①

Ex 1°

1°/ Formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \int_1^x f^{(2)}(t)(x-t)\,dt$$

Or, on a : $f'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x} + 2\ln(x)$

et $f''(x) = 2 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}$.

D'où $f(1) = 1$, $f'(1) = 5$

Donc $f(x) = 1 + 5(x-1) + \int_1^x \left(2 - \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t}\right)(t-x)\,dt$

2°/ Formule de Taylor - Lagrange :

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(c)}{2!}(x-1)^2$$

$$= 1 + 5(x-1) + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{c^2} + \frac{2}{c}\right)(x-1)^2$$

3°/ Formule de Taylor - Young :

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + (x-1)\,\varepsilon(x)$$

$$= 1 + 5(x-1) + (x-1)\,\varepsilon(x)$$

où $\lim_{x \to 1} \varepsilon(x) = 0$.

Ex 3°

On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, où $x \in [4,5]$. On a : f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]4,5[$, en particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]4,5[$. D'après la formule de Taylor-Lagrange

$$f(x) = f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(c)}{2!}(x-4)^2$$

Or, pour chaque $x \in]4,5[$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$ et $f''(x) = \frac{3}{4}x^{-5/2}$. D'où :

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}(x-4) + \frac{3}{8} \times \frac{1}{(\sqrt{c})^5}(x-4)^2$$

On en déduit que

$$\left| f(x) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16}(x-4)\right)\right| \leq \frac{3}{8} \sup_{t \in [4,5]} \frac{1}{(\sqrt{t})^5} |x-4|^2$$

$$= \frac{3}{8} \times \frac{1}{2^5} |x-4|^2$$

$$= \frac{3}{256} |x-4|^2$$

Pour $x = 5$, on obtient

$$\left|\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{7}{16}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{5}} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\right)\right| \leq \frac{3}{256}.$$

c'est-à-dire

" $\frac{7}{16}$ est une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{5}}$ à $\frac{3}{256}$ près ".

1

Ex 4° En appliquant la formule de Taylor-Lagrange pour $x \longmapsto e^x$ au voisinage de 0, on trouve que, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, il existe $\theta \in]0,1[$, tel que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} e^{\theta x}$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient

$$(1) \qquad \sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2! \times 4} + \frac{1}{3! \times 8} + \frac{1}{4! \times 16} + \frac{1}{5! \times 32} + \frac{1}{6! \times 24} e^{\theta/2}$$

D'autre part, nous avons

$$e^{\theta/2} < \sqrt{e} < 2$$

D'où

$$\frac{1}{6! \times 64} e^{\theta/2} < \frac{1}{6! \times 32}$$

Or $\frac{1}{6! \times 32} < 10^{-4}$. Donc $\frac{1}{6! \times 64} e^{\theta/2} < 10^{-4}$.

Ceci montre que la somme de 6 premiers termes dans (1) constitue une valeur approchée de $\sqrt{e}$ à 10^{-4} près.

⑤

Ex(5)

1°/ La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ en particulier, elle ~~en~~ est de classe $\mathcal{C}^n$ et la dérivée $(n+1)$ existe, D'après la formule de Taylor-Lagrange, on a, pour chaque $t>0$,

$$\ln(1+t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} t^{n+1}$$

où c entre 0 et t.

On;

$$f^{(k)}(t) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,(t+1)^{-k} \;;\; k \geq 1.$$

(Utiliser le raisonnement par récurrence pour vérifier cette formule !)

D'où :

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)! \qquad k \geq 1.$$

Ce qui nous donne

$$\ln(1+t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k + \frac{(-1)^n}{(n+1)} (1+c)^{-(n+1)} t^{n+1}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} t^k + \frac{(-1)^n}{n+1} (1+c)^{-(n+1)} t^{n+1}$$

où $c \in (0,t)$.

(5')

(2) Pour $n=3$, d'après (1), il existe $c_1 \in (0,t)$, telque

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{4}(1+c_1)^{-4}$$

Comme $\frac{1}{4}(1+c_1)^{-4} > 0$; on a l'inégalité suivante :

$$(1) \quad \ln(1+t) > t - \frac{t^2}{2} \quad t > 0.$$

D'autre part, pour $n=4$, encore une fois, d'après (1) il existe $c_2 \in (0,t)$ telque

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{(1+c_2)^{-5}}{5}$$

Puisque $c_2 > 0$, $\frac{(1+c_2)^{-5}}{5} > 0$, on obtient donc

$$(2) \quad \ln(1+t) < t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

De (1) et (2), on déduit :

$$t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}.$$

pour chaque $t \in (0,+\infty)$.

