a $x(t)=\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{4}t^3-\dfrac{1}{24}t^4+\dfrac{1}{16}t^5+\mathrm{o}(t^5)$ et $y(t)=t^3+t^5+\mathrm{o}(t^5)$.
   Par suite, $f(t)=t^2\left(\dfrac{1}{2},0\right)+t^3\left(-\dfrac{1}{4},1\right)+t^4\left(-\dfrac{1}{24},0\right)+t^5\left(\dfrac{1}{16},1\right)+\mathrm{o}(t^5)$.

4.7.0.1 Tangente à une courbe paramétrique

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t_0\in I$ et soit $f:I\longrightarrow\mathbb{R}^2$ une fonction, telle que pour tout $t\in I$, on a $f(t)=(x(t),y(t))$.
Soit $t\in I$, avec $t\neq t_0$, alors la droite $\Delta(t)$ passant par les points $M(t)$ et $M(t_0)$ a pour équation

$$(y-y(t_0))(x(t)-x(t_0))=(x-x(t_0))(y(t)-y(t_0))$$

Donc $\Delta(t)$ a pour coëfficient directeur $\dfrac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$.
On dit que la courbe possède une tangente au point $M(t_0)$, si ce coëfficient directeur admet une limite lorsque t tend vers t_0 :

$$(\text{La courbe admet une tangente au point } M(t_0))\Longleftrightarrow \lim_{t\to t_0}\frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)} \text{ existe}$$

Deux cas sont alors possibles :

i) Si $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}=m$, avec $m\in\mathbb{R}$, alors la tangente au point $M(t_0)$ s'écrit sous la forme :

$$y-y(t_0)=m(x-x(t_0))$$

ii) Si $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}=\pm\infty$, alors la courbe possède une tangente verticale au point $M(t_0)$.

Définition 4.8.

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t_0\in I$ et $f:I\longrightarrow\mathbb{R}^2$ une fonction dérivable en t_0.

i) Si $f'(t_0)\neq 0_{\mathbb{R}^2}$, on dit que $M(t_0)$ est un point régulier.

ii) Si $f'(t_0)=0_{\mathbb{R}^2}$ on dit que $M(t_0)$ est un point stationnaire.

Remarque

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction dérivable en t_0.

Si $M(t_0)$ est un point régulier, on remarque que la droite $\Delta(t)$ a pour équation

$$(y - y(t_0))\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = (x - x(t_0))\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}$$

Comme f est dérivable en t_0, alors les deux membres de cette équation possèdent une limite, lorsque t tend vers t_0, et comme $f'(t_0) \neq 0$, alors l'une au moins des deux limites est non nulle, car $f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$.

Ainsi, lorsque t tend vers t_0, la droite $\Delta(t)$ tend vers la droite $\Delta(t_0)$ ayant pour équation :

$$(y - y(t_0))x'(t_0) = (x - x(t_0))y'(t_0)$$

$\Delta(t_0)$ est donc la tangente à la courbe au point $M(t_0)$, c'est la droite passant par le point $M(t_0)$ de vecteur directeur $\vec{v} = x'(t_0)\,\vec{i} + y'(t_0)\,\vec{j}$

2. Si maintenant $M(t_0)$ est un point stationnaire, le raisonnement précédent ne marche plus, car les deux membres de l'équation auront une limite nulle.
   Dans ce cas, afin de remédier à ce problème, on suppose que f est de classe $\mathscr{C}^n$, pour un certain entier $n \geq 2$, au voisinage de t_0 et on suppose qu'il existe $k \in \{2, \ldots, n\}$, tel que $f^{(k)}(t_0) \neq 0$. Puis on considère le plus petit entier $p \in \{2, \ldots, n\}$, tel que $f^{(p)}(t_0) \neq 0$.
   Ainsi, d'après la formule de Taylor-Young, pout tout t au voisinage de t_0, on aura

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f^{(p)}(t_0)}{p!}(t - t_0)^p + \mathrm{o}((t - t_0)^p)$$

Or, une équation de la droite passant par $M(t_0)M(t)$ est définie par

$$p!(y - y(t_0))\frac{x(t) - x(t_0)}{(t - t_0)^p} = p!(x - x(t_0))\frac{y(t) - y(t_0)}{(t - t_0)^p}$$

Les deux membres de cette équation possède une limite, lorsque t tend vers t_0 et comme $f^{(p)}(t_0) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, alors l'une au moins de ces deux limites est non nulle.

Ainsi, lorsque t tend vers t_0, la droite $\Delta(t)$ tend vers la droite $\Delta(t_0)$ ayant pour équation :

$$(y - y(t_0))x^{(p)}(t_0) = (x - x(t_0))y^{(p)}(t_0)$$

$\Delta(t_0)$ est donc la tangente à la courbe au point $M(t_0)$, c'est la droite passant par le point $M(t_0)$ de vecteur directeur $\vec{v} = x^{(p)}(t_0)\,\vec{i} + y^{(p)}(t_0)\,\vec{j}$

4.8.0.1 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

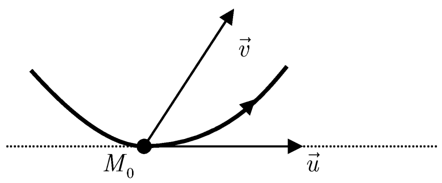
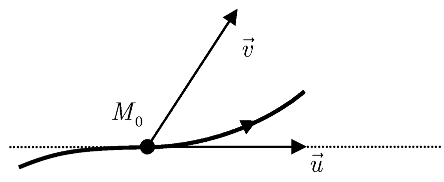
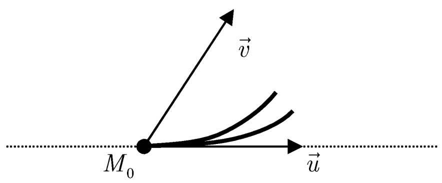
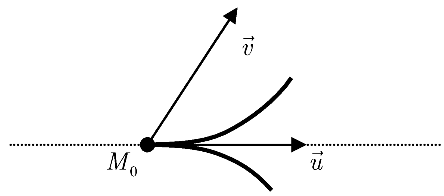
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$, avec $n \geq 2$. On suppose qu'il existe $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, tel que $f^{(k)}(t_0) \neq 0$ et on considère le plus petit entier $p \in \{1,2,\ldots,n\}$, tel que $f^{(p)}(t_0) \neq 0$. Soit $q \in \{p+1,\ldots,n\}$ le plus petit entier, tel que les vecteurs $f^{(p)}(t_0)$ et $f^{(q)}(t_0)$ soient linéairement indépendants.
Posons $\vec{u} = f^{(p)}(t_0)$ et $\vec{v} = f^{(q)}(t_0)$, alors on peut admettre les résultats suivants :

i) Si p est impair et q pair, alors $M(t_0)$ est un point ordinaire.

ii) Si p est impair et q impair, alors $M(t_0)$ est un point d'inflexion.

iii) Si p est pair et q impair, alors $M(t_0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

iv) Si p est pair et q pair, alors $M(t_0)$ est un point de rebroussement de deuxième espèce.

<table>
<tr><th></th><th>q pair</th><th>q impair</th></tr>
<tr><td>p impair</td><td>Point normal
</td><td>Point d'inflexion
</td></tr>
<tr><td>p pair</td><td>Rebroussement de deuxième espèce
</td><td>Rebroussement de première espèce
</td></tr>
</table>

Exemples

1. $f(t) = (x(t), y(t))$, où $\begin{cases} x(t) = (t-1)\ln t \\ y(t) = (t+1)\ln t \end{cases}$. Cherchons la nature du point $M(t_0)$, avec $t_0 = 1$.
   On a On a $f'(t) = \left(\ln t + \dfrac{t-1}{t}, \ln t + \dfrac{t+1}{t}\right)$ et $f''(t) = \left(\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2}, \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2}\right)$.
   Donc $f'(1) = (0,2)$ et $f''(1) = (2,0)$. $f'(1)$ et $f''(1)$ sont linéairement indépendants, donc $M(1)$ est un point ordinaire, car $p = 1$ et $q = 2$.

2. $f(t) = (x(t), y(t))$, où $\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = \sin^4(t) \end{cases}$. Cherchons la nature du point $M(t_0)$, avec $t_0 = 0$.
   En faisant un développement limité à l'ordre 4, on trouve $x(t) = t^3$ et $y(t) = t^4 + o(t^4)$, donc on aura $f(t) = t^3(1,0) + t^4(0,1) + o(t^4)$, par suite, on aura
   $f'(0) = f''(0) = (0,0)$, $f^{(3)}(0) = (6,0)$ et $f^{(4)}(0) = (0,24)$.
   On voit donc que les vecteurs $f^{(3)}(0)$ et $f^{(4)}(0)$ sont linéairement indépendants, donc $M(0)$ est un point ordinaire, car $p = 3$ et $q = 4$.

