Université Mohammed V
Faculté des Sciences de Rabat
Département de Mathématiques

**Printemps 2021**

## Série 1, Analyse 3 (SMIA)

**Exercice 1** (Continuité). *Quelle valeur donner en* $0$ *pour que la fonction suivante*

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x+9}-3}, \qquad x \in ]-9, +\infty[ \setminus \{0\},$$

*soit continue en* $0$ *?*

**Exercice 2** (Théorème des Accroissements Finis). *En montrant l'inégalité*

$$\frac{1}{1+x} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}, \qquad x > 0,$$

*déduire que les fonctions* $f$ *et* $g$ *définies sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par*

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

*sont monotones et déterminer leur limites en l'infini.*

**Exercice 3** (Dérivée d'ordre supérieur). *Calculer la dérivée* $n^{\text{ième}}$ *des fonctions suivantes.*

(a) *Les fonctions* $f$ *et* $g$ *définies sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \sin x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sin^2 x.$$

(b) *En utilisant la formule de* **Leibniz**,

$$f(x) = x^2 \ln x, \qquad x > 0.$$

**Exercice 4** (Convexité). *Soit* $f : ]0, +\infty[ \mapsto \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = x \ln x$.

(a) *Vérifier que* $f$ *est convexe.*

(b) *En déduire que pour tout couple* $u, v$ *de* $]0, \infty[$

$$(u+v) \ln \frac{u+v}{2} \leq u \ln u + v \ln v.$$

**Exercice 5** (Extremum). *Soit* $p > 1$ *et* $q$ *l'exposant conjugué de* $p$ *défini par la relation*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

*Montrer les inégalités suivantes.*

(a) *L'inégalité de* **Bernoulli***: Pour tout* $x > -1$,

$$(1+x)^p \geq 1 + px,$$

*l'inégalité est strict si* $x \neq 0$.

(b) *L'inégalité de* **Young***: Pour tout* $x, y \geq 0$,

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q},$$

*l'inégalité est strict si* $x^{p-1} \neq y$.