(Ex6) (a) D'après la formule de Taylor-Lagrange, on a

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(c)}{1}x \,, \quad \text{où } c \in (0, x)$$

On remarque que l'intervalle $(0,x) = \{\alpha x + (1-\alpha)\times 0 : \alpha \in]0,1[\} =$
$= \{\alpha x : \alpha \in]0,1[\}$. La constante c s'écrit
donc sous la forme $c = \theta x$; où $\theta \in]0,1[$.
C'est-à-dire, " il existe $\theta \in]0,1[$; tel que

$$f(x) = f(0) + x f'(\theta x)."$$

(b) Supposons qu'il existe deux constantes $\theta_1, \theta_2 \in]0,1[$
telles que

$$\begin{cases} f(x) = f(0) + x f'(\theta_1 x) \\ f(x) = f(0) + x f'(\theta_2 x) \,. \end{cases}$$

Donc

$$0 = x\left(f'(\theta_1 x) - f'(\theta_2 x)\right)$$

D'où :

$$f'(\theta_1 x) - f'(\theta_2 x) = 0 \,.$$

D'autre part, en utilisant le Théorème des accroissements finis ; il existe $\tilde{c}$ entre $\theta_1 x$ et $\theta_2 x$ tel que

$$f'(\theta_1 x) - f'(\theta_2 x) = (\theta_1 x - \theta_2 x) f''(\tilde{c})$$

Ce qui implique $(\theta_1 x - \theta_2 x) f''(\tilde{c}) = 0$, (équ (1))

(6')

Or, comme f est de $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \to 0} f^{(2)}(x) = f^{(2)}(0) \neq 0$, il existe un voisinage de 0 où $f^{(2)}$ ne s'annule pas.

(En effet, on a $\lim_{x \to 0} f''(x) = f''(0)$. Donc $\lim_{x \to 0} |f''(x)| = |f''(0)|$

Par définition de limite, on a :

" $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| < \eta \Rightarrow \big| |f''(x)| - |f''(0)| \big| \leq \varepsilon$ "

$$\Rightarrow |f''(0)| - \varepsilon \leq |f''(x)| \leq |f''(0)| + \varepsilon$$

On prend $\varepsilon = \frac{|f''(0)|}{2} > 0$ (car $f''(0) \neq 0$), il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall |x| < \eta ; \quad 0 < \frac{|f''(0)|}{2} < |f''(x)|.$$

Ce qui implique que f'' ne s'annule pas sur $]-\eta, \eta[$).

On revient à l'équ (1) on a :

$$\begin{cases} x(\theta_1 - \theta_2) f''(\tilde{c}) = 0 \\ x \in]-\eta, \eta[\end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$$

(car sur le voisinage de 0 $f''(\tilde{c}) \neq 0$)

On en déduit que θ est unique sur un voisinage de 0.

(6°)

(c) D'après (a), on a

$$(1) \qquad f(x) = f(0) + x f'(\theta(x)\, x)$$

où $\theta(x) \in (0,1)$, qui est unique (par (b)). Comme $f \in \mathcal{C}^2$, la formule de Taylor - Young nous donne

$$(2) \qquad f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f^{(2)}(0) + x^2 \mathcal{E}(x)$$

où $\lim\limits_{x \to 0} \mathcal{E}(x) = 0$. Retranchant (1) − (2), on obtient

$$0 = x\left(f'(\theta(x) x) - f'(0)\right) - x^2\left(\frac{f^{(2)}(0)}{2} + \mathcal{E}(x)\right)$$

équivaut à

$$\frac{f'(\theta(x)\, x) - f'(0)}{x} = \frac{f^{(2)}(0)}{2} + \mathcal{E}(x)$$

C-à-d

$$\frac{\frac{f^{(2)}(0)}{2} + \mathcal{E}(x)}{\frac{f'(\theta(x) x) - f'(0)}{x}} = 1$$

Donc

$$\theta(x) = 1 \times \theta(x)$$

$$= \frac{\frac{f^{(2)}(0)}{2} + \mathcal{E}(x)}{\frac{f'(\theta(x) x) - f'(0)}{x}} \times \theta(x)$$

$$= \frac{\frac{f''(0)}{2} + \mathcal{E}(x)}{\frac{f'(\theta(x) x) - f'(0)}{\theta(x)\, x}}$$

D'où : $\lim\limits_{x \to 0} \theta(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{f''(0)}{2} + \mathcal{E}(x)}{\frac{f'(\theta(x) x) - f'(0)}{\theta(x) x}} \overset{\text{TAF}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{f^{(2)}(0)}{2} + \mathcal{E}(x)}{f''(\tilde{c}_x)}$

(b''')

D'où

$$\lim_{x\to 0}\theta(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f''(0)}{2}+\varepsilon(x)}{\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)\,x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f''(0)}{2}+\varepsilon(x)}{f''(\tilde{c}_x)}$$ (D'après Théorème des accroissements finis $\tilde{c}_x$ entre 0 et $\theta(x)x$)

$$= \frac{f''(0)/2}{f''(0)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

L'égalité avant dernière résulte de $\lim_{x\to 0}\tilde{c}_x = 0$ car $\lim_{x\to 0}\theta(x)x = 0$ et $\tilde{c}_x \in (0, \theta(x)x)$ pour $x>0$ et $\tilde{c}_x \in (\theta(x)x, 0)$ pour $x<0$.

⑦

Ex(7)

Appliquant la formule de Taylor - Lagrange à $x \longmapsto f(x) = (1+x)^\alpha$, on obtient

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(1+\theta x)^{\alpha-2} x^2$$

pour un certain $\theta \in (0,1)$. Il suffit alors de remarquer que

$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(1+\theta x)^{\alpha-2} > 0 \text{ pour } \alpha > 0 \text{ ou } \alpha < 0$$

(Ce qui nous donne la réponse à la question (a))

et

$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(1+\theta x)^{\alpha-2} < 0 \text{ pour } 0 < \alpha < 1.$$

(Ce qui répond à la question (b)).