3. $f(t) = (x(t), y(t))$, où $\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t + t^4 \end{cases}$. Cherchons la nature du point $M(t_0)$, avec $t_0 = 0$.
   On a $x(t) = t^3$ et $y(t) = t + t^4$, donc $f(t) = t(0,1) + t^3(1,0) + t^4(0,1)$.
   Ainsi, on voit que $f'(0) = (0,1)$, $f''(0) = (0,0)$, $f^{(3)}(0) = (6,0)$ et $f^{(4)}(0) = (0,24)$.
   Les vecteurs $f'(0)$ et $f^{(3)}(0)$ sont linéairement indépendants,
   donc $M(0)$ est un point d'inflexion, car $p = 1$ et $q = 3$.
4. $f(t) = (x(t), y(t))$, où $\begin{cases} x(t) = t + t^4 \\ y(t) = \exp(t^5) \end{cases}$. Cherchons la nature du point $M(t_0)$, avec $t_0 = 0$.
   On a $\exp(t^5) = 1 + t^5 + \mathrm{o}(t^5)$, donc $f(t) = (0,1) + t(1,0) + t^4(1,0) + t^5(0,1) + \mathrm{o}(t^5)$ Ainsi, on a $f'(0) = (1,0)$, $f''(0) = f^{(3)}(0) = (0,0)$, $f^{(4)}(0) = (24,0)$ et $f^{(5)}(0) = (0,120)$.
   On voit donc que les vecteurs $f'(0)$ et $f^{(4)}(0)$ sont liés et que les vecteurs $f'(0)$ et $f^{(5)}(0)$ sont linéairement indépendants, donc $M(0)$ est un point d'inflexion, car $p = 1$ et $q = 5$.
5. $f(t) = (x(t), y(t))$, où $\begin{cases} x(t) = t + \dfrac{1}{t} \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases}$. Cherchons la nature du point $M(t_0)$, avec $t_0 = 1$.
   En dérivant, on trouve $f'(1) = (0,0)$, $f''(1) = (2,2)$ et $f^{(3)}(1) = (-6,0)$.
   Les vecteurs $f''(1)$ et $f^{(3)}(1)$ sont linéairement indépendants, donc $M(1)$ est un point de rebroussement de première espèce, car $p = 2$ et $q = 3$.
6. $f(t) = (x(t), y(t))$, où $\begin{cases} x(t) = \mathrm{sh}^2(t) \\ y(t) = \sin^4(t) \end{cases}$. Cherchons la nature du point $M(t_0)$, avec $t_0 = 0$.
   En faisant un développement limité, on aura $x(t) = t^2 + \dfrac{t^4}{3} + \mathrm{o}(t^4)$ et $y(t) = t^2 - \dfrac{t^4}{3} + \mathrm{o}(t^4)$, donc on aura $f(t) = t^2(1,1) + \dfrac{t^4}{3}(1,-1) + \mathrm{o}(t^4)$, par suite, on a
   $f'(0) = f^{(3)}(0) = (0,0)$, $f''(0) = (2,2)$ et $f^{(4)}(0) = (2,-2)$.
   Les vecteurs $f''(0)$ et $f^{(4)}(0)$ sont linéairement indépendants, $M(0)$ est donc un point de deuxième espèce, car $p = 2$ et $q = 4$.

4.8.0.2 Branches infinies

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction qui à $t \in I$ fait correspondre
$f(t) = (x(t), y(t))$. Soit t_0 l'une des extrémités de l'intervalle I, alors on a $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition 4.9.

On dit que la courbe possède une branche infinie en t_0, si l'une au moins des fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ tend vers l'infini, lorsque t tend vers t_0.

Remarque

1. La courbe admet une branche infinie en t_0, si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} \|f(t)\| = +\infty$.
   où $\|f(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$.

2. D'après la définition, plusieurs cas sont possibles :

 a) $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$,
 alors la courbe possède une asymptote verticale d'équation $x = a$.

 b) $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = b$,
 alors la courbe possède une asymptote horizontale d'équation $y = b$.

 c) $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$, dans ce cas on étudie $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$:

  i) $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, alors la courbe admet une branche parabolique de direction (Oy).

  ii) $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$, alors la courbe admet une branche parabolique de direction (Ox).

  iii) $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = m$, avec $m \neq 0$, et $\lim\limits_{t\to t_0} (y(t) - mx(t)) = \pm\infty$, alors la courbe possède une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = mx$.

  iv) $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = m$, avec $m \neq 0$, et $\lim\limits_{t\to t_0} (y(t) - mx(t)) = b$, avec $b \in \mathbb{R}$, alors la courbe possède une asymptote d'équation $y = mx + b$.

4.9.1 Plan d'étude d'une courbe paramétrique

4.9.1.1 Domaine de définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction qui à $t \in I$ fait correspondre $f(t) = (x(t), y(t))$. Soient D_x le domaine de définition de la fonction $t \longrightarrow x(t)$ et D_y celui de la fonction $t \longrightarrow y(t)$, alors le domaine de définition de f est défini par $D_f = D_x \cap D_y$.

4.9.1.2 Réduction du domaine de définition

Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction qui à $t \in D_f$ fait correspondre $f(t) = (x(t), y(t))$.
Afin de réduire le domaine de définition D_f, nous commençons par étudier la přiodicité de f et les éventuelles symétries de la courbe définie par f.
On sait, qu'en général, D_f est une réunion d'intervalles, donc pour simplifier, on suppose que D_f est un intervalle I de $\mathbb{R}$. Plusieurs cas sont alors possibles :

1. **Périodicité**
 Si $I = \mathbb{R}$ et s'il existe $T > 0$, tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t+T) = f(t)$, alors le domaine d'étude est réduit à un intervalle de longueur T. Pour pouvoir étudier facilement les possibles symétries, on considère l'intervalle $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$.
2. **Différentes symétries**

 a) Cas d'un intervalle centré à l'origine, par exemple $I = [-a, a]$.

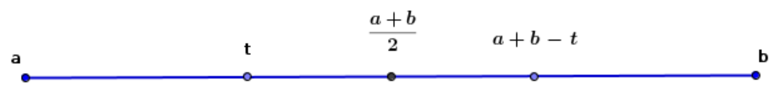
i) Si $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, alors $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox). Dans ce cas, on limite l'étude à $[0,a]$, on trace la courbe, puis on complète par symétrie par rapport à (Ox).

ii) Si $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, alors $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Oy). Dans ce cas, on limite l'étude à $[0,a]$, on trace la courbe, puis on complète par symétrie par rapport à (Oy).

iii) Si $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, alors $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'origine. Dans ce cas, on limite l'étude à $[0,a]$, on trace la courbe, puis on complète par symétrie par rapport à l'origine.

iv) Si $x(-t) = y(t)$ et $y(-t) = x(t)$, alors $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à la droite d'équation $y = x$. Dans ce cas, on limite l'étude à $[0,a]$, on trace la courbe, puis on complète par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

b) Cas d'un intervalle fermé borné $[a,b]$. Dans ce cas, l'intervalle $[a,b]$ est symétrique par rapport à son milieu $\dfrac{a+b}{2}$, autrement dit, si $t \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ alors son symétrique par rapport à $\dfrac{a+b}{2}$ est $a+b-t$ et on a $a+b-t \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$:



On est donc amené à étudier les cas suivants :

i) Si $x(a+b-t) = x(t)$ et $y(a+b-t) = -y(t)$, alors le point $M(a+b-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox). Dans ce cas on limite l'étude à $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, on trace la courbe, puis on complète par symétrie par rapport à (Ox).

ii) Si $x(a+b-t) = -x(t)$ et $y(a+b-t) = y(t)$, alors le point $M(a+b-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Oy). Dans ce cas on limite l'étude à $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, on trace la courbe, puis on complète par symétrie par rapport à (Oy).

iii) Si $x(a+b-t) = -x(t)$ et $y(a+b-t) = -y(t)$, alors le point $M(a+b-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'origine. Dans ce cas on limite l'étude à $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, on trace la courbe, puis on complète par symétrie par rapport à l'origine.

iv) Si $x(a+b-t) = y(t)$ et $y(a+b-t) = x(t)$, alors le point $M(a+b-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à la droite d'équation $y = x$. Dans ce cas on limite l'étude à $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, on trace la courbe, puis on complète par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3. **Translation**

   Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction définit sur $\mathbb{R}$, avec $f(t) = (x(t), y(t)$.
   On suppose qu'il existe $T > 0$ et il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

   $$x(t+T) = a + x(t) \text{ et } y(t+T) = b + y(t)$$

   Alors il suffit de réduire le domaine d'étude à l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, de faire une représentation graphique sur cet intervalle, puis compléter la courbe par translation de vecteur $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

Exemples

1. $f(t) = (x(t), y(t))$, avec $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$

   On a $D_x = \mathbb{R}$ et $D_y = \mathbb{R}$, donc $D_f = \mathbb{R}$.
   On a $x(t+2\pi) = x(t)$ et $y(t+2\pi) = y(t)$, donc l'étude est réduit à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
   On a $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, donc la courbe admet une symétrie par rapport à l'axe (Ox) et par suite l'étude est réduit à $[0, \pi]$.
   On a $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$, donc la courbe admet une symétrie par rapport à l'axe (Oy) et par suite l'étude est réduit à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   On a aussi $x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = y(t)$ et $y\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = x(t)$, donc la courbe admet une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ et par suite, l'étude est réduit à $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

2. $f(t) = (x(t), y(t))$, avec $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{1-t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1-t^2} \end{cases}$

   On a $D_x = D_y =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, donc $D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
   On a $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, donc la courbe possède une symétrie par rapport à (Ox) et par suite, l'étude est réduit à $]1, +\infty[$.

3. $f(t) = (x(t), y(t))$, avec $\begin{cases} x(t) = t + \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$.

   On a $D_f = \mathbb{R}$ et on a $x(t+2\pi) = 2\pi + x(t)$ et $y(t+2\pi) = y(t)$, donc l'étude est réduit à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et on copmlète la courbe par translation de vecteur $\vec{v} = 2\pi\vec{i}$.
   On a aussi $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, donc la courbe possède une symétrie par rapport à (Oy) et par suite, l'étude est réduit à $[0, \pi]$.

4.9.1.3 Points double

Définition 4.10.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction qui à t fait correspondre $f(t) = (x(t), y(t))$.
On dit que la courbe définie par f possède des points doubles (ou triples), s'il existe $t \in I$ et il existe $t' \in I$, avec $t \neq t'$, tels que $M(t) = M(t')$.

