

Université Mohammed V - Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique
Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014
Rabat, Maroc

Filière DEUG :

Sciences Mathématiques et Informatique (SMI)
et
Sciences Mathématiques (SM)

Module Mathématiques I

NOTES de cours d'Analyse I

Chapitre IV :

Fonctions réelles à une variable réelle.
Formule de Taylor, Développements Limités
et Calcul de Limite

Par

Saïd EL HAJJI

Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation

Email : elhajji@fsr.ac.ma

et

Samir HAKAM

Email : s-hakam@fsr.ac.ma

Année 2003-2004

Chapitre IV :

Fonctions réelles à une variable réelle. Formule de Taylor, Développements Limités et Calcul de Limite¹

Objectif du chapitre :

Connaitre et utiliser la formule de Taylor et ses variantes

Connaitre et utiliser les développements limités

Savoir calculer la limite de fonction, construite à partir des fonctions usuelles, par des développements limités.

Plan du chapitre :

- 1) Introduction au calcul de limites
- 2) Formule de Taylor et Variantes
- 3) Développements Limités
- 5) Applications au calcul des limites

1) Introduction au calcul de limites :

Définition : Dans le calcul des limites, on appelle Forme Indéterminée (on note F.I.), toute situation qui conduit à un cas où les théorèmes portant sur les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure. Les formes indéterminées les plus courantes sont :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty^0, -\infty + \infty, 1^\infty, 0^0, 0^\infty, \text{ etc ...}$$

Le résultat dépend des fonctions.

Par exemple si $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$,

on dit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sin(x)}{x}$ est une forme indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$. Car

cette limite ne peut être déterminée directement d'où le nom FI. Elle l'est par définition de la dérivée ($\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = (\sin x)'_{x=0} = \cos(0) = 1$) et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

¹S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

Exemples de Formes indéterminés ²:

1) F.I. $0 \times \infty$: $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Quand $x \rightarrow 0$, le calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ fait intervenir le produit $0 \times \infty$ qui ne peut être déterminé puisque cela dépend des fonctions f et g . D'où le nom de forme indéterminée de la forme $0 \times \infty$. Cependant

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

(par définition de la dérivée de la fonction $\sin(x)$ en 0).

2) F.I. $\frac{\infty}{\infty}$: $f(x) = \log(x)$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ fait apparaître une forme indéterminée de la forme $\frac{+\infty}{+\infty}$. Mais, d'après la règle de l'Hospital,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log(x))'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

3) F.I. $\infty - \infty$:

a) $f(x) = \log(x)$ et $g(x) = -x$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x))$ fait apparaître une forme indéterminée de la forme $+\infty - \infty$. Cependant

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\log(x)}{x} - 1 \right) = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0.$$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$ fait apparaître une forme indéterminée de la forme $+\infty - \infty$. Mais

$$f(x) - g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

(on dit que l'on a multiplié par l'expression conjuguée)

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right) = 0.$$

4) F.I. 1^∞ : $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ et $g(x) = x$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{g(x)}$, fait apparaître une forme indéterminée de la forme 1^∞ .

Pour calculer cette limite, on va passer au *log*.

²S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

Si on pose $y = f(x)^{g(x)} = (1 + \frac{1}{x})^x$, alors pour tout $x > 0, y > 0$.

Ainsi $\log(y) = \log(1 + \frac{1}{x})^x = x \log(1 + \frac{1}{x})$.

Tout revient à étudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \log(x + \frac{1}{x}))$.

On pose $u = \frac{1}{x}$, il faut donc déterminer $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\log(1+u)}{u}$.

On a $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\log(1+u)}{u} = 1$ car c'est la dérivée de la fonction $\log(1 + u)$ en 0.

Donc la limite cherchée vaut e .

Ces différents exemples donnent un aperçu des méthodes dont on dispose actuellement pour résoudre (on dit lever ou contourner) ces formes indéterminées. Ces méthodes sont du genre "astuces" ou utilisent la définition de la dérivée ou la règle de l'Hospital.

Définition : Déterminer la limite quand on a une forme indéterminée s'appelle "lever l'indétermination".

Dans ces formes indéterminées, il est remarquable de constater qu'il n'y a problème que quand les fonctions concernées tendent vers 0 ou ∞ ou se ramènent à ces cas.

Définition ³:

Une fonction qui tend vers 0 est appelée "un infiniment petit".

Une fonction qui tend vers ∞ est appelée "un infiniment grand".

La règle de l'Hospital permet de résoudre un très grand nombre de Formes Indéterminées (toutes celles de la forme $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ et toutes celles qui s'y ramènent). Mais elle a quelques inconvénients :

1 - Avant de l'appliquer, il faut savoir si l'on est dans des cas d'application de cette règle ou de ses généralisations.

2 - Il faut calculer des dérivées de fonctions

3 - Son utilisation demande parfois des astuces dans la façon d'écrire le quotient et il peut être nécessaire de transformer ce quotient avant de lui appliquer cette règle.

4 - Elle ne marche toujours pas .

L'étude de $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(\frac{1}{x})$ ne se fait pas par la règle de l'Hospital.

Cependant, $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, -x^2 \leq x^2 \sin(\frac{1}{x}) \leq x^2$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = 0$.

³S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

Il est donc nécessaire d'avoir une méthode plus systématique. Nous allons fournir les moyens d'étudier la limite de très nombreuses fonctions par une méthode générale basée sur le calcul des développements limités.

2) Formule de Taylor et Variantes ⁴:

2.1 : Formules de Taylor et Mac-Laurin.

Définition : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

i) On dit que f est continûment dérivable sur I si elle est dérivable et sa dérivée f' est continue sur I .

ii) On dit que f est n fois continûment dérivable sur I si elle est dérivable n fois et que ses dérivées $f', f'', \dots, f^{(n-1)}, f^{(n)}$ sont continues sur I , ($n \in \mathbb{N}$). On dira que la fonction f est de classe C^n .

Si f est un polynôme de degré n c'est à dire

$$f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

On a : $f(0) = a_0$.

Or $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1 \Rightarrow f'(0) = a_1$.

De même

$$f''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \dots + 2 a_2 \Rightarrow f''(0) = 2 a_2.$$

De façon générale, et après k itérations, (par récurrence) on voit que

$$f^{(k)}(0) = k! a_k$$

Ainsi les coefficients des polynômes s'expriment en fonction des dérivées successives pour $x = 0$ et l'on a :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Peut-on généraliser cette propriété à une fonction f "quelconque" ?

D'après le théorème des Accroissements Finis, on sait que si f est une fonction continue dans $[0, x]$ et est dérivable dans $]0, x[$, il existe $c \in]0, x[: f(x) = f(0) + c f'(c)$.

Plus généralement, on a :

⁴S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

Théorème de Taylor :

Soit f une fonction définie sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ telle que

i) f est n fois continûment dérivable sur le segment $[a, b]$.

ii) $f^{(n+1)}$ existe et est définie sur l'ouvert $]a, b[$.

Alors il existe au moins un $c \in]a, b[$ telle que

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

*Remarques*⁵:

1) Si $n = 0$, on retrouve la formule des Accroissement finies : $f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$.

2) Cette égalité est appelée *Formule de Taylor - Lagrange* ou *Formule de Taylor* (on note *F.T.*) à l'ordre $(n+1)$ dans $[a, b]$.

La formule de Taylor est valable sur l'intervalle $[a, b]$

3) $R_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ est appelé *reste de Lagrange*.

Si f est un polynôme de degré n , le reste R_n est nul.

Preuve :

On considère la fonction polynômiale suivante:

$$P_n(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

on a degré de $P_n = n$.

On remarque que $P_n(a) = f(a)$

$$P'_n(x) = f'(a) + (x-a)f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{(k-1)}}{(k-1)!} f^{(k)}(a) + \dots + \frac{(x-a)^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n)}(a)$$

$$P'_n(a) = f'(a)$$

$$P''_n(a) = f''(a), \dots, P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \dots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

P_n peut s'écrire sous la forme

$$P_n(x) = P_n(a) + (x-a)P'_n(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} P''_n(a) + \dots + \frac{(x-a)^k}{k!} P_n^{(k)}(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} P_n^{(n)}(a)$$

On considère la fonction φ_n définie par

$$\varphi_n(x) = f(x) - P_n(x) - \alpha_n \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \implies \varphi_n(a) = 0$$

⁵S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

où α_n est une constante réelle choisie de telle sorte que

$$\varphi_n(b) = f(b) - P_n(b) - \alpha_n \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

φ_n est définie continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, on a

$$\varphi_n(a) = \varphi_n(b) = 0$$

Théorème de Rolle: il existe au moins une valeur $c_n \in]a, b[$ telle que

$$\begin{aligned} \varphi'_n(c_n) &= 0 \\ \varphi'_n(x) &= f'(x) - P'_n(x) - \alpha_n \frac{(x-a)^n}{n!} \end{aligned}$$

Appliquant encore une fois de plus le Théorème de Rolle sur la fonction φ'_n qui est définie continue sur le segment $[a, c_n]$ et dérivable sur $]a, c_n[$, on a

$$\varphi'_n(a) = \varphi'_n(c_n) = 0$$

donc il existe au moins une valeur $c_{n-1} \in]a, c_n[$ telle que

$$\begin{aligned} \varphi''_n(c_{n-1}) &= 0 \\ \varphi''_n(x) &= f''(x) - P''_n(x) - \alpha_n \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

⋮

il existe au moins une valeur $c_1 \in]a, c_2[$ telle que

$$\begin{aligned} \varphi^n_n(c_1) &= 0 \\ \varphi^{(n)}_n(x) &= f^{(n)}(x) - P^{(n)}_n(x) - \alpha_n(x-a) \end{aligned}$$

Appliquant le Théorème de Rolle sur la fonction $\varphi^{(n)}_n$ qui est définie continue sur le segment $[a, c_1]$ et dérivable sur $]a, c_1[$, on a

$$\varphi^{(n)}_n(a) = \varphi^{(n)}_n(c_1) = 0$$

donc il existe au moins une valeur $c \in]a, c_1[$ ($c \in]a, c_1[\subset]a, b[\implies c \in]a, b[$)
telle que

$$\begin{aligned}\varphi_n^{(n+1)}(c) &= 0 \\ \varphi_n^{(n+1)}(x) &= f^{(n+1)}(x) - P_n^{(n+1)}(x) - \alpha_n\end{aligned}$$

degré de $P_n = n \implies P_n^{(n+1)}(x) = 0 \implies \varphi_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \alpha_n$ donc

$$\varphi_n^{(n+1)}(c) = 0 \implies f^{(n+1)}(c) = \alpha_n$$

d'où

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= f(x) - P_n(x) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \\ \implies \varphi_n(b) &= f(b) - P_n(b) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) = 0\end{aligned}$$

car α_n a été choisie de telle sorte que $\varphi_n(b) = 0$

$$f(b) = P_n(b) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad :: c \in]a, b[$$

d'où la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $(n+1)$

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Autre écriture de la formule de Taylor à l'ordre $(n+1)$ ⁶:

En posant $b - a = h \implies b = a + h$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad c \in]a, a+h[$$

Autre forme de la formule de Taylor à l'ordre $(n+1)$:

$$\begin{aligned}c \in]a, a+h[\implies 0 < c - a < h, \quad 0 < \frac{c-a}{h} < 1 \implies \exists \theta \in]0, 1[, \quad \theta = \\ \frac{c-a}{h} \implies c = a + \theta h\end{aligned}$$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h), \quad \theta \in]0, 1[$$

⁶S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

Formule de Mac-Laurin :

C'est le cas particulier où $a = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c), c \in]0, x[$$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \theta \in]0, 1[$$

2.2 - Exemples:

Formules de Taylor (et de Mac-Laurin) de quelques fonctions usuelles. Toutes ces formules sont valables pour x au voisinage de 0. Pour les obtenir au voisinage de a , il suffit de poser $x = x - a$.

