Série 2 :

Exercice 1 : Étudier la convergence des intégrales : (Intégrale de Bertrand)

* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$

$t \longrightarrow \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ est une fonction continue sur $]0,+\infty[$ alors elle est localement intégrable sur $]0,+\infty[$

On a un problème en 0 et en $+\infty$

Étudions $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$

$$\frac{\ln(t)}{1+t^2} \leqslant 0 \quad \text{sur }]0,1]$$

$$\frac{\ln(t)}{1+t^2} \sim \ln(t) \quad (\leqslant 0)$$

$\displaystyle\int_\varepsilon^1 \ln(t)\,dt$

On fait une intégration par partie

$U = \ln(t) \longrightarrow U' = \dfrac{1}{t}$

$V' = 1 \longrightarrow V = t$

$$\int_\varepsilon^1 \ln(t)\,dt = \big[t\ln(t) - t\big]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\ln(\varepsilon) + \varepsilon$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \ln(t)\,dt = -1$$

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$ est convergente.

Étudions $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$

$$\lim t^{3/2} \frac{\ln(t)}{1+t^2} = 0$$

Alors d'après la règle de Reiman : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$ est convergente.

Conclusion : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$ est convergente.

si $\beta \neq 1$ $\int_2^A \frac{1}{t\ln(t)^\beta}dt = \frac{1}{1-\beta}\left[\ln(t)^{1-\beta}\right]_2^A$

$$= \frac{1}{1-\beta}\left[(\ln(A))^{1-\beta} - (\ln(2))^{1-\beta}\right]$$

$1-\beta > 0$ $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^\beta}dt = +\infty$

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^\beta}dt$ est divergente.

$1-\beta < 0$ $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_2^A \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta}dt = \frac{\ln(2)^{1-\beta}}{\beta-1}$

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta}dt$ est cv.

$\int_1^2 \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta}dt$ est convergente ssi $\beta < 1$

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta}dt$ est convergente ssi $\alpha > 1$

ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$

Conclusion: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}dt$ est convergente ssi $\alpha > 1$ et $\beta > 1$

Exercice 2:

1) Montrer qu'il existe une fonction $g : [1;+\infty[$ continue bornée et telle que :

$$\forall x \geq 1 \quad \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2(x)}{x} + \frac{\sin^3(x)}{x\sqrt{x}}\, g(x)$$

2) Étudier la convergence des intégrales suivantes.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$$

3) Déduire la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\sin(x)}dx$

↳ 1)

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\sin x} - \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2(x)}{x} = \frac{x\sqrt{x}\sin x - x\sin(x)(\sqrt{x}+\sin(x)) + \sqrt{x}\sin^2(x)(\sqrt{x}+\sin(x))}{x\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sin(x))}$$

$$= \frac{\cancel{x\sqrt{x}\sin x} - \cancel{x\sqrt{x}\sin x} - \cancel{x\sin^2 x} + \cancel{x\sin^2 x} + \sqrt{x}\sin^3(x)}{x\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sin(x))}$$

$$= \frac{\sin^3(x).\sqrt{x}}{\sqrt{x}.x(\sin x+\sqrt{x})}$$

donc $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sin x}$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$-1+\sqrt{x} \leq \sqrt{x}+\sin x \leq 1+\sqrt{x}$

$x > 1$

$0 \leq \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sin(x)} \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

$0 \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \leq g(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

g est continue sur $[1, A]$ $\forall A \in \mathbb{R}$

Alors g est bornée sur $[1, A]$ (l'image d'un fermé borné par une application continue)

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$

$\varepsilon = 1$ $\exists A\ \forall x > A$ $0 < g(x) < 2$

g est bornée sur $[1, +\infty[$

2) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx$

$\int_1^{A} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$

On fait une intégration par parties.

$U = \frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow U' = -\frac{1}{2x^{3/2}}$

$V' = \sin x \longrightarrow V = -\cos x$

$\int_1^A \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \left[-\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right]_1^A - \frac{1}{2}\int_1^A \frac{\cos x}{x^{3/2}} dx$

$\lim_{A \to +\infty} \frac{-\cos A}{\sqrt{A}} = 0$

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{3/2}} dx$ $\left|\frac{\cos x}{x^{3/2}}\right|$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ est une intégrale convergente.

Ce qui implique que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ est convergente.