Remarque
Pour la recherche des points doubles, on est, en général amené à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x(t) = x(t') \\ y(t) = y(t') \end{cases} \quad \text{avec } t \neq t'$$

Exemples
$f(t) = (x(t), y(t))$, avec $\begin{cases} x(t) = t^2 + \dfrac{2}{t} \\ y(t) = t^2 + \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$.
On a $D_f = \mathbb{R}^*$. Soient $t \in \mathbb{R}^*$ et $t' \in \mathbb{R}^*$, avec $t \neq t'$, alors on a

$$\begin{aligned} x(t) = x(t') &\Longleftrightarrow t^2 + \frac{2}{t} = t'^2 + \frac{2}{t'} \\ &\Longleftrightarrow t't^3 + 2t' = tt'^3 + 2t \\ &\Longleftrightarrow t't(t-t')(t+t') = 2(t-t') \\ &\Longleftrightarrow tt'(t+t') = 2 \quad (\text{car } t \neq t') \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} y(t) = y(t') &\Longleftrightarrow t^2 + \frac{1}{t^2} = t'^2 + \frac{1}{t'^2} \\ &\Longleftrightarrow t'^2t^4 + t'^2 = t^2t'^4 + t^2 \\ &\Longleftrightarrow t^2t'^2(t-t')(t+t') = (t-t')(t+t') \\ &\Longleftrightarrow (tt')^2 = 1 \quad (\text{car } tt'(t+t') = 2, \text{ donc } t+t' \neq 0 \text{ et on a } t-t' \neq 0) \end{aligned}$$

On en déduit donc que $(tt' = 1 \text{ et } t+t' = 2)$ ou $(tt' = -1 \text{ et } t+t' = -2)$
Ainsi, t et t' sont solution de l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$ ou de l'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$.
Comme $t \neq t'$, alors t et t' sont solution de $x^2 + 2x - 1 = 0$, donc $t = -1 + \sqrt{2}$ et $t' = -1 - \sqrt{2}$.

4.10.0.1 Tableau de variation

L'étape finale de l'étude d'une d'une fonction $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est la construction d'un tableau de variation correspondant au domaine d'étude de f. Ce tableau contient tous les points particuliers (points stationnaires, points doubles, ...), les variations de $x(t)$ et de $y(t)$:

t	
x'(t)	
x(t)	
y(t)	
y'(t)	

Pour s'orienter dans la construction de la courbe, On peut appliquer les remarques suivantes :

1.

x(t)	$\nearrow$
y(t)	$\nearrow$

On se déplace vers la droite et vers le haut.

2.

x(t)	$\nearrow$
y(t)	$\searrow$

On se déplace vers la droite et vers le bas.

3.

x(t)	$\searrow$
y(t)	$\nearrow$

On se déplace vers la gauche et vers le haut.

4.

x(t)	$\searrow$
y(t)	$\searrow$

On se déplace vers la gauche et vers le bas

Exemples

1. Etudier et représenter la courbe définie par $f(t) = (x(t), y(t))$, avec

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{1-t^2} \\ \dfrac{t^3}{1-t^2} \end{cases}$$

On a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.
On a $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, donc la courbe possède une symétrie par rapport à l'axe (Ox) et par suite, le domaine d'étude est réduit à $D = [0, 1[\cup]1, +\infty[$.
On a $\lim\limits_{t\to 1^-} x(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to 1^+} x(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to 1^-} y(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to 1^+} y(t) = -\infty$, on est donc amené à la recherche d'une éventuelle asymptote lorsque t tend vers 1.
On a $\dfrac{y(t)}{x(t)} = t^3$, donc $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 1$.
On a $y(t) - x(t) = \dfrac{t^3 - 1}{1 - t^2} = -\dfrac{t^2 + t + 1}{t + 1}$, donc $\lim\limits_{t\to 1}(y(t) - x(t)) = -\dfrac{3}{2}$.
Ainsi, la droite d'équation $y = x - \dfrac{3}{2}$ est une asymptote à la courbe.
On a $\lim\limits_{t\to +\infty} x(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to +\infty} y(t) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe.
On a $x'(t) = \dfrac{2t}{(1-t^2)^2}$ et $y'(t) = \dfrac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}$, donc on aura
$x'(t) = 0$, pour $t = 0$ et $y'(t) = 0$, pour $t = 0$ ou $t = \sqrt{3}$.
Ainsi, on voit que $M(\sqrt{3})$ est un point régulier et la tangente en ce point est horizontale.
$M(0)$ est un point stationnaire, pour obtenir la tangente et sa nature en ce point, nous faisons

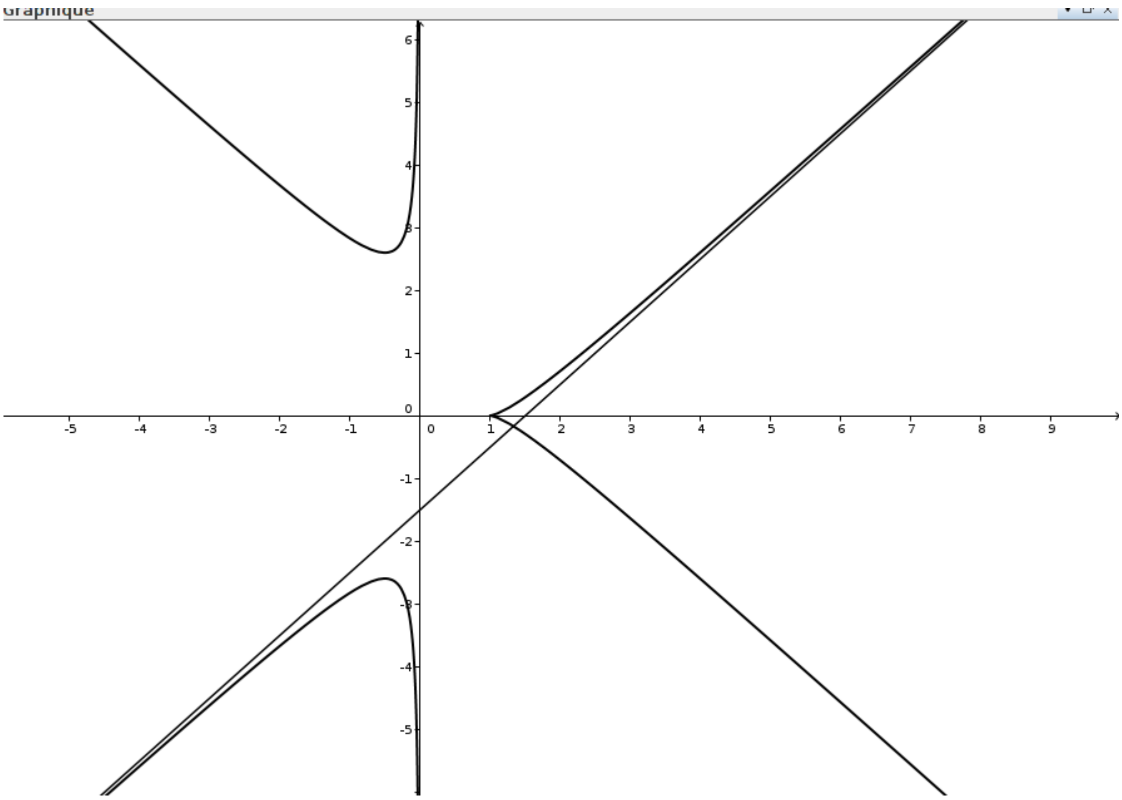
un développent limité au voisinage de 0 de $x(t)$ et $y(t)$:

$$x(t) = t^2 + \mathrm{o}(t^3) \;\text{ et }\; y(t) = t^3 + \mathrm{o}(t^3)$$

Donc $f(t) = (1,0)t^2 + (0,1)t^3 + \mathrm{o}(t^3)$, par suite, on a $f''(0) = (2,0)$ et $f^{(3)}(0) = (0,6)$, donc la tangente au point $M(0)$ a pour vecteur directeur $2\vec{i}$, elle est donc horizontale. Les vecteurs $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$ sont linéairement indépendants, donc $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.
On a alors le tableau de variation suivant :

t	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	$\|\|$		$+$		$\|\|$
$x(t)$	1	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\searrow$	$+\infty \;\|\|$
$y'(t)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$

L'allure de la courbe est déterminée par le dessin suivant :