1) $f(x) = e^x$. Comme $f^{(n)}(x) = e^x$ et $f^{(n)}(0) = 1$, on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + Ax^{n+1} \text{ avec } A = \frac{e^c}{(n+1)!} \text{ et } 0 < c < x$$

2) $f(x) = \sin(x)$. On a

$$f'(x) = \cos(x), f''(x) = -\sin(x), \\ f^{(2p)}(x) = (-1)^p \sin(x), f^{(2p+1)}(x) = (-1)^p \cos(x)$$

donc $f^{(2p)}(0) = 0$ et $f^{(2p+1)}(0) = 1$. Ainsi

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1} + Ax^{2p+2}.$$

3) De même $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} + Ax^{2p+1}$.

4) $f(x) = \frac{1}{1-x}$. On a :

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \dots, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \text{ donc } f^{(n)}(0) = n!.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + Ax^{n+1} \text{ avec } A = \frac{1}{(1-c)^{n+2}}.$$

5) Si $|x| < 1$, $f(x) = \log(1 - x)$ est bien définie et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{1-x}, \dots, f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \text{ donc } f^{(n)}(0) = (n-1)!$$

Ainsi pour $|x| < 1$,

$$\log(1 - x) = x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + Ax^{n+1} \text{ avec } A = \frac{1}{n(1-c)^{n+1}}.$$

6) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = (1 + x)^\alpha$ (on suppose que α n'est pas un entier positif sinon f est polynôme).

On a :

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \dots, \text{(et par récurrence) } f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}.$$

$$\text{donc } f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))$$

et $\exists c \in]0, x[$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + Ax^{n+1} \text{ avec } A = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+c)^{\alpha-n-1}$$

$$\text{a) } \alpha = 1 : \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + Ax^{n+1}.$$

$$\text{b) } \alpha = \frac{1}{2} : \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{2^{2n-1} (n!)^2} \frac{x^n}{2^{2n}} + Ax^{n+1}.$$

2.3 - Application de la Formule de Taylor au Calcul numérique ⁷:

Si f est une fonction de classe C^{n+1} au voisinage de a :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h), \theta \in]0, 1[$$

On suppose connue les valeurs $f(a), f'(a), \dots, f^{(n)}(a)$.

On prend pour valeur approchée de $f(a+h)$ la valeur

$$f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

Si on pose,

$$g(a) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

⁷S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

L'erreur commise est

$$f(a+h) - g(a) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

Comme θ est inconnu, on ne peut pas donner une valeur précise de $f^{(n+1)}(a+\theta h)$.

L'erreur commise est donnée donc par $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$

$$a < a + \theta h < a + h$$

Donc, si M est un majorant de $f^{(n+1)}(a+\theta h)$ sur $]a, a+h[$ on a

$$|f^{(n+1)}(a+\theta h)| < M$$

$$\left| \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h) \right| < \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

Donc $f(a+h)$ est égale à $g(a)$ avec une erreur absolue inférieure $\frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} M$

Exemple ⁸:

Calculer $\sin(31^\circ)$ à 10^{-6} près

$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\sin(a+h) = \sin(a) + h \cos(a) - \frac{h^2}{2} \sin(a) + \frac{h^3}{3!} \cos(a+\theta h)$$

$$h = 1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0.0174$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$$

$$\sin(31^\circ) = 0.5 + 0.0174 \times 0.8660 - \frac{0.0174^2}{2} \times 0.5 - \frac{0.0174^3}{3!} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta \frac{\pi}{180}\right)$$

$$\left| \frac{0.0174^3}{3!} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta \frac{\pi}{180}\right) \right| < 10^{-6}$$

donc à 10^{-6} , $\sin(31^\circ) \simeq 0.513550$.

La valeur fournie par le logiciel MATLAB est $\sin(31^\circ) \simeq 0.51503807491005$.

⁸S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

Exercice : Calculer une approximation de $\text{Arctg}(1.001)$ à 10^{-2} près.

3) Développements limités.⁹:

Nous avons vu en 1) quelques remarques sur le calcul des limites et quelques inconvénients de la règle de l'Hospital.

Dans cette section, nous allons développer une méthode générale pour déterminer les limites. Cette méthode est systématique et sera basée sur le calcul des développements limites.

3.1 - Infiniment petit - Infiniment grand : Définitions et Notations

Soient f et g deux fonctions numériques définies au voisinage de x_0 c'est à dire définies sur $I =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ (sauf peut être en x_0)

Définition : Infiniment petit

i) On dit que $f(x)$ est un infiniment petit (on note I.P) lorsque $x \rightarrow x_0$ au voisinage de x_0 si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

$x - x_0$ est un infiniment petit principal (I.P.P) de f quand $x \rightarrow x_0$

ii) On dit que $f(x)$ est un infiniment petit lorsque $x \rightarrow \infty$ si:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$\frac{1}{x}$ est un infiniment petit principal de f quand $x \rightarrow \infty$.

Exemple :

$\sin(x)$ est I.P lorsque $x \rightarrow 0$

$\frac{1}{x^2}$ est I.P lorsque $x \rightarrow \infty$

$\cos(x)$ est I.P lorsque $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$

Définition : Infiniment grand

i) On dit que $f(x)$ est un infiniment grand (I.G) lorsque $x \rightarrow x_0$ au voisinage de x_0 si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

⁹S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

$\frac{1}{x-x_0}$ est un infiniment grand principal (I.G.P) de f quand $x \rightarrow x_0$.

ii) On dit que $f(x)$ est un infiniment grand lorsque $x \rightarrow \infty$ si:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Exemple:

$$\text{tg}(x) \begin{cases} \text{est I.p lorsque } x \rightarrow 0 \\ \text{est I.G lorsque } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Soient f et g deux fonctions numériques définies au voisinage de x_0 c'est à dire définies sur $I =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ (sauf peut être en x_0)

Définition : Négligeabilité

On dit que $f(x)$ est négligeable devant g au voisinage de x_0 et on note

$$f = o(g) \text{ (on dit que } f \text{ est gale petit o de } g \text{)}$$

s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telque:

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ et que } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

On dit que $f(x)$ est négligeable devant g au voisinage de l'infini s'il existe une fonction ε définie au voisinage de l'infini tel que:

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ et que } \lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0$$

Remarque :

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 on a

$$f = o(g) \text{ au voisinage de } x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Exemple:

$$x^\alpha = o(x^\beta) \begin{cases} \text{au voisinage de } 0 \text{ si } \alpha > \beta \\ \text{au voisinage de l'infini si } \alpha < \beta \end{cases}$$

$$x^4 = o(x^2) \text{ au voisinage de } 0$$

$$x^2 = o(x^4) \text{ au voisinage de l'infini}$$

$$\frac{x^\alpha}{x^\beta} = \frac{1}{x^{\alpha-\beta}} \begin{cases} \longrightarrow_{x \rightarrow 0} 0 \text{ si } \alpha > \beta \\ \longrightarrow_{x \rightarrow \infty} 0 \text{ si } \alpha < \beta \end{cases}$$

3.1 - Développement limité (on note D.L) ¹⁰:

3.1 - Définitions, Notations:

Définition : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I contenant x_0 (sauf peut être en x_0)

On dit que f admet un D.L n au voisinage de x_0 s'il existe un polynôme $P_n(x)$ de $d^\circ \leq n$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

tel que

$$f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n)$$

c'est à dire

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$ quand $x \rightarrow x_0$

$P_n(x)$ est appelé partie entière ou régulière du D.L de f .
 $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ est appelé reste du D.L de f .

Remarque :

Pour une simplification, nous utiliserons les D.L en 0, pour obtenir un D.L en x_0 , il suffit de poser $x = (x - x_0)$.

Remarques fondamentales :

1) *Le développement limité est une notion locale c'ad si vous calculez un DL de f à l'ordre n au voisinage de x_0 alors cette formule (égalité) est vraie pour tout $x \in V(x_0)$ uniquement.*

2) *Pour une simplification, nous utiliserons et calculerons les D.L en 0 .*

3) *Pour obtenir un D.L en $x_0 \in \mathbb{R}$, il suffit de poser $x = (x - x_0)$.*

4) *Pour obtenir un D.L en ∞ , il suffit de poser $x = \frac{1}{x}$.*

Théorème 1 : Unicité d'un développement limité

Si f admet un D.L d'ordre n en 0 alors il est unique.

Remarque : L'unicité est à prendre dans les sens que la partie entière du DL à l'ordre n au voisinage de 0 est unique.

¹⁰S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

Preuve :

On suppose l'inverse .

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n) , \quad o(x^n) = x^n\varepsilon_1(x) \\ f(x) &= b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n) , \quad o(x^n) = x^n\varepsilon_2(x) \end{aligned}$$

soit $p \leq n$ le plus petit entier telque $a_p \neq b_p$

$$0 = f - f = (a_p - b_p)x^p + (a_{p+1} - b_{p+1})x^{p+1} + \dots + (a_n - b_n)x^n + x^n(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x))$$

en divisant par x^p on a

$$0 = (a_p - b_p) + (a_{p+1} - b_{p+1})x + \dots + (a_n - b_n)x^{n-p} + x^{n-p}(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x))$$

lorsque $x \rightarrow 0$ on a

$$a_p - b_p = 0 \iff a_p = b_p \text{ contradiction avec } a_p \neq b_p$$

d'où

$$a_i = b_i \text{ pour } i = 1 \dots n$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x) \\ f(x) &= P_n(x) + x^n\varepsilon_2(x) \end{aligned} \right\} \implies 0 = f(x) - f(x) = x^n(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) \implies \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

Propriété (cf section suivante pour détails):

Si f est de classe C^n au voisinage de x_0 , alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 de la forme :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 0.$$

Théorème 2 : Développement limités des fonctions paires et impaires¹¹

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de 0 et qui admet le D.L

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}_{P_n(x)} + x^n\varepsilon(x) , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 \\ &= P_n(x) + x^n\varepsilon(x) \end{aligned}$$

¹¹S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

i) si f est paire alors $P_n(x)$ est paire i.e.

$$a_1 = a_3 = \dots = a_{2k+1} = \dots = 0$$

ii) si f est impaire alors $P_n(x)$ est impaire i.e.

$$a_0 = a_2 = \dots = a_{2k} = \dots = 0$$

Preuve :

i) Si f paire $\implies f(x) = f(-x)$ donc l'unicité du D.L $\implies P_n(x) = P_n(-x)$

$$P_n(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \dots + (-1)^{n-1}a_{n-1}x^{n-1} + (-1)^n a_n x^n$$

$$\left. \begin{aligned} P_n(x) - P_n(-x) &= 2a_1x + 2a_3x^3 + \dots + 2a_{2k+1}x^{2k+1} + \dots \\ &= 0 \end{aligned} \right\} \implies a_1 = a_3 = \dots = a_{2k+1} = \dots = 0$$

ii) si f est impaire alors

$$a_0 = a_2 = \dots = a_{2k} = \dots = 0$$

en effet f impaire $\implies f(x) = -f(-x)$ donc l'unicité du D.L $\implies P_n(x) = -P_n(-x)$

$$P_n(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \dots + (-1)^{n-1}a_{n-1}x^{n-1} + (-1)^n a_n x^n$$

$$\left. \begin{aligned} P_n(x) + P_n(-x) &= 2a_0 + 2a_2x^2 + \dots + 2a_{2k}x^{2k} + \dots \\ &= 0 \end{aligned} \right\} \implies a_0 = a_2 = \dots = a_{2k} = \dots = 0$$