$\rightarrow$ Étudions la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ $\sin^2(x) = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x} dx$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$ est divergente.

$\int_1^{A} \frac{\cos 2x}{x} dx$

$U = \frac{1}{x} \longrightarrow U' = -\frac{1}{x^2}$

$V' = \cos 2x \longrightarrow V = \frac{1}{2}\sin 2x$

Scanné avec CamScanner

Calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx$

Soit $a > 0$

$$I_a = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx$$

$\int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ et $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x} dx$ sont convergentes

$$I_a = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_a^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x} dx$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x} dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^{A} \frac{e^{-2x}}{x} dx$$

$(U = 2x \quad dU = 2dx)$

$$= \lim_{A \to +\infty} \int_{2a}^{2A} \frac{e^{-U}}{U} dU = \int_{2a}^{+\infty} \frac{e^{-U}}{U} du$$

$$I_a = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{2a}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

$$= \int_a^{2a} \frac{e^{-x}}{x} dx = \int_a^{2a} \frac{e^{-x} - 1}{x} + \frac{1}{x} dx$$

$$= \int_a^{2a} \frac{e^{-x}-1}{x} dx + \ln(2)$$

$\lim_{a \to 0} I_a = \lim_{a \to 0} (F(2a) - F(a)) + \ln(2)$ (où F fct primitive de $\frac{e^{-x}-1}{x}$) ~~cte~~

$= \ln(2)$

I

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx$; $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$

1) Montrer que I et J convergent et que $I = J$

$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ est convergente.

($x \longmapsto \ln(\sin x)$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$)

Problème en 0 : $\lim_{t \to 0^+} \sqrt{t} \ln(\sin t) = \lim_{t \to 0^+} \sqrt{\frac{t}{\sin t}} \times \sqrt{\sin t} \ln(\sin t) = 0$

donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ est convergente

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx$

$x \longmapsto \ln(\cos x)$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

Pb en $\frac{\pi}{2}$; $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{a} \ln(\cos x) dx = + \int_{\frac{\pi}{2}-a}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) du$$

$(U = \frac{\pi}{2} - x \quad du = -dx)$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}-a}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$$

$\Rightarrow \lim_{a \to \frac{\pi}{2}} \int_0^{a} \ln(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = J$

$I = J$

$\int_1 \frac{\cos x}{x^2} dx$ est convergente car $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente.

$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ est divergente.

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ est divergente (Ex3 2b))

$\forall x > 0 \quad 0 \leq \frac{\sin^2 x}{x} \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right| \qquad 0 \leq f \leq g$

$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ est divergente.

Montrer que la fonction f est définie sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} & x \in]0; \frac{\pi}{2}] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$ est de classe C^1

↳ $x \neq 0 \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x}$

$\sin x - x = x - \frac{x^3}{6} - x + x^3 E(x) = -\frac{x^3}{6} + x^3 E(x)$

$\frac{\sin x - x}{x \sin x} = -\frac{x}{6} + x E(x)$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ et que $f'(0) = -\frac{1}{6}$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin^2(x)} \\ -\frac{1}{6} & x = 0 \end{cases}$$

Vérifier que $\lim_{x \to 0} f'(x) = -\frac{1}{6}$

f est de classe C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ $\left(x \in]0, \frac{\pi}{2}] \quad x \longmapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right.$ est de classe $\left.C^1\right)$.

$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) \sin nx \, dx = 0$

$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$

$f \in C^1 \quad \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx \, dx = 0$

On fait une intégration par partie $\quad u = f(x) \to u' = f'(x)$

$v' = \sin nx \to v = -\frac{1}{n} \cos nx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx \, dx = \left[-\frac{f(x)\cos nx}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)\cos nx}{n} dx$

$\lim_{n \to +\infty} \left[-\frac{f(x)\cos nx}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$

$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)\cos nx}{n} dx \qquad f'$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$|f'(x)| \leq M \qquad \left|\frac{f'(x)\cos nx}{n}\right| \leq \frac{M}{n}$

$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)\cos nx}{n} dx = 0$

$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} dx$

$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \sim 2x+1$

$J_n = \pi/2$

$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)dx}{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}(2n+1)}$ [illegible]

$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{x}\right)$ [illegible]

$= 0$

2) Exprimer $\int_0^{\pi} \ln(\sin x)dx$ en fonction de J

3) En déduire I (indication : on pourra passer par I + J)