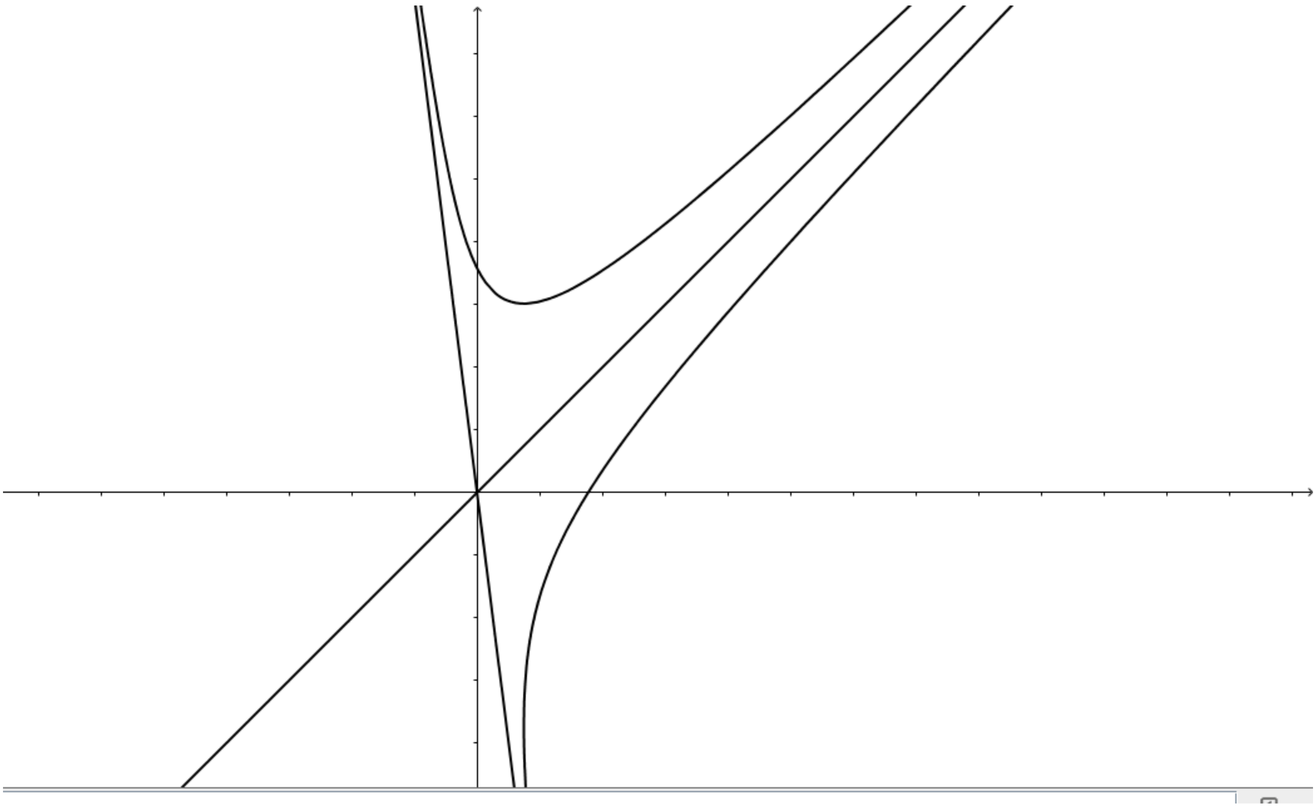
2. Etudier et représenter la courbe définie par $f(t) = (x(t), y(t))$, avec

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{1}{2t} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{4}{t} \end{cases}$$

On a $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
On a $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = +\infty$, donc la courbe admet une branche infinie.
Pour $t \in D_f$, on a $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{1+\dfrac{16}{t^3}}{1-\dfrac{2}{t^3}}$, donc $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 1$.
On a $y(t) - x(t) = \dfrac{9}{2t}$, donc $\lim\limits_{t\to\pm\infty} (y(t) - x(t)) = 0$, par suite, la droite d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe.
On a $\lim\limits_{t\to 0^\pm} x(t) = \mp\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0^\pm} y(t) = \mp\infty$, donc la courbe admet une branche infinie.
Pour $t \in D_f$, on a $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t^3+16}{t^3-2}$, donc $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = -8$.
On a $y(t) + 8x(t) = \dfrac{9t^2}{4}$, donc $\lim\limits_{t\to 0}(y(t) + 8x(t)) = 0$, par suite, la droite d'équation $y = -8x$ est une asymptote à la courbe.
On a $x(t) = 0 \Longleftrightarrow t = \sqrt[3]{2}$ et $y(t) = 0 \Longleftrightarrow t = -2\sqrt[3]{2}$.
Donc $M(\sqrt[3]{2}) = \left(0, \dfrac{18}{\sqrt[3]{2}}\right)$, avec $\dfrac{18}{\sqrt[3]{2}} \simeq 3.57$ et $M(-2\sqrt[3]{2}) = \left(\dfrac{9}{\sqrt[3]{2}}, 0\right)$, avec $\dfrac{9}{\sqrt[3]{2}} \simeq 1.78$.
On a $x'(t) = \dfrac{t^3+1}{2t^2}$ et $y'(t) = \dfrac{t^3-8}{2t^2}$, donc $x'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = -1$ et $y'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 2$.
On obtient alors le tableau de variation suivant :

t	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	$\|$		$+$		
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{15}{4}$	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$			$-$		$\|$	$-$	0	$+$	

L'allure de la courbe est illustré par le dessin suivant :



3. Etudier et représenter la courbe définie par $f(t) = (x(t), y(t))$, avec

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$$

On a $D_f = \mathbb{R}$.
On a $x(t+2\pi) = 2\pi + x(t)$ et $y(t+2\pi) = y(t)$, donc le domaine d'étude est réduit à $[-\pi, \pi]$, puis on complète le graphe obtenu sur $[-\pi, \pi]$ par translation de vecteur $\vec{v} = 2\pi\vec{i}$.
On a $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, donc la courbe possède une symétrie par rapport à l'axe (Oy), par suite le domaine d'étude est réduit à $[0, \pi]$.
On a $x'(t) = 1 - \cos t$ et $y'(t) = \sin t$, donc pour $t \in [0, \pi]$, on a

$$x'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0 \text{ et } y'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = \pi$$

$M(0)$ est donc un point stationnaire, ainsi, pour obtenir la tangente au point $M(0)$, nous faisons un développement limité de $x(t)$ et $y(t)$ au voisinage de 0.
On a $x(t) = \dfrac{t^3}{6} + o(t^3)$ et $y(t) = \dfrac{t^2}{2} + o(t^3)$, donc on aura

$$f(t) = t^2\left(0, \frac{1}{2}\right) + t^3\left(\frac{1}{6}, 0\right) + o(t^3)$$

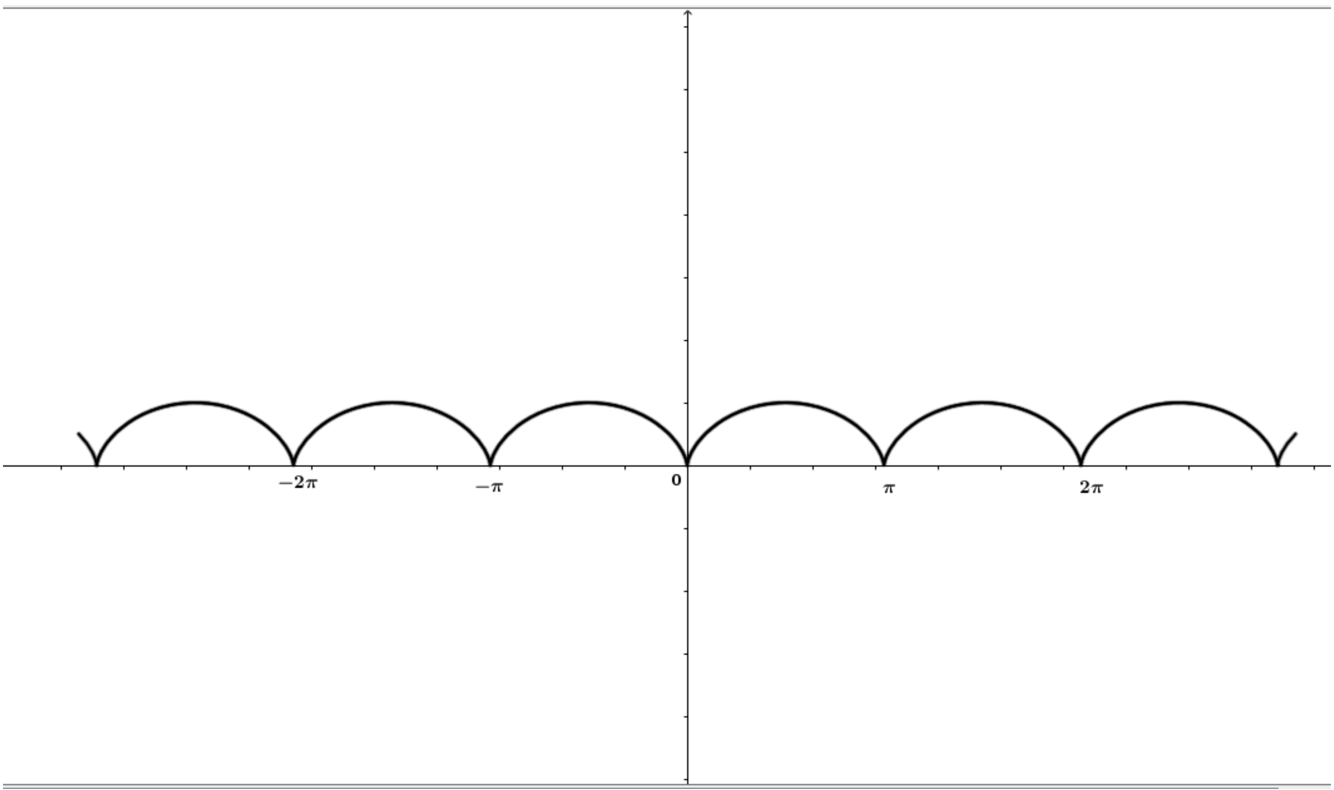
Donc, on a $f''(0) = (0,1)$ et $f^{(3)}(0) = ((1,0)$, par suite la tangente au point $M(0)$ est dérigé par le vecteur $\vec{j}$, donc elle est horizontale.