3.2 - Opérations sur les développements limités¹²

i) Somme

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + o(x^n) \\ f(x) &= Q_n(x) + o(x^n) \end{aligned} \right\} \implies f(x) + g(x) = P_n(x) + Q_n(x) + o(x^n)$$

Remarque : Si f et g admettent un développement limité à l'ordre n et m respectivement, au voisinage de x_0 , fini ou non, alors $f + g$ admet un développement limité à l'ordre $\text{Min}(m, n)$, obtenu en ajoutant les deux développements limités de f et g

¹²S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

Preuve :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}_{P_n(x)} + x^n \varepsilon_1(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$g(x) = \underbrace{b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n}_{Q_n(x)} + x^n \varepsilon_2(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + x^n(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))$$

$$f(x) + g(x) = q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$q_i = a_i + b_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)) = 0$$

$$\implies f(x) + g(x) = (P_n(x) + Q_n(x)) + o(x^n)$$

Exemple:

$$f(x) = 2 + x + \frac{x^4}{10} + o(x^4)$$

$$g(x) = -2 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + o(x^4)$$

$$f(x) + g(x) = x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{10} + o(x^n)$$

ii) Produit

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = P_n(x) + o(x^n) \\ f(x) = Q_n(x) + o(x^n) \end{array} \right\} \implies f(x) \times g(x) = (P_n(x) \times Q_n(x)) + o(x^n)$$

*Remarques*¹³:

1) Dans le calcul , on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à n .

2) Si f et g admette un développement limité à l'ordre n et m respectivement, au voisinage de x_0 , fini ou non, alors $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre $\text{Min}(m, n)$, obtenu en multipliant les deux développements limités de f et g . Dans le calcul , on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à $\text{Min}(m, n)$.

Preuve :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}_{P_n(x)} + x^n \varepsilon_1(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$g(x) = \underbrace{b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n}_{Q_n(x)} + x^n \varepsilon_2(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

¹³S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

$$\begin{aligned}
f(x) \times g(x) &= (P_n(x) + o(x^n))(Q_n(x) + o(x^n)) \\
&= (P_n(x) + x^n \varepsilon_1(x))(Q_n(x) + x^n \varepsilon_2(x)) \\
&= P_n(x) \times Q_n(x) + P_n(x) \times x^n \varepsilon_2(x) + Q_n(x) \times x^n \varepsilon_1(x) + x^{2n} \varepsilon_1(x) \varepsilon_2(x) \\
&= P_n(x) \times Q_n(x) + x^n (P_n(x) \times \varepsilon_2(x) + Q_n(x) \times \varepsilon_1(x) + x^n \varepsilon_1(x) \varepsilon_2(x)) \\
&= P_n(x) \times Q_n(x) + x^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0
\end{aligned}$$

Exemple:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2 + x + \frac{x^4}{10} \circ (x^4) \\
g(x) &= -2 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + o(x^4) \\
f(x)g(x) &= -4 - 2x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{9}x^3 - \frac{7}{18}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

iii) Quotient

$$\begin{aligned}
f(x) &= P_n(x) + x^n \varepsilon_1(x) \\
g(x) &= Q_n(x) + x^n \varepsilon_2(x) \quad \text{on suppose } g(0) \neq 0
\end{aligned}$$

càd si f et g admette un développement limité à l'ordre n , au voisinage de x_0 , fini ou non, et si le coefficient constant de g est non nul, alors $\frac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n . au voisinage de x_0 .

Pour déterminer la partie principale de $\frac{f}{g}$, on fait la division de P par Q suivant les puissances croissantes de x à l'ordre n .

*Remarques*¹⁴:

i) Si g admet un D.L d'ordre n en 0 et que $g(0) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ admet un D.L d'ordre n en 0.

ii) Pour calculer le DL d'ordre n de $\frac{f}{g}$, Il suffit de montrer que $\frac{1}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n puis de faire le produit par celui de f et ne conservant que les termes de degré $\leq n$.

ii) Dans le cas où $g(0) = 0$, on peut opérer d'une manière analogue, mais on obtient un développement dit développement limité généralisé.

¹⁴S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

Exemple :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \underbrace{1 + x + x^3}_{P_3(x)} + x^3 \varepsilon(x) \\
 g(x) &= 2x + 3x^3 + x^3 \varepsilon(x) \text{ en met } 2x \text{ en facteur} \\
 &= 2x \underbrace{\left(1 + \frac{3}{2}x^2\right)}_{Q_2(x)} + x^3 \varepsilon(x) \\
 \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{1}{2x} \times \frac{P_3(x)}{Q_2(x)} \\
 &= \frac{1}{2x} + \dots + x^3 \varepsilon(x)
 \end{aligned}$$

On obtient un développement dit développement limité généralisé ¹⁵.

Preuve : On fait la division de P par Q suivant les puissances croissantes de x à l'ordre n

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= Q_n(x)S(x) + x^{n+1}R(x) \text{ degr de } S \leq n \\
 (f(x) - x^n \varepsilon_1(x)) &= (g(x) - x^n \varepsilon_2(x))S(x) + x^{n+1}R(x) \\
 f(x) &= g(x) \times S(x) + x^n \underbrace{(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)S(x) + xR(x))}_{=\varepsilon_3(x) \rightarrow 0} \\
 \implies f(x) &= g(x) \times S(x) + x^n \varepsilon_3(x) \\
 \implies \frac{f(x)}{g(x)} &= S(x) + x^n \frac{\varepsilon_3(x)}{g(x)} \\
 \frac{f(x)}{g(x)} &= S(x) + x^n \varepsilon(x) \quad \varepsilon(x) \longrightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

Exemple:

1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -2 + 3x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + o(x^4) \\
 g(x) &= 2 + x + \frac{x^4}{10} + o(x^4) \\
 \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{25}{9} + \frac{1}{9}x + \frac{1}{9}x^2 + o(x^4)
 \end{aligned}$$

¹⁵S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

Si f admet un D.L en 0 et que $f(0) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ admet un D.L en 0.

2) D.L de $\cos(x)$ à l'ordre 4 en 0 est

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

D.L de $\frac{1}{\cos(x)}$ à l'ordre 4 en 0: on a $\cos(0) = 1 \neq 0$

$$\frac{1}{\cos(x)} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + o(x^4)$$

$\frac{1}{\cos(x)}$ est paire $\implies a_1 = a_3 = a_{2k+1} = 0$

$$\cos(x) \times \frac{1}{\cos(x)} = 1 \iff \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) \times (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + o(x^4)) = 1$$

$$\implies a_0 + \left(-\frac{a_0}{2} + a_2\right)x^2 + \left(\frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{2} + a_4\right) + o(x^4) = 1$$

$$\implies \left. \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ -\frac{a_0}{2} + a_2 = 0 \\ \frac{a_0}{24} - \frac{a_2}{2} + a_4 = 0 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_2 = \frac{1}{2} \\ a_4 = -\frac{1}{24} + \frac{1}{4} = \frac{5}{24} \end{array}$$

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$$

Une autre manière de développer $\frac{1}{f}$ lorsque $f(0) \neq 0$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)} \\
&= [1 + (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x))]^{-1} \\
&= 1 + (-1) \times (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)) + \frac{(-1) \times (-2)}{2!} (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x))^2 \\
&\quad + \underbrace{\frac{(-1) \times (-2) \times (-3)}{3!} (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x))^3}_{x^4\tilde{\varepsilon}(x)} \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - x^4\varepsilon(x) + \frac{x^4}{4} + x^4\tilde{\varepsilon}(x) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} - (\frac{1}{24} - \frac{1}{4})x^4 + x^4\varepsilon_1(x) \\
\frac{1}{\cos(x)} &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^4\varepsilon_1(x)
\end{aligned}$$

iv) Composition ¹⁶:

Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 , fini ou non, si le terme constant de f vaut a_0 et si g admet un développement limité à l'ordre n en a_0 , alors $g \circ f$ admet un développement limité à l'ordre n en x_0 , obtenu en développant la composée des développements limités de f et g .

La technique à utiliser est de remplacer tous les termes en x de la partie principale du DL en 0

de f par la partie principale de g et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égale à n .

Exemples :

1) Calculer le DL d'ordre 3 de $f(x) = e^{\sin(x)}$ en 0.

On a : pour $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x) \text{ et } \sin(0) = 0$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

donc

$$e^{\sin(x)} = 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6})^2 + \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{6})^3 + x^3\epsilon(x)$$

et si on en ne garde que les termes de degré inférieur ou égale à 3.

alors

¹⁶S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

$$e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^3\epsilon(x)$$

2) Calculer le DL d'ordre 2 de $h(x) = e^{\cos(x)}$ en 0.

On a: pour $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \text{ et } \cos(0) = 1.$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$$

comme $\cos(0) = 1 \neq 0$, on pose $g(x) = \cos(x) - 1$ donc $g(0) = 0$.

ainsi

$$g(x) = -\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \text{ et } g(0) = 0$$

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$$

donc

$$f \circ g(x) = e^{(\cos(x)-1)} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + x^2\epsilon(x)$$

Comme on ne doit garder que les termes de degré inférieur ou égale à 2.

$$e^{(\cos(x)-1)} = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$$

ainsi

$$h(x) = e^{\cos(x)} = e(1 - x^2) + x^2\epsilon(x)$$

3.2 - Calcul des D.L- Développement de Taylor-Young ¹⁷:

Théorème de Taylor-Young

Si f est $(n-1)$ fois continûment dérivable sur un intervalle I contenant 0 et que $f^{(n)}$ est continue au point 0,

alors f admet un D.L dit de Taylor-Young à l'ordre n de la forme

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(x^n)$$

où encore

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Preuve : Théorème de Mac Laurin

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x) \text{ avec } 0 < \theta < 1$$

lorsque $x \rightarrow 0$, $\theta x \rightarrow 0$

$f^{(n)}$ est continue au point 0 $\implies f^{(n)}(\theta x) \rightarrow f^{(n)}(0)$ lorsque $x \rightarrow 0$, on peut écrire donc

$$f^{(n)}(\theta x) = f^{(n)}(0) + \varepsilon_1(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

¹⁷S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

d'où

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!}\varepsilon_1(x)$$
$$\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon_1(x)}{n!} \longrightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 0$$

Remarque:

La condition que $f^{(n)}(0)$ existe suffit pour avoir le D.L de Taylor-Young. Cette condition du théorème est seulement suffisante et non nécessaire.