2) $\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\,dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx = I = J$$

$$U = x - \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{a} \ln(\sin x)dx = \int_0^{a-\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+U\right)\right) dU = \int_0^{\frac{\pi}{2}+a} \ln(\cos x)dx$$

$$\lim_{a \to \pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin x)\,dx = I = J$$

$$\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\,dx = 2J = 2I$$

3) $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x \cdot \cos x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\,dx - \ln(2)\frac{\pi}{2}$$

$(2x = U \quad 2dx = dU)$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin U)\,dx - \ln(2)\frac{\pi}{2}$$

$$I + J = 2I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin x)dx - \ln(2)\frac{\pi}{2}$$

$$= I - \ln(2)\frac{\pi}{2}$$

$$I = -\ln(2)\frac{\pi}{2}$$

Exercice 6. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge et que $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ diverge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$

$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

$x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0.

$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ est convergente

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$I_A = \int_1^{A} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

On fait une intégration par partie $\quad U = \frac{1}{x} \longrightarrow U' = -\frac{1}{x^2}$

$V' = \sin x \longrightarrow V = -\cos x$

$$I_A = \left[\frac{-\cos x}{x}\right] - \int_1^{A} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{-\cos A}{A} = 0$$

Scanné avec CamScanner

$x \longmapsto \dfrac{(1+x)^\beta - x^\beta - 2^\beta + 1}{x^\alpha (x-1)}$ est prolongeable par continuité en 1

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{(1+x)^\beta - x^\beta - 2^\beta + 1}{x^\alpha (x-1)} & \text{si } x \in]1;2] \\ \beta 2^{\beta-1} - \beta & \text{si } x = 1 \end{cases}$$ est continue sur $[1;2]$

d'où : I est convergente.

$$\int_2^{+\infty} \frac{(1+x)^\beta - x^\beta - 2^\beta + 1}{x^\alpha (x-1)}\, dx$$

$x \longmapsto \dfrac{(1+x)^\beta - x^\beta - 2^\beta + 1}{x^\alpha (x-1)}$ est continue sur $[2;+\infty[$ (localement intégrable).

$$\begin{aligned}(1+x)^\beta - x^\beta - 2^\beta + 1 &= x^\beta\left(1+\frac{1}{x}\right)^\beta - x^\beta - 2^\beta + 1 \\ &= x^\beta\left(1+\frac{\beta}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - x^\beta - 2^\beta + 1 \\ &= \cancel{x^\beta} + \beta x^{\beta-1} + x^\beta o\left(\frac{1}{x}\right) - \cancel{x^\beta} - 2^\beta + 1\end{aligned}$$

$$h(x) = (1+x)^\beta - x^\beta - 2^\beta + 1 = \beta x^{\beta-1} + x^\beta o\left(\frac{1}{x}\right) - 2^\beta + 1$$

1 cas $\beta = 1$ $\quad h(x) = 0$

$$\int_2^{+\infty} \frac{(1+x)^\beta - x^\beta - 2^\beta + 1}{x^\alpha (x-1)}\, dx = 0$$

2 cas $\beta > 1$ $\quad h(x) \sim \beta x^{\beta-1}$

$$\frac{(1+x)^\beta - x^\beta - 2^\beta + 1}{x^\alpha (x-1)} \sim \frac{\beta x^{\beta-1}}{x^{\alpha+1}} \quad \left(\frac{\beta}{x^{\alpha-\beta+2}}\right)$$

si $\alpha - \beta + 2 > 1$ c.à.d $\alpha - \beta + 1 > 0$

J est convergente ssi $\alpha - \beta + 1 > 0$

Si $\beta < 1$ $\quad h(x) \sim -2^\beta + 1$ car $\lim\limits_{+\infty} x^{\beta-1} = 0$

$$\frac{(1+x)^\beta - x^\beta - 2^\beta + 1}{x^\alpha (x-1)} \sim \frac{-2^\beta + 1}{x^{\alpha+1}}$$

J est convergente car $\alpha + 1 > 1$ $\quad (\alpha > 0)$

Étudier la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx$

$x \longmapsto \dfrac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$ (localement intégrable sur $]0;+\infty[$)

Problème en 0. $\displaystyle\int_0^a \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx$; $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} = \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{e^{-x} - 1}{x} - \frac{e^{-2x} - 1}{x}\right) = -1 + 2 = 1$

$x \longmapsto \dfrac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$ est prolongeable par continuité en 0.