Les vecteurs $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$ sont linéaiorement indépendants, donc $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

Pour tout $t \in [0,\pi]$, on a $x'(t) \geq 0$ et $y'(t) \geq 0$, on obtient alors le tableau de variation suivant :

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0	$+$	1	$+$	2
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\nearrow$	π
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2
$y'(t)$	0	$+$	1	$+$	0

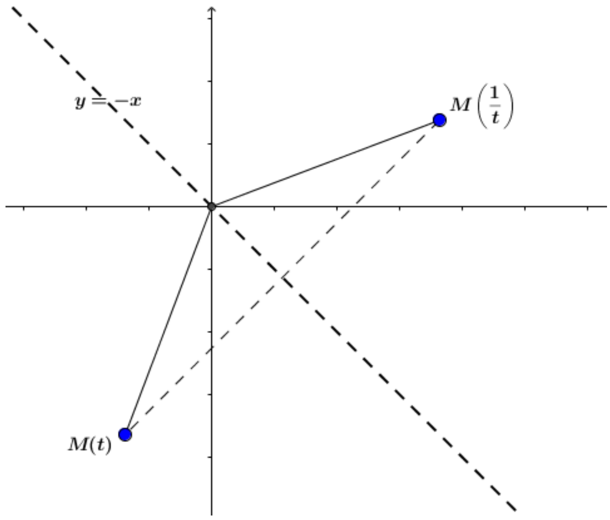
L'allure de la courbe est déterminée par le dessin suivant :



4. Etudier et représenter la courbe définie par $f(t) = (x(t), y(t))$, avec

$$\begin{cases} x(t) = t\ln t \\ y(t) = \dfrac{\ln t}{t} \end{cases}$$

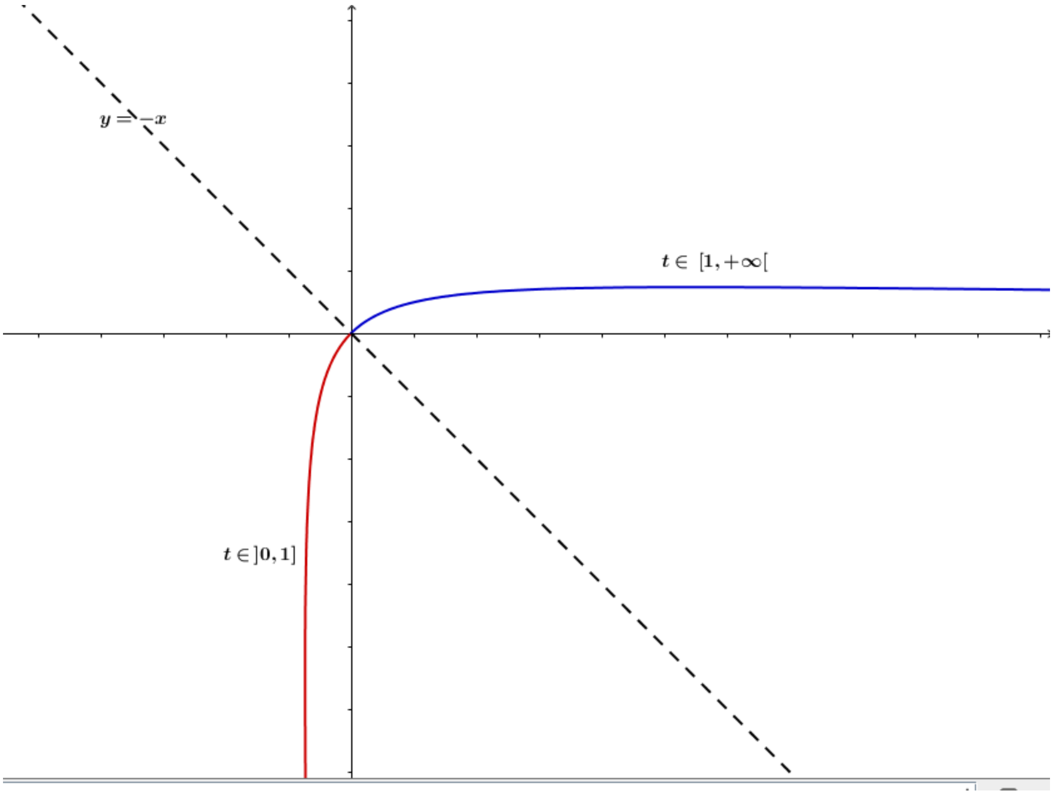
On a $D_f = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ et pour tout $t > 0$, on a $x\left(\dfrac{1}{t}\right) = -y(t)$ et $y\left(\dfrac{1}{t}\right) = -x(t)$, donc la courbe possède une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = -x$, par suite, le domaine d'étude est réduit à $]0, 1]$ ou à $[1, +\infty[$:



On a $\lim\limits_{t\to 0} x(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} y(t) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe.
On a $x'(t) = \ln t + 1$ et $y'(t) = \dfrac{1-\ln t}{t^2}$, donc $x'(t) = 0$ pour $t = \dfrac{1}{e}$ et $y'(t) = 0$ pour $t = e$, on obtient donc le tableau de variation suivant :

t	0		$\frac{1}{e}$		1
$x'(t)$		$-$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	1
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\nearrow$	0
$y'(t)$			$+$		

L'allure de la courbe est déterminée par le dessin suivant :



5. Etudier et représenter la courbe définie par $f(t)=(x(t),y(t))$, avec

$$\begin{cases} x(t)=\sin^3 t \\ y(t)=\cos(3t) \end{cases}$$

On a $D_f=\mathbb{R}$.
On a $x(t+2\pi)=x(t)$ et $y(t+2\pi)=y(t)$, donc le domaine d'étude est réduit à $[-\pi,\pi]$.
On a $x(-t)=-x(t)$ et $y(-t)=y(t)$, donc la courbe possède une symétrie par rapport à l'axe (Oy), et par suite le domaine d'étude est réduit à $[0,\pi]$.
On a $x(\pi-t)=x(t)$ et $y(\pi-t)=-y(t)$, donc la courbe possède une symétrie par rapport à l'axe (Ox), et par suite le domaine d'étude est réduit à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
On a $x'(t)=3\cos t\sin^2 t$ et $y'(t)=-3\sin(3t)$, donc pour $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$x'(t)=0 \iff t=0 \text{ ou } t=\frac{\pi}{2}$$
$$y'(t)=0 \iff t=0 \text{ ou } t=\frac{\pi}{3}$$

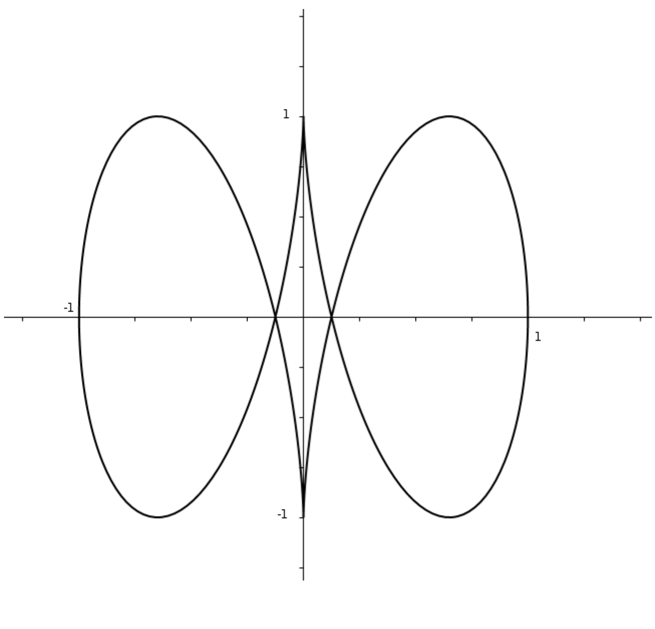
$M(0)$ est donc un point stationnaire, nous devons donc chercher la tangente au point $M(0)$, pour cela on procède à un développement lmité de $x(t)$ et $y(t)$ au voisinage de 0.
On a $x(t)=t^3+\mathrm{o}(t^3)$ et $y(t)=1-\frac{9}{2}t^2+\mathrm{o}(t^3)$, donc on aura

$$f(t)=(0,1)+t^2\left(0,-\frac{1}{9}\right)+t^3(1,0)+\mathrm{o}(t^3)$$

Ainsi, on a $f''(0) = \left(0, -\dfrac{2}{9}\right)$ et $f^{(3)}(0) = (6,0)$, donc la tangente au point $M(0)$ est dérigé par le vecteur $-\dfrac{2}{9}\vec{j}$, on a donc une tangente verticale au point $M(0)$.
Comme les vecteurs $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$ sont linéairement indépendants, alors $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce. On a $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $x'(t) \geq 0$ et $y'(t) \geq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{\pi}{3} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$.
On a $y(t) = 0 \Longleftrightarrow t = \dfrac{\pi}{6}$, donc la courbe coupe l'axe (Ox) au point $M(\frac{\pi}{6})$.
On obtient alors le tableau de variation suivant :

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0			$+$			0
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\nearrow$	1
$y(t)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$y'(t)$	0		$-$		0	$+$	

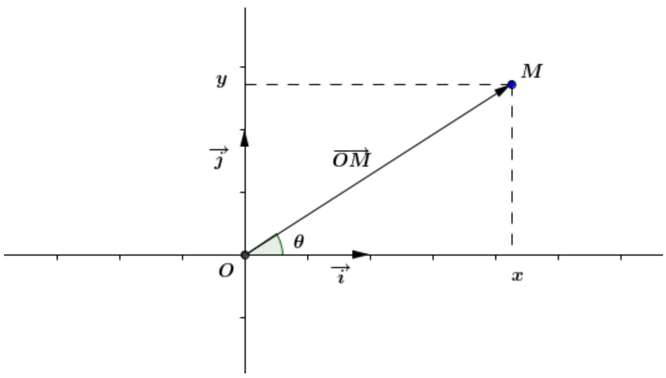
On obtient alors le graphe suivant :



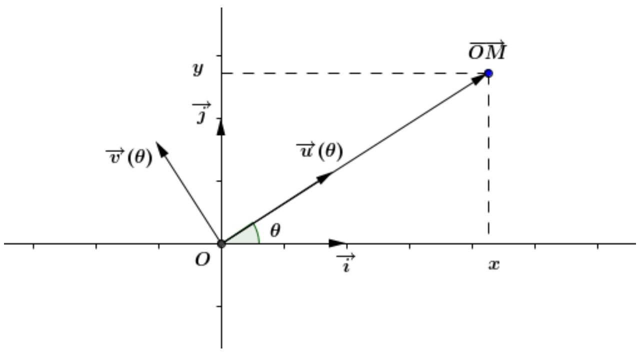
4.11 Courbes en coordonnées polaires

4.11.1 Coordonnées polaires

Le plan $\mathbb{R}^2$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Pour chaque point M de $\mathbb{R}^2$, on désigne par θ l'angle, orienté dans le sens positif, formé par les vecteurs $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$, c'est à dire $\theta = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$ et on désigne par r la distance du point M au point O, on a donc $r = d(O,M) = \|\overrightarrow{OM}\|$.