Exemple ¹⁸:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} f(x) = x^2 \times x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \text{ (car } |\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq 1 \text{)} \\ f(x) = x^2 \varepsilon(x) & \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

donc admet pour D.L au voisinage de 0 à l'ordre 2

$$f(x) = 0 + o(x^2)$$

alors que f'' n'existe pas en 0.

$$\begin{cases} f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ f''(x) = \left(6x - \frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 4 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

En fait si s admet les condition du théorème de Mac Laurin

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon_1(x) \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

alors

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 1, \dots, n$$

Développement limité des fonctions usuelles ¹⁹

¹⁹S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

(à retenir par coeur ou à retrouver rapidement)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \text{ Mac Laurin}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{2p+1} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\operatorname{tg}(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^9)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$(\operatorname{Arc} \sin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \frac{63}{256}x^{10} + o(x^{10})$$

$$\operatorname{Arc} \sin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + o(x^9)$$

Propriété ²⁰:

Si f admet les propriétés du théorème précédent, f' satisfait aux mêmes conditions et en remplaçant n par $n-1$ on a

$$f'(x) = f'(0) + x f''(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(3)}(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(0) + x^{n-1} \varepsilon(x)$$

et on constate que le polynôme principal de f' est la dérivée du polynôme principal de f .

i.e. si $f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x)$ et si f' existe alors $f'(x) = P'_n(x) + x^{n-1} \varepsilon(x)$.

Exemples :

1) Développement limité de $f(x) = \text{Arctg}(x)$ à l'ordre 5 au voisinage de 0.

$$\begin{aligned}f(x) &= P_5(x) + x^5\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \rightarrow 0 \\f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} \\&= 1 - x^2 + x^4 + x^4\varepsilon_1(x) \\ \implies P'_5(x) &= 1 - x^2 + x^4 \\ \implies P_5(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \\ \implies f(x)(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x)\end{aligned}$$

2) Développement limité de $f(x) = \log(x)$ au voisinage de 0.

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \\&= 1 - x + x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon_1(x) \\ \implies f(x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x)\end{aligned}$$

iii) Développement limité de $f(x) = x \cotg(x)$ à l'ordre 5 au voisinage de 0.

$$\begin{aligned}f(x) &= x \cotg(x) = \frac{x \cos(x)}{\sin(x)} \\&= \frac{x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4!} + o(x^5)}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} \\x \cotg(x) &= 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - x^5\varepsilon(x) \\ \cotg(x) &= \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - x^4\varepsilon(x)\end{aligned}$$

3.3 - Calcul de Limites avec les Développements limités

Remarque fondamentale ²¹

i) Si f admet un développement limité à l'ordre n , au voisinage de 0 càd

²¹S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

$$f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = P_n(0)$.

ii) Tous les DL seront obtenues à partir des DL usuels au $V(0)$ et des théorèmes de base sur les DL.

1) Soit $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$, calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

On a :

$$f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\log(f(x)) = \log((1 + \frac{1}{x})^x) = x \log(1 + \frac{1}{x})$$

au voisinage de $+\infty$ on a

$$\log(1 + \frac{1}{x}) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \varepsilon(\frac{1}{x})$$

$$x \log(1 + \frac{1}{x}) = 1 + \varepsilon(\frac{1}{x})$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log(1 + \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x} \varepsilon(\frac{1}{x})) = 1$$

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \log(\frac{\sin(x)}{x})$

Calculer le D.L à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$\log(\frac{\sin(x)}{x})$$

$$\log(\frac{\sin(x)}{x}) = \log(1 + (\frac{\sin(x)}{x} - 1))$$

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)$$

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + x^2 \varepsilon_2(x)$$

$$\log(\frac{\sin(x)}{x}) = \log(1 + (\frac{\sin(x)}{x} - 1))$$

$$= (-\frac{x^2}{3!}) - \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{3!})^2 + x^2 \varepsilon_3(x)$$

$$= -\frac{x^2}{6} + x^2 \varepsilon(x)$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \log\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 0$

3) Soit $f(x) = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\log(x)}\right)$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

On pose $t = x - 1$ de telle sorte que $t \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

On a $f(x) = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\log(x)}\right) = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\log(1+t)}\right) = \frac{\log(1+t)-t}{t \log(1+t)}$.

Remarque : Lors du calcul des DL, on choisit l'ordre n du DL le plus bas possible et tel que la partie principale du dénominateur n'est pas nul et on calcule tous les DL à cette ordre.

au voisinage de $t = 0$, on a $\log(1+t) = t + t\varepsilon_1(t)$

Donc $t \log(1+t) = t^2 + t^2\varepsilon_2(t)$.

Il faut calculer le DL du numérateur à l'ordre 2.

$\log(1+t) - t = -\frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon_3(t)$.

Ainsi $\frac{\log(1+t)-t}{t \log(1+t)} = \frac{-\frac{t^2}{2}}{t^2} + t^2\varepsilon(t)$ donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)-t}{t \log(1+t)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$.

*Remarque*²²: Dorénavant, on notera par $\varepsilon(x)$ toute expression qui tends vers 0 quand x tend vers 0 ainsi on allégera les écritures.

3) Soit $f(x) = \frac{\sin(x)-tg(x)}{\sin(x)(1-\cos(x))}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Pour que la partie principale du dénominateur ne s'annule pas, le calcul des DL à l'ordre 3 voisinage de 0 devrait suffire.

On a :

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ et

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) \Rightarrow 1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$

donc $\sin(x)(1 - \cos(x)) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(\frac{x^2}{2}\right) + x^3\varepsilon(x) = \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$.

Comme $tg(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$.

on a $\sin(x) - tg(x) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + x^3\varepsilon(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^3\varepsilon(x)$.

Donc $f(x) = \frac{\sin(x)-tg(x)}{\sin(x)(1-\cos(x))} = \frac{-\frac{1}{2}x^3}{\frac{x^3}{2}} + x^3\varepsilon(x) = -1 + x^3\varepsilon(x)$

3.4 - Généralisation des développements Limités :

Développements Limités au voisinage de l'infini

Soit f une fonction définie au voisinage de l'infini c'est à dire f définie sur $]A, +\infty[$ ou $] - \infty, B[$ avec $A > 0$ et $B < 0$.

Définition :

²²S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

On dit que f admet un D.L d'ordre n au voisinage de de l'infini si elle est de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

ou encore

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \text{ avec } \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow \infty$$

Remarque :

Si f admet un D.L en $\frac{1}{x}$ au voisinage de l'infini, alors f admet une limite finie lorsque $x \rightarrow \infty$.

Développements Limités généralisé

Soit f une fonction définie au voisinage de 0 sauf peut être en 0 tel que $x^p f(x)$ admet un D.L au voisinage de 0

$$\begin{aligned} x^p f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \\ f(x) &= \frac{a_0}{x^p} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \frac{a_2}{x^{p-2}} + \cdots + a_n x^{n-p} + o(x^{n-p}) \end{aligned}$$

on dit alors que f admet un D.L généralisé au voisinage de l'infini.

Les D.L au voisinage de l'infini sont utilisés pour l'étude des branches infinies des courbes.

Un D.L permet la détermination (éventuelle) des asymptotes, des directions asymptotiques et la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Rappel du plan de l'étude d'une fonction ²³

$f : x \longrightarrow f(x)$ une fonction numérique

- i) Domaine de définition de f , D_f : les intervalles où f est définie.
- ii) Parité, périodicité (chercher dans ce cas la plus petite période).
- iii) Etude de la continuité de f .
- iv) Etudes des limites aux bornes des intervalles de D_f , points d'arrêts, asymptotes, directions asymptotiques, position de la courbe par rapport aux asymptotes et tangentes aux points critiques de la courbe.
- v) Calculer la dérivée et dresser le tableau de variation de f .
- vi) Résumer i, ii, iii, iv dans ce tableau de variation et signaler les particularités de (\mathcal{C})

²³S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

vii) Construire la courbe (\mathcal{C}) .

Remarque:

Pour le calcul des limites, on peut utiliser les D.L au voisinage de 0, à l'infini ainsi que les résultats sur les fonctions équivalentes et infiniments petits.

Asymptote:

Une condition nécessaire et suffisante pour que (\mathcal{C}) admette une asymptote à l'infini et que l'on puisse trouver a et b tel que $f(x) - ax - b$ tend vers 0 lorsque $x \rightarrow \infty$.

$$f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0$$

Exemple :

$$f(x) = \frac{x+2}{x} \sqrt{x^2-1}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x+2}{x^2} \sqrt{x^2-1}$$

Pour avoir le D.L au voisinage de l'infini on fait le changement de variable $x = \frac{1}{X}$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{X}{|X|} (1+2x) \sqrt{1-X^2} \implies \begin{cases} \text{si } X > 0, & \frac{f(x)}{x} = (1+2X) \sqrt{1-X^2} \\ \text{si } X < 0, & \frac{f(x)}{x} = -(1+2X) \sqrt{1-X^2} \end{cases}$$

$$\sqrt{1-X^2} = 1 - \frac{1}{2}X^2 + o(x^2) \implies \begin{cases} \text{si } X > 0, & \frac{f(x)}{x} = 1 + 2X - \frac{1}{2}X^2 + x^2 \varepsilon_1(X) \\ \text{si } X < 0, & \frac{f(x)}{x} = -1 - 2X - \frac{1}{2}X^2 + x^2 \varepsilon_2(X) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{si } X > 0, & f(x) = x + 2 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x} \varepsilon_1\left(\frac{1}{x}\right) \\ \text{si } X < 0, & f(x) = -x - 2 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x} \varepsilon_2\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

La droite $y = x + 2$ est asymptote à la courbe et que la courbe est au dessous de l'asymptote à $+$ l'infini puisque la différence $f(x) - x - 2$ est du signe de $-\frac{1}{2x}$

La droite $y = -x - 2$ est asymptote à la courbe et que la courbe est au dessous de l'asymptote à $+\infty$ puisque la différence $f(x) + x + 2$ est du signe de $-\frac{1}{2x}$

Direction asymptotique ²⁴:

Supposons que f admet un D.L au voisinage de l'infini de la forme

$$f(x) = ax + b + \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0$$

Le coefficient directeur de l'asymptote oblique est $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait direction asymptotique est que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ existe et est finie}$$

Branche parabolique :

La courbe admet une branche parabolique lorsque $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite a finie lorsque $x \rightarrow \infty$ et $f(x) - ax$ n'a pas de limite finie lorsque $x \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \infty$$

On dira que la courbe admet une branche parabolique dans la direction de coefficient a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

Exemple :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$$

mais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 0 \times x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

On a une branche parabolique dans la direction de coefficient 0 c'est à dire une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.