$\displaystyle\int_0^a \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx$ est convergente.

en $+\infty$: $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx$ sur $[a;+\infty[$ $\quad 0 < \dfrac{e^{-x}}{x} \leq \dfrac{e^{-x}}{a}$ $\quad \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx$ est convergente.

$0 < \dfrac{e^{-2x}}{x} \leq \dfrac{e^{-2x}}{a}$ $\quad \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x}\, dx$ est convergente.

$$\int_1^A \frac{\cos 2x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{x}\right]_1^A + \frac{1}{2}\int_1^A \frac{\sin 2x}{x^2}\,dx$$

$\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{\sin 2A}{A} = 0$ $\qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2}\,dx$ est convergente.

$\left|\frac{\sin 2x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est convergente.

Alors $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2}\,dx$ est convergente.

Par conséquent $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ est divergente.

3) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\,dx$ est divergente.

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}}\,g(x)$$

* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ est convergente

* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ est divergente

* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}}\,g(x)\,dx$ est convergente.

car : $\left|\frac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}}\,g(x)\right| \leq \frac{M}{x\sqrt{x}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{M}{x\sqrt{x}}\,dx$ est convergente.

Étudier suivant les valeurs de $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

$$I = \int_1^2 \frac{(1+x)^\beta - x^\beta - 2^\beta + 1}{x^\alpha(x-1)}\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_2^{+\infty} \frac{(1+x)^\beta - x^\beta - 2^\beta + 1}{x^\alpha(x-1)}\,dx$$

(Indication : Pour J on pourra penser à un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ à un ordre convenable)

$$\int_1^2 \frac{(1+x)^\beta - x^\beta - 2^\beta + 1}{x^\alpha(x-1)}\,dx$$

$x \longmapsto \frac{(1+x)^\beta - x^\beta - 2^\beta + 1}{x^\alpha(x-1)}$ est continue sur $]1;2]$ (localement intégrable sur $]1;2]$)

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(1+x)^\beta - x^\beta - 2^\beta + 1}{x^\alpha(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x^\alpha(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} f'(1) = \beta 2^{\beta-1} - \beta$$

$x \longmapsto f(x) = (1+x)^\beta - x^\beta$

f est dérivable sur $]1;2]$

$$f'(x) = \beta(1+x)^{\beta-1} - \beta x^{\beta-1}$$

+ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} dt \qquad \alpha > 0$ et $\beta > 0$

$t \longrightarrow \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta}$ est continue sur $]1, +\infty[$

Alors elle est localement intégrable sur $]1, +\infty[$

Étudions $\int_1^2 \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} dt$

Au voisinage de 1 $\frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} \sim \frac{1}{(t-1)^\beta}$ (≥ 0 sur $]1, 2]$)

(Au voisinage de 0 $\ln(1+t) = t + o(t)$)

$\int_1^2 \frac{1}{(t-1)^\beta} dt$ est convergente ssi $\beta < 1$

Étudions $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} dt$

$\underline{\alpha > 1}$ $\quad 1 \quad \gamma \quad \alpha$

$\lim_{t \to +\infty} t^\gamma \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} = 0$

$\left(t^\gamma \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma} (\ln(t))^\beta} \right)$

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} dt$ est convergente.

$\underline{\alpha < 1}$ $\quad \alpha \quad \gamma \quad 1$

$\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{\gamma-\alpha}}{\ln(t)^\beta} = +\infty$

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} dt$ est divergente.

$\underline{\alpha = 1}$ $\quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln(t)^\beta} dt$

$\int_2^A \frac{1}{t \ln(t)^\beta} dt = \int_2^A \frac{1}{\ln(t)^\beta} d(\ln(t))$

$$\int \frac{1}{U^\beta} dU = \int U^{-\beta} dU = \begin{cases} [\ln(\ln(t))]_2^A & \text{si } \beta = 1 \\ \frac{1}{-\beta+1} \left[\ln(t)^{-\beta+1} \right]_2^A & \text{si } \beta \neq 1 \end{cases}$$

Si $\beta = 1$ $\quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln(t)^\beta} dt$ est divergente.

Scanné avec CamScanner