On a alors $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.
Posons $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ et $\vec{v}(\theta) = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$, alors $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ est un repère orthonormé du plan $\mathbb{R}^2$ et on a $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta)$.
r et θ sont appelés les coordonnées polaires du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Remarque
On a

$$\frac{d\vec{u}(\theta)}{d\theta} = \vec{v}(\theta)$$

4.11.2 Courbes d'équation pôlaire $r = f(\theta)$

4.11.2.1 Définition et exemples

Définition 4.12.

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, alors l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées pôlaires $(f(\theta), \theta)$ définit une courbe du plan, appelée courbe pôlaire d'équation $r = f(\theta)$.

Remarque

1. Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation pôlaire $r = f(\theta)$, alors pour tout point $M \in \mathscr{C}$, on a

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = f(\theta)\overrightarrow{u}(\theta)$$

   Donc, si x et y sont les coordonnées cartésiennes dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, alors on a

$$\begin{cases} x(\theta) = f(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

   Donc l'étude d'une courbe pôlaire peut se ramener à l'étude d'une courbe paramétrique, mais en général, il est plus facile de faire une étude de la courbe sous sa forme pôlaire.

2. Si f est dérivable sur I, alors pour pour tout $\theta \in I$, on a

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = f'(\theta)\overrightarrow{u} + f(\theta)\overrightarrow{v}$$

Exemples

1. La courbe définie par $f(\theta) = r_0$, r_0 est constant, est le cercle de centre O et de rayon r_0.
2. La courbe définie par $f(\theta) = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$ est une parabole.
3. La courbe définie par $f(\theta) = \dfrac{1}{2+\cos\theta}$ est une ellipse.
4. La courbe définie par $f(\theta) = \dfrac{1}{1+2\cos\theta}$ est une hyperbole.

4.12.0.1 Plan d'étude d'une courbe pôlaire

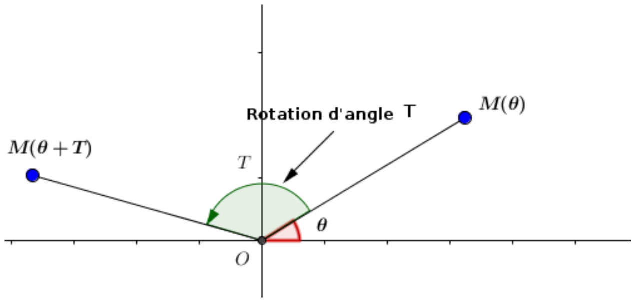
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $\mathscr{C}$ la courbe pôlaire définie par l'équation $r = f(\theta)$.

1. **Réduction du domaine d'étude**

   a) Périodicité

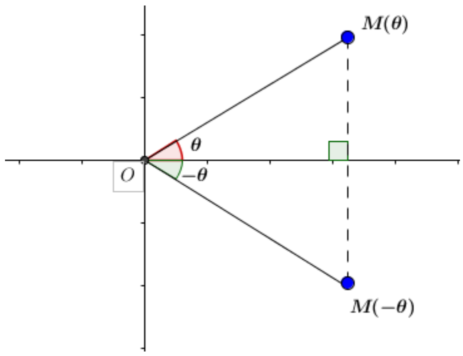
i) Si f est périodique de période 2π, alors $f(\theta+2\pi)=f(\theta)$ et $M(\theta+2\pi)=M(\theta)$, donc les points $M(\theta+2\pi)$ et $M(\theta)$ sont confondus, par suite, on obtient l'intégralité de la courbe sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi,\pi]$.

ii) Si f est périodique de période T, avec $T>0$, alors $f(\theta+T)=f(\theta)$, donc $M(\theta+T)$ est l'image de $M(\theta)$ par la rotation de centre O est d'angle T, par suite, l'étude de la courbe est réduit à un intervalle de longueur T, par exemple $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$:

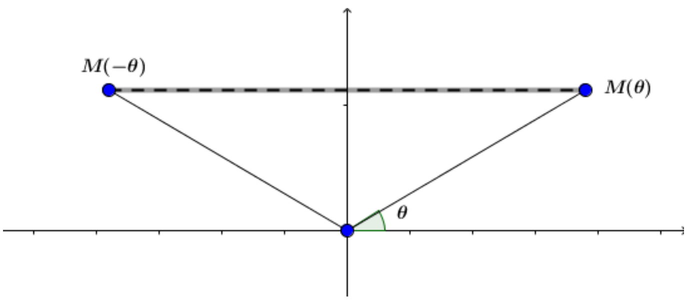


b) Parité

i) Si f est pair, alors $f(-\theta)=f(\theta)$, donc $M(-\theta)$ est l'image de $M(\theta)$ par la symétrie orthogonale d'axe (Ox), donc l'étude de la courbe est restreinte à $I\cap\mathbb{R}_+$:



ii) Si f est impair, alors $f(-\theta)=-f(\theta)$, donc $M(-\theta)$ est l'image de $M(\theta)$ par la symétrie orthogonale d'axe (Oy), donc l'étude de la courbe est restreinte à $I\cap\mathbb{R}_+$:

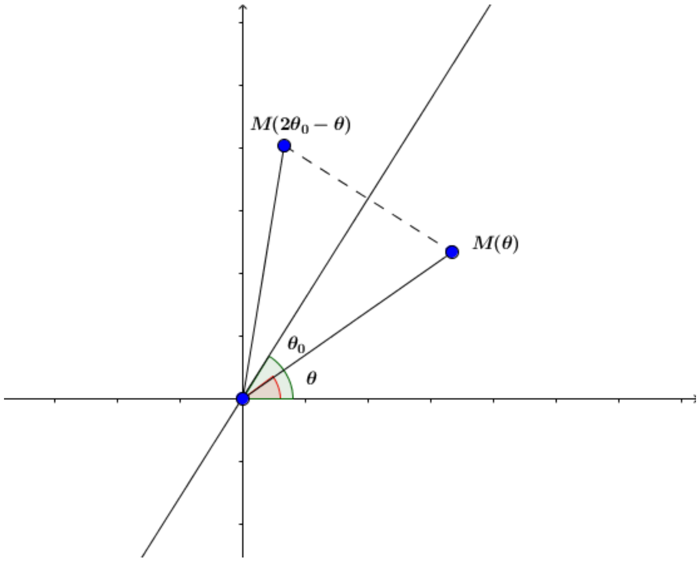


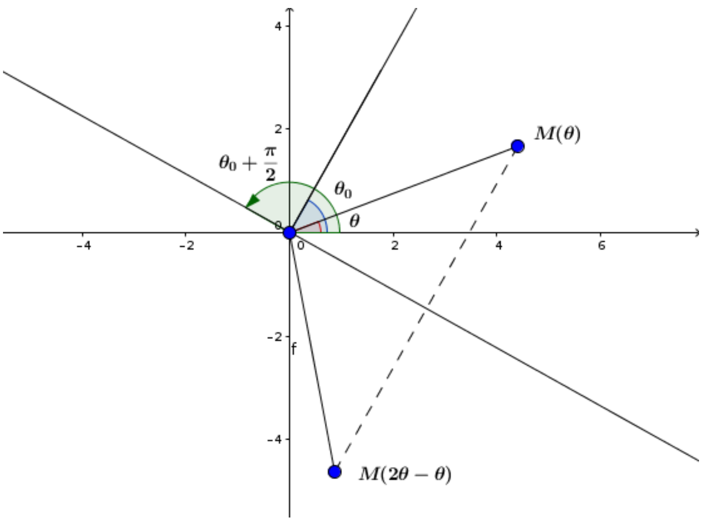
c) Symétrie

On suppose qu'il existe $\theta_0\in I$ tel que I soit symétrique par rapport à θ_0, c'est à dire, pour tout $\theta\in I$, on a $2\theta_0-\theta\in I$.

i) Si pour tout $\theta \in I$, on a $f(2\theta_0 - \theta) = f(\theta)$, alors $M(2\theta_0 - \theta)$ est le symétrique de $M(\theta)$ par rapport à la droite passant par O de coefficient directeur $\tan\theta_0$, donc l'étude de la courbe est réduite à $I \cap [\theta_0, +\infty[$ ou à $I \cap]-\infty, \theta_0]$.

ii) Si pour tout $\theta \in I$, on a $f(2\theta_0 - \theta) = -f(\theta)$, alors $M(2\theta_0 - \theta)$ est le symétrique de $M(\theta)$ par rapport à la droite passant par O de coefficient directeur $\tan\left(\theta_0 + \frac{\pi}{2}\right)$, donc l'étude de la courbe est réduite à $I \cap [\theta_0, +\infty[$ ou à $I \cap]-\infty, \theta_0]$.