²⁴S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

Applications à l'étude des fonctions²⁵

Etude locale d'une fonction

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ I un intervalle de \mathbb{R} et x_0 un point de I .
Si on connaît le D.L de f au voisinage de x_0 , on en déduit l'allure de la représentative de f au voisinage du point de coordonnée $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$

Exemple :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Si $a_2 \neq 0$, la courbe représentative de f au voisinage du point $\begin{pmatrix} x_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$
(C) à l'allure de la parabole

$$x \rightarrow a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$$

Si $a_2 = 0$ et $a_1 \neq 0$ alors on a un point d'inflexion au voisinage de $\begin{pmatrix} x_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$

Application des développements limités à l'étude des fonctions

1)

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x} = \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$x = \frac{1}{X} \implies x \rightarrow \infty \text{ lorsque } X \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} f(x) = Y &= \frac{1 - X - X^2}{1 + X} = (1 - X - X^2)(1 - X + X^2 + X^2\varepsilon_1(X)) \quad \text{avec} \quad \lim_{X \rightarrow 0} \varepsilon_1(X) = 0 \\ &= 1 - 2X + X^2 + X^2\varepsilon_2(X) \\ &= 1 - 2X + X\varepsilon(X) \end{aligned}$$

$Y \rightarrow 1$ lorsque $X \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) $\implies f$ admet une asymptote horizontale

On peut voir à partir de ce D.L la position de la courbe par rapport à l'asymptote (au dessus ou en dessous)

$$Y - 1 = -X + X\varepsilon(X)$$

$$Y - 1 \geq 0 \text{ si } X \leq 0 \text{ c'est dire } -x \text{ assez grand}$$

$$Y - 1 \leq 0 \text{ si } X \geq 0 \text{ c'est dire } x \text{ assez grand}$$

²⁵S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

2)

$$f(x) = \frac{x+2}{x} \sqrt{x^2-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{x+2}{x^2} \sqrt{x^2-1} \\ &= \frac{x+2}{x^2} \times |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{x+2}{|x|} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{x}{|x|} \left(1 + \frac{2}{x}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{X}{|X|} (1 + 2X) \sqrt{1 - X^2} \quad \text{avec } x = \frac{1}{X} \end{aligned}$$

donc lorsque $x \rightarrow \infty$, $X \rightarrow 0$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} (1 + 2X) \sqrt{1 - X^2} & \text{si } X > 0 \\ -(1 + 2X) \sqrt{1 - X^2} & \text{si } X < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - X^2} &= 1 - \frac{1}{2} X^2 + o(X^2) \\ \implies \frac{f(x)}{x} &= \frac{x+2}{x^2} \sqrt{x^2-1} \\ &= \begin{cases} 1 + 2X - \frac{X^2}{2} + X^2 \varepsilon_1(X) & \text{si } X > 0 \\ -(1 + 2X) - \frac{X^2}{2} + X^2 \varepsilon_1(X) & \text{si } X < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon_1\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ -(1 + \frac{2}{x}) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon_1\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases} \\ f(x) &= \begin{cases} (x+2) - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x} \varepsilon_1\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ -(x+2) - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x} \varepsilon_1\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\implies y = x + 2$ est asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$ et (C) est en dessous de l'asymptote car $-\frac{1}{x} < 0$.

Saïd EL HAJJI

Université Mohammed V - Agdal

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique

Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation

Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014

Rabat, Maroc

Email : elhajji@fsr.ac.ma

Page web : www.fsr.ac.ma/LMC

ANNEXE :
Fonctions équivalentes ²⁶.

Définition : Fonctions Equivalentes

On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de $x = x_0$ (resp. ∞) si on a:

$$f(x) = g(x) (1 + \varepsilon(x)) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow x_0 \text{ (resp. } \infty)} \varepsilon(x) = 0$$

et on écrit

$$f \sim g$$

Remarques Fondamentales :

1) Dans la définition précédente, on suppose implicitement que le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ est définie au voisinage de a .

2) Si la fonction g ne s'allume pas au voisinage de a , sauf peut être en a , alors la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$ est définie au voisinage pointé de a .

3) Du fait de la division par g dans cette définition, g risque de s'annuler aoutour de a . Pour éviter ce problème, on dira qu'au voisinage de a , les fonctions f et g sont équivalentes si

$$f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x)) \text{ où } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

$$\text{ou } f(x) = \varphi(x)g(x) \text{ où } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1.$$

4)

i) Dire que $f \sim 0$, au voisinage de a , ne veut pas dire que $f \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

ii) $f \underset{V(a)}{\sim} l \neq 0$, veut dire que $f \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.

5)

i) Si $f \sim g$ alors

$$f(x) = g(x) + \varepsilon(x) g(x)$$

$$f(x) = g(x) + o(g(x))$$

$$f = g + o(g)$$

ii) Si $f \sim g$ alors

$$f - g = o(g)$$

²⁶S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

iii) Si $f \sim g$ et si $g \neq 0$ au voisinage de x_0 alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Exemples ²⁷:

$$\sin(x) \sim x \text{ au voisinage de } 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\text{tg}(x) \sim x \text{ au voisinage de } 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(x)}{x} = 1$$

$$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2} \text{ au voisinage de } 0 \text{ car } 1 - \cos(x) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \sim 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\exp(x) - 1 \sim x \text{ au voisinage de } 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, $a_i \neq 0$ $i = 1, \dots, n$ au voisinage de l'infini alors

$$P(x) \sim a_nx^n$$

en effet

$$P(x) = a_nx^n \left(\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1 \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{a_nx^n} = \left(\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1 \right)$$

$$= 1$$

$$\implies P(x) \sim a_nx^n \text{ au voisinage de l'infini}$$

au voisinage de 0 on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{a_0} = \left(1 + \frac{a_1x}{a_0} + \frac{a_2x^2}{a_0} + \dots + \frac{a_{n-1}x^{n-1}}{a_0} + \frac{a_nx^n}{a_0} \right)$$

$$= 1$$

$$\implies P(x) \sim a_0 \text{ au voisinage de } 0$$

Pour utiliser les fonctions équivalentes, il est essentiel de connaître ces résultats et remarques :

Théorème : Si au voisinage de a , $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ alors au voisinage de a ,

- 1) $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$
- 2) $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$
- 3) Si $\alpha f_1 + \beta f_2 \neq 0$ et $\alpha g_1 + \beta g_2 \neq 0$ alors $\alpha f_1 + \beta f_2 \sim \alpha g_1 + \beta g_2$.

Remarque :

1) Si au voisinage de a , $f \sim g \not\Rightarrow K(f) \sim K(g)$. En effet au voisinage de l'infinie, $x+1 \sim x$ mais il est faux que e^{x+1} soit équivalent à e^x , ou bien que $\sin(x+1)$ soit équivalent à $\sin(x)$.

2) Si f et g sont des infiniments petits (ou grands) et si $f \sim g$ alors $\log(f) \sim \log(g)$

2) Au voisinage de 0, $\sin(x) \sim x$ et $\operatorname{tg}(x) \sim x$ mais $\sin(x) - \operatorname{tg}(x)$ n'est pas équivalent à 0?

Théorème : Si au voisinage de a , $f \sim g$ et si $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a$ et si l'ensemble image de u est inclus dans les ensembles de définitions de f et de g , alors au voisinage de x_0 , $f(u(x)) \sim g(u(x))$.

Exemple :

1) Au voisinage de 0, on a : $e^x - 1 \sim x \Rightarrow e^{x^2} - 1 \sim x^2$

2) Au voisinage de 0, on a $\log(1+x) \sim x \Rightarrow \log(1 + \frac{x}{e^x}) \sim \frac{x}{e^x}$

Le théorème suivant (à admettre) est essentiel pour l'utilisation des limites.

Théorème Fondamental ²⁸: Si dans un produit ou quotient de fonctions, dont on cherche s'il a une limite et ce que vaut cette limite quand la variable tend vers a , on remplace un des facteurs de ce produit ou quotient par une fonction équivalente au voisinage de a , on ne change pas ainsi le fait que cette expression ait ou n'ait pas une limite, et on ne change pas non la valeur de cette limite si elle existe.

Application au calcul des limites :

Exemples

1) Au voisinage de l'infinie, $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \underset{V(\infty)}{\sim} a_n x^n$.

²⁸S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

En effet $\frac{P_n(x)}{a_n x^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}$ Donc $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{a_n x^n} = 1$.

2) Au voisinage de $x = 0$, $\sin(x) \sim x$.

En effet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Il suffit d'appliquer entre autre la règle de l'Hospital

3) Au voisinage de $x = 0$, $\operatorname{tg}(x) \sim x$.

En effet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, $\cos(x) = 1$ et $\frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \frac{1}{\cos(x)} \frac{\sin(x)}{x}$.

4) Au voisinage de $x = 0$, $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$.

En effet $1 - \cos(x) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{4}} = 1 \Rightarrow \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

5) Calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^3}$

quand $x \rightarrow \infty$ on a

$$\left. \begin{array}{l} x^3 + x^2 + 1 \sim x^3 \text{ au vois. de } \infty \\ x^3 \sim x^3 \text{ au vois. de } \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^3} \sim \frac{x^3}{x^3} = 1 \text{ au vois. de } \infty$$

d'où $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^3} = 1$

5) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

au voisinage de 0 on a

$$\left. \begin{array}{l} \cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x) \\ 1 - \cos(x) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \sim \frac{x^2}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \cos(x) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \sim 2 \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2} \text{ au vois. de } 0 \\ x^2 \sim x^2 \text{ au vois. de } 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \text{ au vois. de } 0$$

d'où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

Remarque :

1) Comment déterminer un équivalent d'une fonction f donnée dans un voisinage de a ?

Propriété ²⁹: Pour une fonction f au voisinage de a , le premier terme **non nul** que l'on rencontre en écrivant la Formule de Taylor est un équivalent de f au voisinage de a .

Exemples:

D'après les formules de Taylor (et de Mac-Laurin) de quelques fonctions usuelles. Toutes ces formules sont valables pour x au voisinage de 0 (pour les obtenir au voisinage de a , il suffit de poser $x = x - a$), on obtient :

- 1) Au voisinage de 0, $e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$
- 2) Au voisinage de 0, $\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1}$.
- 3) Au voisinage de 0, $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p}$
- 4) Au voisinage de 0, $\frac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + \dots + x^n$
- 5) Au voisinage de 0, $\log(1-x) \sim x - \frac{x^2}{2!} + \dots - \frac{x^n}{n!}$
- 6) Au voisinage de 0,

et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$

En particulier :

$$\frac{1}{1+x} \sim 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n$$

$$\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{2^{2n-1} (n!)^2} \frac{x^n}{2^{2n}}$$

Remarque : Peut-on déterminer, un équivalent de f au voisinage de a sans utiliser la Formule de Taylor ?

²⁹S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

EX 1: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f est-elle continue ? Dérivable ? De classe C^1 ?

EX 2: Soit f une fonction dont la courbe représentative passe par le point $(1, \sqrt{3})$ et admet une tangente au point d'abscisse 1. On suppose que cette tangente passe par le point $(2, 2\sqrt{3})$.

a) Déterminer $f'(1)$.

b) On suppose que f admet une fonction réciproque f^{-1} noté g , déterminer alors $g(\sqrt{3})$.

EX 3: Soit la fonction définie par: $f(x) = x^3 - 3a^2x + b$ où a et b sont des constantes réelles avec $a > 0$.

a) En utilisant le théorème de Rolle et en raisonnant par l'absurde, montrer que f s'annule au plus une fois sur l'intervalle $[-a, a]$.

b) Déterminer les valeurs de b pour lesquelles f s'annule.

Ex 4:

a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = \log(x)$ sur l'intervalle $[n, n+1]$ où n est un entier naturel vérifiant $n > 0$, montrer que

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log(n) < \frac{1}{n}$$

b) On définit la suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres réels en posant

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n)$$

Montrer que la suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement monotone. En déduire qu'elle est convergente et que si $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, on a $0 \leq \gamma < 1$ (γ s'appelle la constante d'Euler-Mascheroni. on ignore encore si elle est rationnelle ou non).

Ex 5: Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ pour $x > 1$.

1) Montrer que $f(x) - 2 = (x - 1) \left(1 + \frac{1}{c}\right)^c \log(1 + c) - \log(c) - \frac{1}{1 + c}$ pour un certain c vérifiant $1 < c < x$.

2) Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction \log pour montrer que $\log(1 + y) - \log(y) \geq \frac{1}{1 + y}$ pour $y > 0$. En déduire que $f(x) \geq 2$ pour tout $x \geq 1$.

