Série 1, Analyse 3. (SMIA) (Corrigé) Printemps 2021

Ex 1 On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x+9}-3}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{(x+9)-9}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} \times \left(\sqrt{x+9}+3\right)$$

$$= 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{(2x)} \times \left(\sqrt{x+9}+3\right)$$

$$= 2 \times 1 \times 6 = 12.$$

Donc on donne à f la valeur 12 en 0 pour qu'elle soit continue en 0.

Ex 2. (i) Considérons la fonction $h(t) = \ln(t)$; où $t \in [x, x+1]$, avec $x > 0$; on a h est continue sur $[x, x+1]$, elle est dérivable sur $]x, x+1[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que

$$\frac{1}{c_x} = h'(c_x) = \frac{h(x+1)-h(x)}{(x+1)-x} = \ln(x+1) - \ln(x)$$

Or, on a $c_x \in]x, x+1[$, d'où : $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c_x} < \frac{1}{x}$. Ce qui implique que

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

(ii) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; d'où ; pour chaque $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $f'(x) = \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)'$

$$= \left(\exp\left(x \ln\left(1+1/x\right)\right)\right)'$$

$$= \left(x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)' \exp\left(x \ln\left(1+1/x\right)\right)$$

$$= \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\frac{(1+1/x)'}{1+1/x}\right) f(x)$$

$$= \left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x \times \frac{-1/x^2}{\frac{x+1}{x}}\right) f(x)$$

$$= \left(\ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}\right) f(x)$$

D'après (i) ; on a $f'(x) > 0$; pour chaque $x \in \mathbb{R}_+^*$

ce qui implique que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

(iii) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; d'où, on a, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$;

$$g'(x) = \left(\left(1+1/x\right)^{x+1}\right)'$$

$$= \left(\exp\left((x+1) \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\right)'$$

$$= \left((x+1) \ln\left(1+1/x\right)\right)' \exp\left((x+1)\ln\left(1+1/x\right)\right)$$

$$= \left(\ln\left(1+1/x\right) + (x+1) \times \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{1+1/x}\right) g(x)$$

$$= \left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + (x+1) \times \frac{-1/x^2}{\frac{x+1}{x}}\right) g(x)$$

$$= \left(\ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x}\right) g(x)$$

D'après (i), on déduit que $g'(x) < 0$; pour chaque $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Ce qui implique g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

(iv) Calcul de limite en $(+\infty)$.

D'après (i) on a: $\frac{1}{x+1} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}$, $(x>0)$

D'où:
$$\frac{x}{x+1} < x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1$$

Donc.
$$e^{\frac{x}{x+1}} < e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} < e^{1}$$

C'est-à-dire:
$$e^{x/x+1} < f(x) < e^{1}$$

Faisons tendre x vers $+\infty$, en utilisant la règle de gendarme, on obtient
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{1}.$$

Deuxièment; on a:
$$1 < (x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{x+1}{x}$$

D'où:
$$e^{1} < e^{(x+1)\ln(1+1/x)} < e^{\frac{x+1}{x}}$$

Donc:
$$e^{1} < g(x) < e^{\frac{x+1}{x}}$$

Faisons tendre x vers $+\infty$, en utilisant la règle de gendarme, on déduit que
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = e^{1}.$$

<u>Ex 3</u>. Fixons $x \in \mathbb{R}$;

(a-i) Montrons par récurrence que
$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right); \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

* Pour $n=0$; on a : $f^{(0)}(x) = \sin(x) = \sin(x + 0\frac{\pi}{2})$

Pour $n=1$; $f'(x) = \cos(x) = \sin(x + 1 \cdot \frac{\pi}{2})$.

* H.R : Supposons que : $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$; pour le rang n.

* Montrons que le résultat est vrai pour $(n+1)$.

On a : $$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'$$
$$= \left(\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right)'$$
$$= \cos(\underbrace{x + n \cdot \frac{\pi}{2}}_{X})$$
$$= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \sin\left(x + (n+1) \cdot \pi/2\right).$$

D'où le résultat.

(a-ii) On a : $$g^{(n)}(x) = \left(g'(x)\right)^{(n-1)}$$
$$= \left(2\sin(x)\cos(x)\right)^{(n-1)}$$
$$= \left(\sin(2x)\right)^{(n-1)}$$
$$= 2^{(n-1)} \sin\left(2x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

(remarquer que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$)

D'où :

$$\boxed{g^{(n)}(x) = 2^{(n-1)} \sin\left(2x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right).}$$

(b) Fixons $x>0$; on a : $f'(x) = \left(x^2 \ln(x)\right)'$

$$= 2x \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}$$

$$= 2x \ln(x) + x.$$

et $f''(x) = \left(f'(x)\right)' = 2\ln(x) + 2 + 1$

$$= 2\ln(x) + 3$$

Or, on remarque que $\left(x^2\right)^{(k)} = 0$; pour $k \geq 3$; d'après la formule de Leibniz, on a :

$$f^{(n)}(x) = \left(x^2 \ln(x)\right)^{(n)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^2\right)^{(k)} \ln^{(n-k)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \left(x^2\right)^{(k)} \ln^{(n-k)}(x)$$

$$= \binom{n}{0} \ln^{(n)}(x) + \binom{n}{1} \left(x^2\right)' \ln^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} \left(x^2\right)^{(2)} \ln^{(n-2)}(x).$$

Or, par récurrence (encore) ; on a :

$$\ln^{(m)}(x) = \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{x^m} \quad ; \text{ pour } m \geq 1.$$

Ex 4:

(a) Comme la fonction f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$; il suffit de calculer la dérivée seconde de f ; On a ; pour $x \in \mathbb{R}_+^*$;

$$f'(x) = \ln(x) + 1 \quad ;$$

et
$$f''(x) = \frac{1}{x} \; ; > 0 \text{ pour chaque } x \in \mathbb{R}_+^*$$

D'où la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Par définition, f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, donc :

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v)$$

où $\lambda \in [0,1]$ et $u, v \in \mathbb{R}_+^*$.

En particulier, pour $\lambda = \frac{1}{2}$. On déduit que :

$$f\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(u) + \frac{1}{2} f(v)$$

C'est-à-dire ; on a :

$$\frac{u+v}{2} \ln\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{u\ln(u) + v\ln(v)}{2}$$

Multiplions par 2 ; on obtient le résultat.

Ex 5. $p>1$

(a) Considérons la fonction $f(x)=(1+x)^p-(1+px)$; où $x>-1$; f est dérivable sur $]-1,+\infty[$; on a :

$$f'(x)=p(1+x)^{p-1}-p$$
$$=p\left((1+x)^{p-1}-1\right)$$

Tableau de variation :

x	-1	0	1
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

D'après le tableau de variation on déduit que

$$f(x)\geq 0 \quad \forall x\in]-1,+\infty[$$

et $f(x)>0$ si $x\neq 0$

D'où : l'inégalité de Bernoulli est vraie.

(b) Comme $x\mapsto \ln(x)$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$; et comme $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; par définition de concavité

On déduit que :

$$\ln\left(\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\right)\geq \frac{1}{p}\ln(x^p)+\frac{1}{q}\ln(y^q)$$
$$=\ln(x)+\ln(y)$$
$$=\ln(xy)$$

Puisque la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$,
on déduit le résultat $\boxtimes$