2. **Tangente à une courbe pôlaire**

Pour tout $M \in \mathscr{C}$, on a $\overrightarrow{OM}(\theta) = f(\theta)\vec{u}$, donc on aura

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = f'(\theta)\vec{u}(\theta) + f(\theta)\vec{v}(\theta)$$

a) Si $f(\theta_0) \neq 0$, alors la tangente au point $M(\theta_0)$ a pour vecteur directeur

$$\vec{w} = f'(\theta_0)\vec{u}(\theta_0) + f(\theta_0)\vec{v}(\theta_0)$$

b) Si $f(\theta_0) = 0$ et $f'(\theta) \neq 0$, alors la tangente au point $M(\theta_0)$ a pour vecteur directeur $\vec{v}$.

c) Si $f(\theta_0) = f'(\theta_0) = 0$, on aura

$$\lim_{\theta \to \theta_0} \frac{y(\theta) - y(\theta_0)}{x(\theta) - x(\theta_0)} = \lim_{\theta \to \theta_0} \frac{y(\theta)}{x(\theta)} = \lim_{\theta \to \theta_0} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan(\theta_0) \quad (\text{avec } \theta_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

Donc dans ce cas la tangente a pour coëfficient directeur $\tan(\theta_0)$, donc la tangente a pour équation $y = \tan(\theta_0)x$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Remarque

(a) Dans le cas où $f(\theta_0) = 0$, le point $M(\theta_0)$ est situé à l'origine et on a

i) Si $f(\theta)$ s'annule en θ_0 et change de signe, alors $M(\theta_0)$ est un point ordinaire.

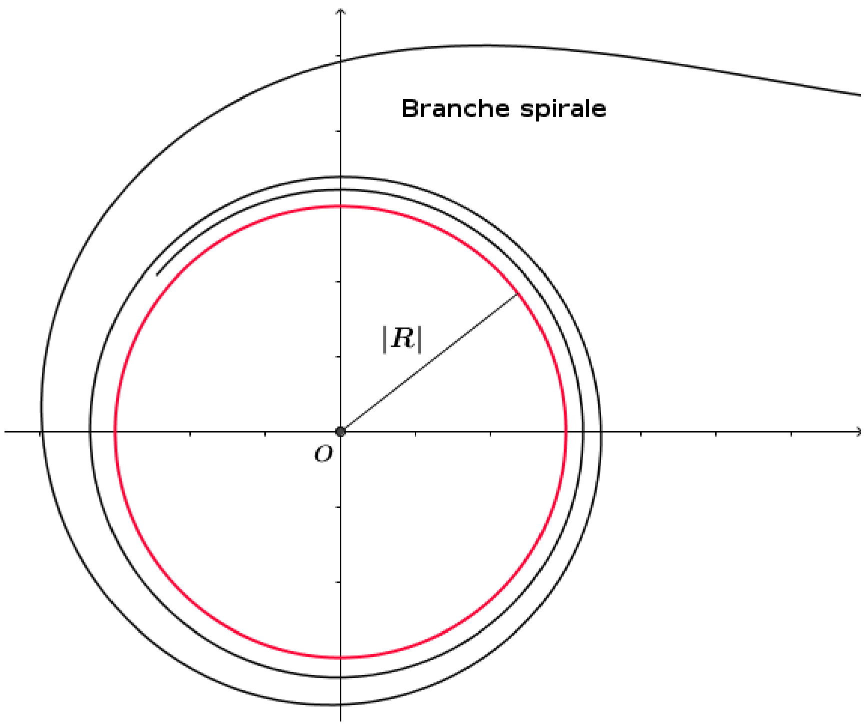
ii) Si $f(\theta)$ s'annule en θ_0 et garde un signe constant, alors $M(\theta_0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

(b) Si $f'(\theta_0) \neq 0$, alors la tangente au point $M(\theta_0)$ a pour coëfficient directeur $\dfrac{f(\theta_0)}{f'(\theta_0)}$ dans le repère radial $(M(\theta_0), \vec{u}(\theta_0), \vec{v}(\theta_0))$.

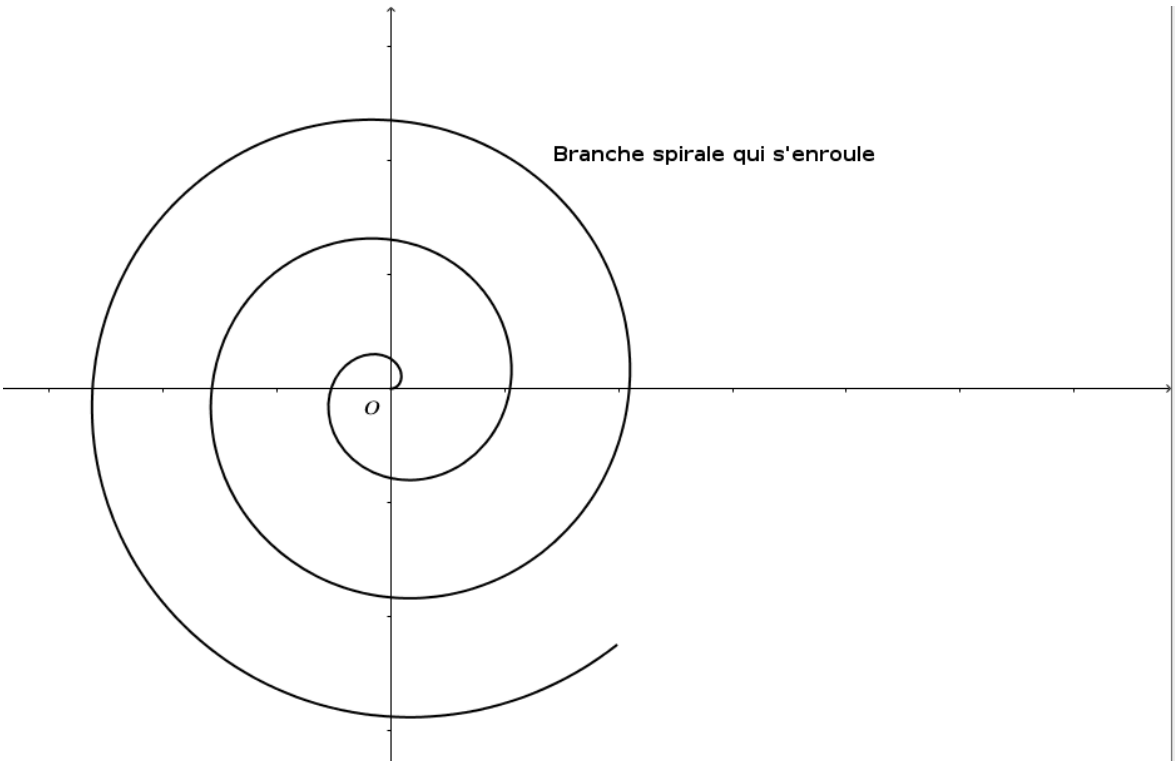
(c) Si $f\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$, alors la tangente au point $M\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ est verticale.

3. **Branches infinies**

a) Si $\lim\limits_{\theta \to \pm\infty} f(\theta) = R$, alors la courbe admet une branche spirale qui s'enroule autour du cercle de centre O et de rayon $|R|$:



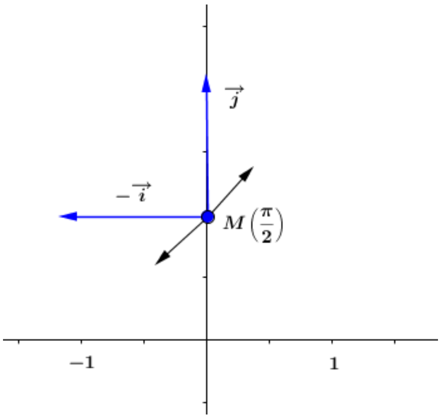
b) Si $\lim\limits_{\theta \to \pm\infty} f(\theta) = \pm\infty$, alors la courbe admet une branche spirale qui se déroule :



c) Si $\lim\limits_{\theta\to\theta_0} f(\theta) = \pm\infty$, alors la courbe admet une direction asymptotique la droite de coëfficient directeur $\tan(\theta_0)$.
Si de plus $\lim\limits_{\theta\to\theta_0} f(\theta)\sin(\theta-\theta_0) = b$, alors la droite d'équation $y = \tan(\theta_0)x + \dfrac{b}{\cos(\theta_0)}$ est une asymptote à la courbe.

Exemples

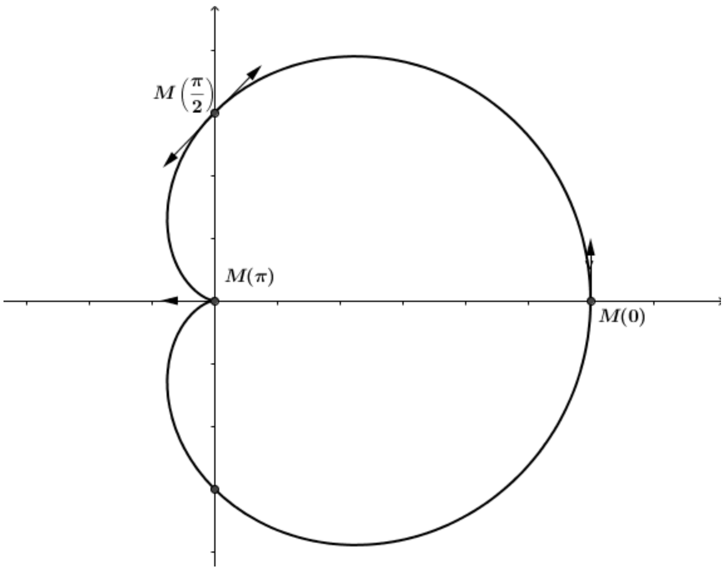
1. Etudier et construire la courbe d'équation pôlaire $f(\theta) = 1+\cos(\theta)$.
   On a $D_f = \mathbb{R}$ et $f(\theta+2\pi) = f(\theta)$, donc la totalité de la courbe est obtenue en réduisant l'étude à un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi,\pi]$.
   On a $f(-\theta) = f(\theta)$, alors la courbe admet une symétrie par rapport à l'axe (Ox), par suite l'étude est réduit à $[0,\pi]$.
   Pour $\theta\in[0,\pi]$, on a $f(\theta) = 0 \Longleftrightarrow \theta = \pi$ et $f(\theta)$ garde un signe constant, donc $M(\pi)$ est un point de rebroussement de première espèce.
   On a $f'(\theta) = -\sin\theta$, donc $f'(\theta) = 0 \Longleftrightarrow (\theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi)$
   Donc la tangente en $M(0)$ est verticale et la tangente en $M(\pi)$ est horizontale.
   La courbe coupe l'axe (Ox) au point $M(\pi)$ et l'axe (Oy) au point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
   On a $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, donc la tangente en $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ a pour coëfficient directeur -1 dans le repère $\left(M\left(\frac{\pi}{2}\right), \vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right), \vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, avec $\vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec{j}$ et $\vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\vec{i}$) :