3) On définit la suite $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $v_n = \frac{n!}{n^n}$ pour $n \geq 1$.

a) Utiliser le raisonnement par récurrence pour montrer $v_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \geq 1$

(On remarquera d'après 2) que $f(n) \geq 2$ pour tout $n \geq 1$).

b) Étudier la monotonie de la suite $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ et conclure si elle est convergente ou divergente.

c) Calculer la limite de cette suite en justifiant votre réponse.

Ex 6: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \rightarrow \log(\log(k))$ et $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \log(k)}$.

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[k, k + 1]$, où k est un entier strictement supérieur à 1, montrer que la suite $\{S_n\}_{n > 1}$ est divergente.

Ex 7: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + t}}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - 1$.

1) Vérifier que f' est croissante et continue sur \mathbb{R}^+ .

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{n + 1}{2n} f'(0) \leq S_n \leq \frac{n + 1}{2n} f'(1)$. (indication: On appliquera le théorème des accroissements finis.)

3) En déduire que la suite $\{S_n\}_{n \geq 1}$ converge et calculer sa limite.

Ex 8: Soit f une fonction réelle définie sur $[a, b]$. On dit que f est lipschitzienne s'il existe un réel k tel que: $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ où x et y sont des éléments quelconques de $[a, b]$.

Soit f une fonction dérivable et lipschitzienne sur $[a, b]$. Montrer que f' est bornée sur $[a, b]$.

Ex 9: Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie de la façon suivante:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \sin\left(\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}\right) & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ et } x = \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- 1) Déterminer l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^+$ où f est continue.
- 2) Montrer que f est dérivable en 0 et en tout points $x \neq \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
- 3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\left(\frac{1}{n} + h\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{\frac{1}{n} + h}\right)}{h} = (-1)^{n+1} \pi$$

- 4) En déduire que f n'est pas dérivable aux points $x = \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Oui
- les **Développements limités** .

Saïd EL HAJJI

Université Mohammed V - Agdal

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique

Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation

Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014

Rabat, Maroc

Email : elhajji@fsr.ac.ma

Page web : www.fsr.ac.ma/ANO/elhajji

Université Mohammed V - Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique
Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014
Rabat, Maroc Filière :



SMI - SM & SMP - SMC
Module : M_6

NOTES de cours

Chapitre 3

COURBES PARAMETREES PLANES

Par

Alami Idrissi Ali

El Hajji Saïd

Hakam Samir

<http://www.fsr.ac.ma/ANO/>

Année 2005-2006

Chapitre 3

COURBES PARAMETREES PLANES

3.1 Définitions

Soient :

1. P le plan muni du repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$
2. I un intervalle de $\mathbb{R} : I \subset \mathbb{R}$.
3. f et g deux fonctions numériques définies dans I , que l'on suppose assez régulières (minimum continues).

Pour tout $M \in P$, on pose $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et on note $M = M(x, y) = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Définition 3.1.1 : Une courbe paramétrique plane Γ est l'ensemble des positions (x, y) prises par un point $M(x, y)$, $M \in P$, dont les coordonnées sont des fonctions d'un paramètre $t : M = (x(t), y(t))$.

Si ce paramètre est le temps, il s'agit alors de la trajectoire du point. On pose :

$$\Gamma = \{M(x, y) \in P : x = x(t) \text{ et } y = y(t) \text{ où } t \text{ décrit } I, I \subset \mathbb{R}\}$$

Une courbe paramétrée plane est une application

$$\Gamma : D \subset P \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ où } D = \{(x(t), y(t)) : t \in I \subset \mathbb{R}\}$$

La donnée de Γ est équivalente à la donnée de deux fonctions réelles de variable réelle f et g définies sur $I = D_f \cap D_g$ telles que pour tout $t \in I$ on ait pour tout $M \in P$,

$$\overrightarrow{OM}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$$

On dit alors que Γ est décrite par les équations :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ t \in I = D_f \cap D_g \end{cases}$$

$t \in I$, s'appelle le paramètre.

Par abus de notation, on pose (on note) :

$$\begin{aligned} M \in \Gamma &\Leftrightarrow \exists t \in I : M(t) \in \Gamma \\ &\Leftrightarrow \exists t \in I : \overrightarrow{OM}(t) = f(t) \overrightarrow{i} + g(t) \overrightarrow{j} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in I : \overrightarrow{OM}(t) = x(t) \overrightarrow{i} + y(t) \overrightarrow{j} \end{aligned}$$

3.2 Exemples

3.2.1 Droite

Si la représentation d'une courbe Γ , dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est

$$\begin{cases} x(t) = \alpha t + a \\ y(t) = \beta t + b \\ t \in I \subset \mathbb{R} \end{cases}$$

Si de plus $I = \mathbb{R}$ alors Γ est une droite de vecteur directeur (α, β) passant par le point $A(a, b)$.

Si de plus $I \subset \mathbb{R}$ alors Γ est la partie de la droite de vecteur directeur (α, β) passant par le point $A(a, b)$, correspondant aux valeurs prises par x et y quand t décrit I .

3.2.2 Cercle

Si la représentation d'une courbe Γ , dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(t) \\ y(t) = R \sin(t) \\ t \in I \subset \mathbb{R} \end{cases}$$

Si $I = [0, 2\pi]$, alors Γ est le cercle de centre O et de rayon R . i.e. $R^2 = R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t$.

Si $I \subset \mathbb{R}$ alors Γ est la partie du cercle de centre O et de rayon R . correspondant aux valeurs prises par x et y quand t décrit I .

Ainsi si $I = [0, \pi]$, t décrit $[0, \pi]$ alors x décrit $[-R, +R]$ et y décrit $[0, R]$ i.e. Γ est le demi cercle "positif" de centre O et de rayon R .

Exemple 3.2.1 Dessiner les points $M(0)$ et $M(2)$ de la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{1}{t+1} \\ y(t) = t + \frac{1}{t^2-1} \\ t \in]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[\end{cases}$$

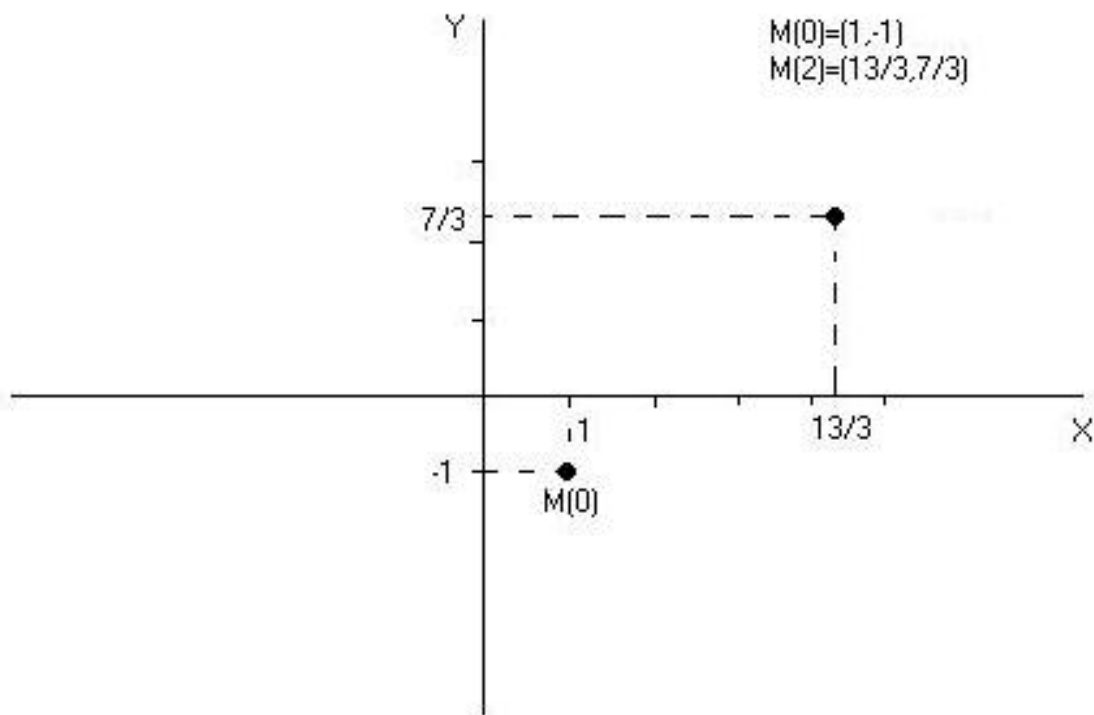


FIG. 3.1 –

3.3 Invariances

3.3.1 Périodicité

Définition 3.3.1 *On dit que la courbe Γ est périodique de période T si et seulement si :*

- i) $\forall t \in I, t + T$ et $t - T \in I$.*
- ii) $\forall t \in I, M(t + T) = M(t)$.*

Si $\overrightarrow{OM}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$, alors Γ est périodique de période T , si et seulement si f et g sont périodiques et de période T .

Exemple 3.3.1 *Si $M_o = M_o(x_o, y_o)$, le cercle $C(M_o, R)$ peut être paramétré de la façon suivante :*

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(t) + x_o \\ y(t) = R \sin(t) + y_o \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Les fonctions sinus et cosinus étant périodiques de période 2π , il en est de même de la courbe .

Dans la pratique, si Γ est périodique de période T , l'étude de la courbe Γ se fait dans un intervalle de longueur T , par exemple $[t_o, t_o + T] \cap I$ pour n'importe quel point t_o de I .

Exemple 3.3.2 :

$$\begin{aligned} i) \quad & x(t) = t - \pi E\left(\frac{t}{\pi} + \frac{1}{2}\right), \quad y(t) = \operatorname{tg}t, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi \\ ii) \quad & x(t) = \cos t^2, \quad y(t) = \sin t^2, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3.3.2 Invariance par translation

La courbe Γ sera invariante par la translation \mathfrak{S} si et seulement si $\mathfrak{S}(\Gamma) = \Gamma$. Soit M un paramétrage de Γ et soit \vec{v} le vecteur de la translation .

La condition $\mathfrak{S}(\Gamma) = \Gamma$ s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \forall M \in \Gamma, \mathfrak{S}(M) \in \Gamma \text{ et } \forall M \in \Gamma, \exists M_2 \in \Gamma : \mathfrak{S}(M_2) = M &\iff \\ \forall t \in I, \forall t_1 \in I : \overrightarrow{M(t)M(t_1)} = v \text{ et } \exists t_2 \in I \overrightarrow{M(t_2)M(t)} = \vec{v} & \end{aligned}$$

3.3.3 Symétries

3.3.3.1 Symétrie centrale

Soit \mathbf{S} la symétrie par rapport à un point $A(a, b)$; Γ est invariante par la symétrie \mathbf{S} si et seulement si $\mathbf{S}(\Gamma) = \Gamma$.

On a $\mathbf{S}^2 = Id_P$. Il suffit alors de vérifier que $\mathbf{S}(\Gamma) \subset \Gamma$. Soit (a, b) les coordonnées du centre de la symétrie \mathbf{S} , la condition $\mathbf{S}(\Gamma) \subset \Gamma$ s'écrit :

$$\forall t \in I, \exists t_1 \in I \quad f(t_1) = 2a - f(t) \text{ et } g(t_1) = 2b - g(t)$$

Remarque : Si f et g sont impaires, alors Γ est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple 3.3.3 Trouver le centre de symétrie de la courbe Γ d'équations :

$$\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t^2 + 2t \\ y(t) = 2t^3 - 6t^2 + 13t + 11 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3.3.3.2 Symétrie par rapport à une droite parallèle à l'un des axes :

- Γ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$ si et seulement si :

$$\forall t \in I, \exists t_1 \in I : f(t_1) = 2a - f(t) \text{ et } g(t_1) = g(t)$$

Exemple 3.3.4 : Symétrie par rapport à l'axe OY ($a=0$)

$$\begin{cases} f(t) = \sin t \\ g(t) = \cos 2t \end{cases} \quad \forall t \in I, \exists t_1 = -t \in I : f(t_1) = -f(t) \text{ et } g(t_1) = g(t)$$

Car la fonction sin est impaire et la fonction cos est paire. L'étude de cette courbe se fera sur le domaine $[0, \pi]$ car elle est périodique de période $T = 2\pi$ est symétrique par rapport à l'axe OX.

- Γ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = b$ si et seulement si

$$\forall t \in I, \exists t_1 \in I : f(t_1) = f(t) \text{ et } g(t_1) = 2b - g(t)$$

Exemple 3.3.5 : Symétrie par rapport à l'axe OX ($b=0$)

$$\begin{cases} f(t) = t + \frac{1}{t} \\ g(t) = t - \frac{1}{t} \end{cases} \quad \forall t \in I, \exists t_1 = \frac{1}{t} \in I : f(t_1) = f(t) \text{ et } g(t_1) = -g(t)$$

L'étude de cette courbe se fera sur le domaine $[-1, 0[\cup]0, 1]$ car son domaine de définition est \mathbb{R}^* et pour $t \in [-1, 0[\cup]0, 1]$ on a $\frac{1}{t} \in [-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

3.3.4 Translation

Si il existe T tel que

$$\begin{cases} f(t + nT) = f(t) + nT \\ g(t + nT) = g(t) + nT \\ t \in I \text{ et } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Exemple 3.3.6 :

$$\begin{cases} f(t) = t + \cos t \\ g(t) = t + \sin t \end{cases} \quad T = 2\pi$$

3.4 Branches infinies

On peut avoir des branches infinies quand $t \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow t_o^-$ et $t \rightarrow t_o^+$. L'étude est la même.

a) Cas général :

Définition : On dit que la courbe paramétrée M admet une branche infinie pour $t \rightarrow t_o^-$ si

$$\lim_{t \rightarrow t_o^-} \left\| \overrightarrow{OM}(t) \right\| = +\infty, \text{ avec } \left\| \overrightarrow{OM}(t) \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}, \overrightarrow{OM}(t) = x \vec{i} + y \vec{j}$$

Proposition :

Pour que la courbe M présente une branche infinie pour $t \rightarrow t_o^-$ il faut et il suffit que :

$$\lim_{t \rightarrow t_o^-} |f(t)| + |g(t)| = +\infty$$

Preuve :

$$\left\| \overrightarrow{OM}(t) \right\|^2 = |f(t)|^2 + |g(t)|^2 \leq (|f(t)| + |g(t)|)^2$$

c.à.d

$$\left\| \overrightarrow{OM}(t) \right\| \leq |f(t)| + |g(t)|$$

D'autre part on a :

$$|f(t)| \leq \sqrt{|f(t)|^2 + |g(t)|^2}$$

et

$$|g(t)| \leq \sqrt{|f(t)|^2 + |g(t)|^2}$$

\implies

$$|f(t)| + |g(t)| \leq 2 \left\| \overrightarrow{OM}(t) \right\|$$

d'où l'équivalence .

Remarque :

L'existence d'une branche infinie pour la courbe M n'impliquent pas nécessairement l'existence des limites

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} |f(t)| \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_0^-} |g(t)| .$$

Contre-exemple : Etudier en $+\infty$ la courbe suivante :

$$f(t) = t \cos(t) \quad \text{et} \quad g(t) = t \sin(t) \quad .$$

Définition : On dit que la branche infinie admet la direction asymptotique \vec{u}_o si :

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{\overrightarrow{OM}(t)}{\left\| \overrightarrow{OM}(t) \right\|} = \vec{u}_o$$

Conséquences de la définition ci-dessus :

i) Si le vecteur \vec{u}_o existe alors $\left\| \vec{u}_o \right\| = 1$.

ii) En posant $\theta(t) = (\vec{i}, \overrightarrow{OM}(t))$, la condition ci-dessus s'écrit :

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \theta(t) = \theta_0, \quad \text{avec} \quad \theta_0 = (\vec{i}, \vec{u}_o)$$

iii) Si on pose $\alpha(t) = \tan \theta(t) = \frac{g(t)}{f(t)}$, la condition s'écrit :

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \alpha(t) = \alpha_0, \quad \text{avec} \quad \alpha_0 = \tan \theta_0.$$

Définition

Soit M une courbe paramétrée admettant une branche infinie pour $t \rightarrow t_0^-$. On dit que la droite Δ est une **asymptote** de la courbe si et seulement si la distance de $M(t)$ à Δ tend vers 0 quand $t \rightarrow t_0^-$.

Recherche des asymptotes

La recherche des asymptotes se fera en procédant de la façon suivante :

(i) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles il y a branche infinie.

(ii) Trois cas sont possibles :

$$1^{er} \text{ cas} : \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_0^-} g(t) = \infty.$$

La droite verticale d'équation $x = x_0$ est une asymptote.

2^{ème} cas : $\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) = \infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0^-} g(t) = y_0$.

La droite horizontale d'équation $y = y_0$ est une asymptote.

3^{ème} cas : $\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) = \infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0^-} g(t) = \infty$.

Dans ce cas on poursuit l'étude de la façon suivante :

- On calcule la limite suivante (si elle existe) $\alpha_0 = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{g(t)}{f(t)}$.

- On calcule la limite suivante (si elle existe) $\beta_0 = \lim_{t \rightarrow t_0^-} g(t) - \alpha_0 f(t)$; dès lors la droite d'équation $y = \alpha_0 x + \beta_0$ est une asymptote.

- Si $g(t) - \alpha_0 f(t) - \beta_0 > 0$ au voisinage de t_0^- , la courbe est au-dessus de l'asymptote.

- Si $g(t) - \alpha_0 f(t) - \beta_0 < 0$ au voisinage de t_0^- , la courbe est en dessous de l'asymptote.

- Si α_0 existe et si $\beta_0 = \infty$, on dit que la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique $y = \alpha_0 x$.

b) Cas où les fonctions f et g admettent des développements limités.

Supposons que les fonctions f et g admettent les développements limités suivants au voisinage de t_0 :

$$f(t) = \frac{a}{t-t_0} + b + \varepsilon(t) \quad , \quad g(t) = \frac{a'}{t-t_0} + b' + \varepsilon'(t) \quad , \quad \text{avec } \lim_{t \rightarrow t_0^-} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \varepsilon'(t) = 0.$$

Alors la droite d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = a\lambda + b \\ y = a'\lambda + b' \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

est une asymptote.

Remarque :

Si φ et ψ sont des fonctions telles que :

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} [f(t) - \varphi(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0^-} [g(t) - \psi(t)] = 0.$$

On dit que la courbe $M(t) = (f(t), g(t))$ admet pour asymptote le support de la courbe paramétrée $t \rightarrow (\varphi(t), \psi(t))$.

Exemples :

(i) Soit la courbe définie par :

$$x(t) = t - t^3 \quad , \quad y(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{3t^4}{4}$$

La courbe n'admet pas de droite comme asymptote puisque l'on a :

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{y(t)}{x(t)} = +\infty.$$

(ii) Considérons la courbe définie par :

$$x(t) = \frac{t^3}{t^2-1} \quad , \quad y(t) = \frac{t^2}{t-1}$$

On a alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) - x(t) = 1.$$

La droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote pour t tendant vers $\pm \infty$. Pour déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote, effectuons le développement limité des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ en $\pm \infty$:

$$x(t) = t + \frac{1}{t} + \varepsilon\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad , \quad y(t) = t + 1 + \frac{1}{t} + \varepsilon\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

d'où :

$$y(t) = x(t) + 1 + \frac{1}{t} + \varepsilon\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par conséquent la courbe est au-dessus de l'asymptote pour t tendant vers $+\infty$, et en dessous de l'asymptote pour t tendant vers $-\infty$.

5) Etude locale :

a) Points réguliers, stationnaires et biréguliers :

Définition : Un point t_o de D tel que f et g soient dérivables en t_o avec $f'(t_o) \neq 0$ ou $g'(t_o) \neq 0$ est dit **régulier**. Si $f'(t_o) = g'(t_o) = 0$, le point est dit **stationnaire**.

On écrit aussi :

$$\begin{aligned} M'(t_o) &= (f'(t_o), g'(t_o)) \\ M(t_o) \text{ est régulier si } \overrightarrow{M'(t_o)} &\neq \overrightarrow{0} \\ M(t_o) \text{ est stationnaire si } \overrightarrow{M'(t_o)} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Définition : Un point t_o de D tel que f et g admettent des dérivées secondes en t_o est dit **birégulier** si $\overrightarrow{M'(t_o)}$ et $\overrightarrow{M''(t_o)}$ sont linéairement indépendants.

t_o est birégulier si et seulement si :

$$f'(t_o)g''(t_o) - f''(t_o)g'(t_o) \neq 0$$

b) Méthode des développements limités

Soit t_o , nous supposons f et g indéfiniment dérivables en t_o . Notons :

$$\overrightarrow{M(t)} = f(t)\overrightarrow{i} + g(t)\overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{M^{(n)}(t)} = f^{(n)}(t)\overrightarrow{i} + g^{(n)}(t)\overrightarrow{j}$$

Au voisinage de t_o , nous avons la formule de Taylor :

$$\overrightarrow{M(t)} = \overrightarrow{M(t_o)} + h\overrightarrow{M'(t_o)} + \dots + \frac{h^n}{n!}\overrightarrow{M^{(n)}(t_o)} + h^n\overrightarrow{\varepsilon(t)}$$

où $\overrightarrow{\varepsilon(t)} = \varepsilon_1(t)\overrightarrow{i} + \varepsilon_2(t)\overrightarrow{j}$ avec $\varepsilon_1(t) \rightarrow 0$ et $\varepsilon_2(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow t_o$ et $h = t - t_o$

Définition : On appelle **premier invariant** de la courbe paramétrée M en t_o le plus **petit** entier strictement positif p tel que $M^{(p)}(t_o) \neq \overrightarrow{0}$ (si il existe). De la définition de p :

$$\overrightarrow{M(t_o)M(t_o+h)} = \frac{h^p}{p!}\overrightarrow{M^{(p)}(t_o)} + h^p\overrightarrow{\varepsilon(t)}$$

$$\overrightarrow{M^{(p)}(t_o)} \neq \overrightarrow{0} \text{ et } \lim_{t \rightarrow t_o} \overrightarrow{\varepsilon(t)} = \overrightarrow{0}$$

On voit que $\overrightarrow{M(t_o)M(t_o+h)}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{M_p(t_o)} + p! \overrightarrow{\varepsilon(t)}$ qui tend vers $\overrightarrow{M_p(t_o)}$ quand t tend vers t_o . La tangente à la courbe Γ en $M(t_o)$ a la direction, du vecteur $\overrightarrow{M_p(t_o)}$

Règle pratique : On calcule les dérivées successives de f et g en t_o , et on détermine p tel que :

$$f'(t_o) = g'(t_o) = \dots = f^{(p-1)}(t_o) = g^{(p-1)}(t_o) = 0$$

et $((f^{(p)}(t_o) \neq 0 \text{ ou } g^{(p)}(t_o) \neq 0)$

La tangente a pour équations :

$$\begin{cases} x = x_o + \lambda f^{(p)}(t_o) \\ y = y_o + \lambda g^{(p)}(t_o) \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

L'équation cartésienne de la tangente s'écrit :

$$g^{(p)}(t_o)(x - x_o) - f^{(p)}(t_o)(y - y_o) = 0$$

Définition : On appelle **second invariant** de la courbe M en t_o le plus petit entier q , ($q > p$) tel que les vecteurs $\overrightarrow{M^{(p)}(t_o)}$ et $\overrightarrow{M^{(q)}(t_o)}$ soient linéairement indépendants.