On obtient alors le tableau de variation suivant :

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(\theta)$	0	$-$	0
$f(\theta)$	2	$\searrow$ 1 $\searrow$	0

L'allure de la courbe est définie par le dessin suivant :

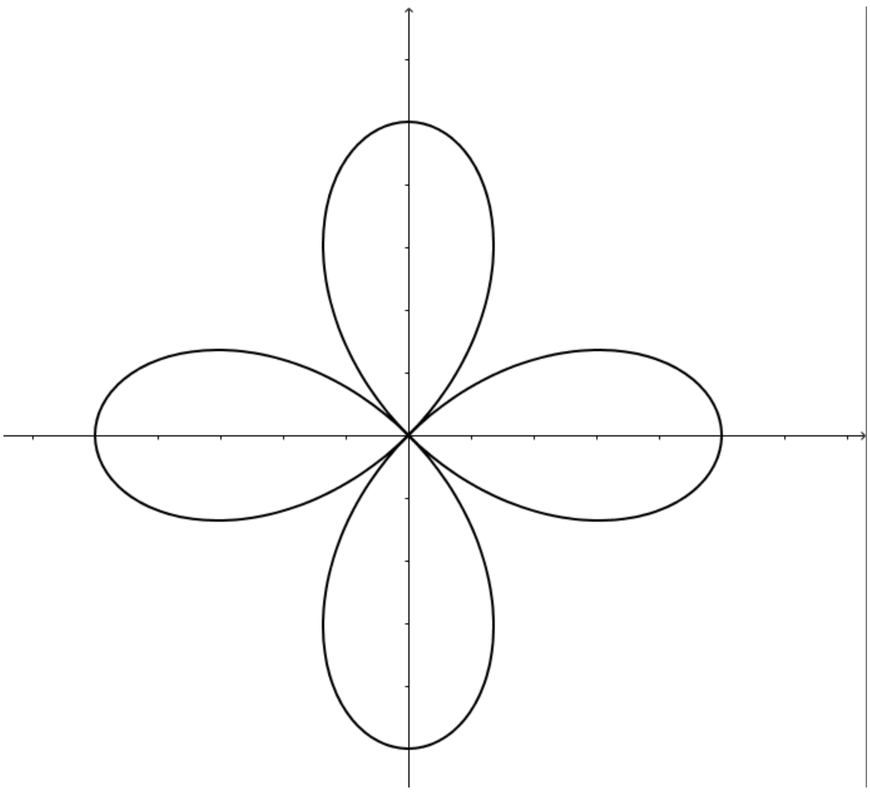


2. Etudier et représenter la courbe pôlaire définie par l'équation $f(\theta) = \cos(2\theta)$.
   On a $D_f = \mathbb{R}$ et $f(\theta+\pi) = f(\theta)$, donc f est périodique de période π, par suite la courbe admet une symétrie par rapport à l'origine, ainsi l'étude est réduit à un intervalle de longueur π, par exemple $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   On a $f(-\theta) = f(\theta)$, donc la courbe possède une symétrie par rapport à l'axe (Ox), donc on

restreint l'étude à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
On a $f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -f(\theta)$, donc la courbe admet une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)x = -x$, donc l'étude est réduit à $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
On a $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ et f garde un signe constant, donc $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est un point de rebroussement de première espèce et la tangente en ce point a pour vecteur directeur $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{u}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\vec{u}\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
On a $f'(\theta) = -2\sin(2\theta)$, par suite, on obtient le tableau de variation suivant :

θ	0		$\frac{\pi}{4}$
$f'(\theta)$	0	$-$	-2
$f(\theta)$	1	$\searrow$	0

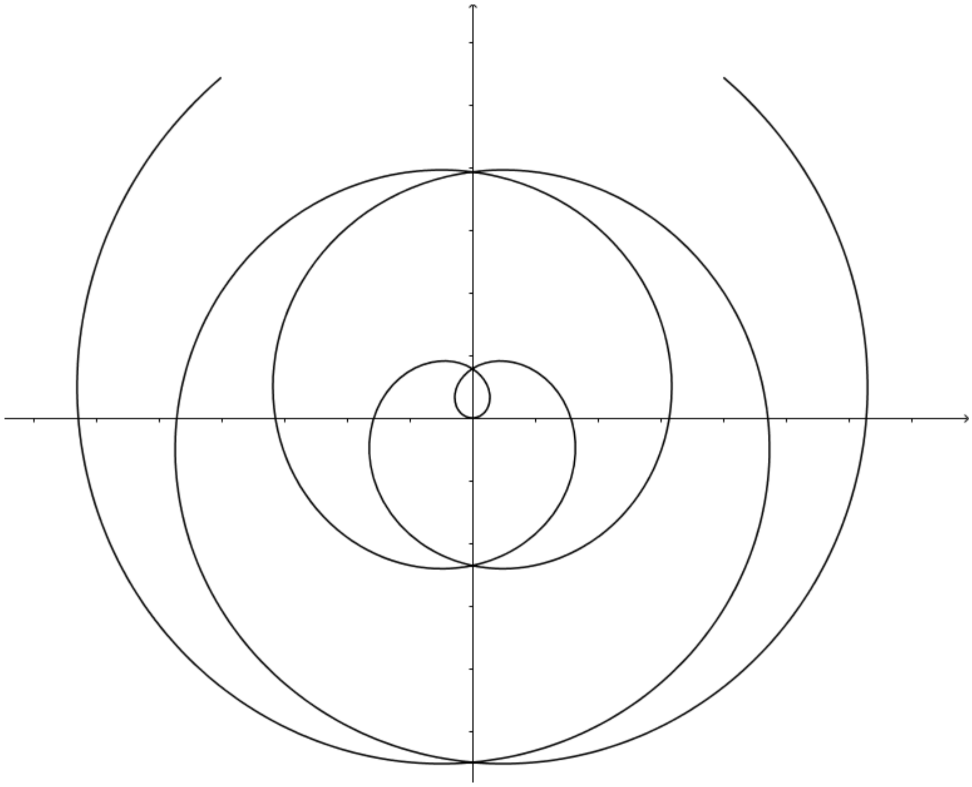
L'allure de la courbe est définie par le dessin suivant :



3. Etudier et représenter la courbe pôlaire définie par l'équation $f(\theta) = \theta$.
On a $D_f = \mathbb{R}$ et $f(-\theta) = -f(\theta)$, donc la courbe admet une symétrie par rapport à l'axe (Oy), par suite, l'étude de la courbe est réduit à $[0, +\infty[$.
On a $\lim\limits_{\theta \to +\infty} f(\theta) = +\infty$, donc la courbe possède une branche spirale qui s'enroule.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $M\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = \left(0, (-1)^k(\frac{\pi}{2} + k\pi)\right)$ et $M(k\pi) = ((-1)^k k\pi, 0)$, donc la courbe coupe l'axe (Ox) et l'axe (Oy) en une infinité de points.
Le tableau de variation est simple, il est défini par :

θ	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(\theta)$	$+$
$f(\theta)$	$0 \nearrow +\infty$

La courbe est définie par le dessin suivant :



4. Etudier et représenter la courbe pôlaire définie par l'équation $f(\theta) = 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
On a $D_f = \mathbb{R}$ et $f(\theta + 4\pi) = f(\theta)$, donc la totalité de la courbe est obtenue en réduisant l'étude à un intervalle de longueur 4π, par exemple $[-2\pi, 2\pi]$.
On a $f(2\pi - \theta) = f(\theta)$ et $f(-2\pi - \theta) = f(\theta)$, donc la courbe admet une symétrie par rapport à l'axe (Ox), par suite, l'étude de la courbe est restreinte à $[-\pi, \pi]$.
Pour $\theta \in [-\pi, \pi]$, on a $f(\theta) = 0 \iff \theta = \pi$. Comme $f(\theta)$ garde un signe constant, alors $M(\pi) = (0,0)$ est un point de rebroussement de première espèce de plus la tangente au point $M(\pi)$ est horizontale.
On a $f'(\theta) = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, donc $f'(\theta) = 0 \iff (\theta = -\pi \text{ ou } \theta = \pi)$.
On a $f(-\pi) = 2$ et $f'(-\pi) = 0$, donc la tangente au point $M(-\pi) = (-2,0)$ est verticale.
La courbe coupe l'axe (Ox) au points $M(-\pi)$, $M(0) = (1,0)$ et $M(\pi)$.
On a $f(0) = 1$ et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$, donc la tangente au point $M(0)$ a pour vecteur directeur $\vec{w} = -\dfrac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$

La courbe coupe l'axe (Oy) au points $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\left(0,-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $M\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(0,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
On obtient le tableau de variation suivant :

θ	$-\pi$ $\qquad$ π
$f'(\theta)$	$-$
$f(\theta)$	$2 \searrow 0$

L'allure de la courbe est déterminée par le dessin suivant :