$\overrightarrow{M^{(p)}(t_o)}$ et $\overrightarrow{M^{(q)}(t_o)}$ sont linéairement indépendants si et seulement si

$$\det \left(\overrightarrow{M^{(p)}(t_o)}, \overrightarrow{M^{(q)}(t_o)} \right) \neq 0$$

Remarque : Si t_o est birégulier alors $p = 1$ et $q = 2$.

Considérons le repère $\left\{ M(t_o), \overrightarrow{M^{(p)}(t_o)}, \overrightarrow{M^{(q)}(t_o)} \right\}$, où p et q désignent respectivement le premier et le second invariant du point $M(t_o)$. Soit M un point du plan, (α, β) ses coordonnées dans le nouveau repère, nous avons alors :

$$\overrightarrow{M(t_o)M} = \alpha \overrightarrow{M^{(p)}(t_o)} + \beta \overrightarrow{M^{(q)}(t_o)}$$

$M \in I$	si et seulement si	$\alpha > 0$ et $\beta > 0$
$M \in II$	si et seulement si	$\alpha < 0$ et $\beta > 0$
$M \in III$	si et seulement si	$\alpha > 0$ et $\beta < 0$
$M \in IV$	si et seulement si	$\alpha < 0$ et $\beta < 0$

En appliquant la formule de Taylor , nous obtenons :

$$\overrightarrow{M(t_o)M(t)} = \frac{(t - t_o)^p}{p!} \overrightarrow{M^{(p)}(t_o)} + \dots + \frac{(t - t_o)^q}{q!} \overrightarrow{M^{(q)}(t_o)} + \frac{(t - t_o)^q}{q!} \overrightarrow{\varepsilon(t)}$$

En utilisant la définition de q , nous obtenons :

$$\overrightarrow{M(t_o)M(t)} = \frac{(t - t_o)^p}{p!} (1 + \varepsilon_1(t)) \overrightarrow{M^{(p)}(t_o)} + \frac{(t - t_o)^q}{q!} (1 + \varepsilon_2(t)) \overrightarrow{M^{(q)}(t_o)}$$

où $\lim_{t \rightarrow t_o} \varepsilon_1(t) = \lim_{t \rightarrow t_o} \varepsilon_2(t) = 0$.

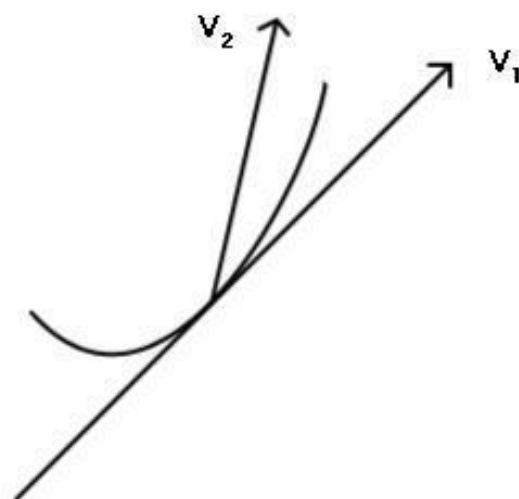
Donc pour t voisin de t_o , $\frac{(t - t_o)^p}{p!} (1 + \varepsilon_1(t))$ est du signe de $(t - t_o)^p$; de même $\frac{(t - t_o)^q}{q!} (1 + \varepsilon_2(t))$ est du signe de $(t - t_o)^q$.

Le point $M(t)$ pour t voisin de t_o et $t > t_o$ est donc dans la région I

Nature du point M

1er cas : p impair et q pair

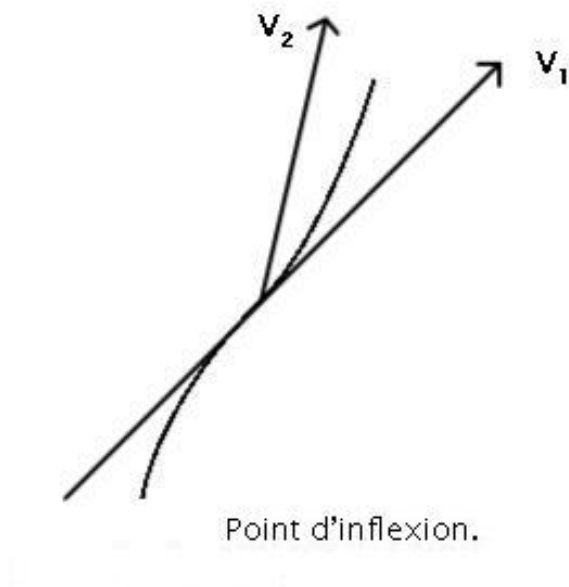
Si t est voisin de t_o et $t < t_o$, alors $M(t) \in II$ car $\alpha < 0$ et $\beta > 0$. Un tel point est dit **ordinaire**



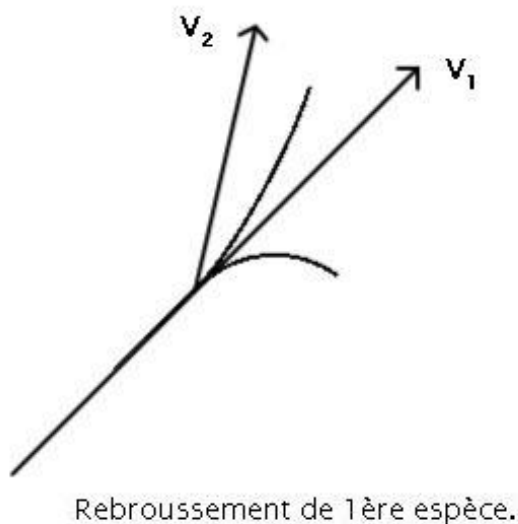
Point ordinaire.

2ème cas : p impair et q pair

Si t est voisin de t_0 et $t < t_0$ alors $M(t) \in IV$ car $\alpha < 0$ et $\beta > 0$. Un tel point est dit point **d'inflexion**. **3ème cas** : p pair et q impair

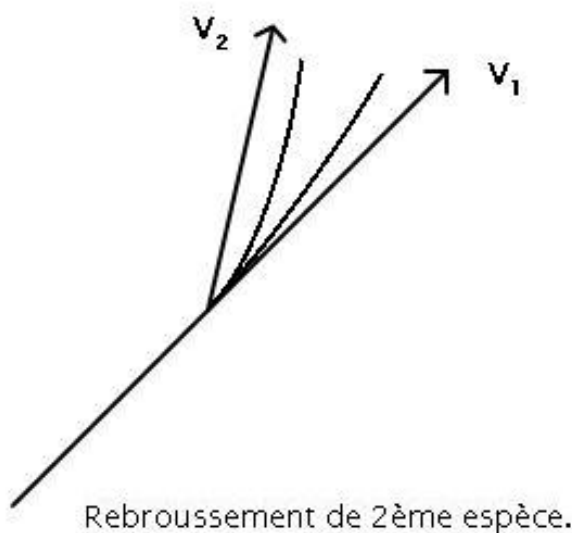


Si t est voisin de t_0 et $t < t_0$ alors $M(t) \in III$ car $\alpha > 0$ et $\beta < 0$. Le point t_0 est dit point de **rebroussement de première espèce**.



4ème cas : p pair et q pair

Si t est voisin de t_o et $t < t_o$ alors $M(t) \in I$ car $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Un tel point est dit point de **rebroussement de seconde espèce**. **Règle pratique :** Une fois



p déterminé, on calcule $f^{(p+1)}(t_o)$ et $g^{(p+1)}(t_o)$ puis

$$f^{(p)}(t_o)g^{(p+1)}(t_o) - f^{(p+1)}(t_o)g^{(p)}(t_o)$$

Si ce nombre est non nul, alors $q = p + 1$, sinon on continue jusqu'à trouver q tel que :

$$f^{(p)}(t_o)g^{(q)}(t_o) - f^{(q)}(t_o)g^{(p)}(t_o) \neq 0$$

c) Pente de la tangente.

La pente de la tangente à Γ en un point $M(t_o)$, où le premier invariant p existe, est donnée par le rapport suivant :

$$m(t_o) = \frac{g^{(p)}(t_o)}{f^{(p)}(t_o)}$$

avec la convention que $m(t_o) = \infty$ si $f^{(p)}(t_o) = 0$.

d) Points multiples.

Un point A est dit multiple où double de la courbe paramétrée M si il existe t_1 et t_2 distincts tels que : $M(t_1) = M(t_2) = A$.

Exemple :

a)

$$\begin{cases} x(t) = \frac{(t+2)^2}{t+1} \\ y(t) = \frac{(t-2)^2}{t-1} \end{cases}$$

i) $D =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$

ii) $(x(-t), y(-t)) = (-y(t), -x(t)) = -(y(t), x(t))$

la courbe est symétrique par rapport à la seconde diagonale $y = -x$.

Etude sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$.

iii) Etude aux bornes

$$(x(0), y(0)) = (4, -4)$$

$$t \rightarrow 1, t = 1 + \varepsilon$$

$$x(t) = \frac{9}{2} + \frac{3}{4}\varepsilon + o(\varepsilon)$$

$$y(t) = -2 + \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}$$

$$t \rightarrow 1^-$$

$$x(t) \rightarrow \frac{9^-}{2} \text{ et } y(t) \rightarrow -\infty$$

$$t \rightarrow 1^+ \quad x(t) \rightarrow \frac{9^+}{2} \text{ et } y(t) \rightarrow +\infty$$

$$\text{asymptote, } x = \frac{9}{2}$$

$$t \rightarrow +\infty$$

$$x(t) = t + 3 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$y(t) = t + 3 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

L'asymptote est : $x = t + 3, y = t - 3$

ou $y = x - 6$

$y(t) - (x - 6) > 0$ la courbe est au-dessus de l'asymptote.

(iv) Tableau des variations :

$$x'(t) = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2}, \quad y'(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$$

t	0	1	2	$+\infty$	
x'	0	+	+	+	
y'	0	-		- 0 +	
x	4	\nearrow	$9/2$	\nearrow $16/3$	\nearrow $+\infty$
y	-4	\searrow	$-\infty$	\searrow $+\infty$	\searrow $+\infty$

v) **Point remarquable**

Au voisinage de $t = 0$, on a :

$$\overrightarrow{OM}(t) = (4\vec{i} - 4\vec{j}) + (\vec{i} - \vec{j})t^2 + (-\vec{i} - \vec{j})t^3 + o(t^3)$$

$p = 2$ pair, $q = 3$ impair

$M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce, la tangente étant la seconde diagonale.

