Université Mohammed V
Faculté des Sciences de Rabat
Département de Mathématiques

Printemps 2021

Série 2, Analyse 3 (SMIA)

Exercice 1. *On considère la fonction f définie par*

$$f(x) = x^2 + (2x+1)\ln x, \qquad x > 0.$$

Écrire les différentes formules de Taylor pour f au voisinage de 1 à l'ordre 1.

Exercice 2. *En écrivant la formule de Taylor avec reste intégral au voisinage de 0 à l'ordre n pour la fonction sinus, déduire que la suite suivante*

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

est convergente.

Exercice 3. *Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour la fonction*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad x \in [4,5],$$

et déduire que $7/16$ est une valeur approchée de $1/\sqrt{5}$ à $3/256$ près.

Exercice 4 (Exam. 2017)**.** *En appliquant la formule de Taylor-Lagrange et sachant que $\sqrt{e} < 2$, calculer une valeur approchée de $\sqrt{e}$ à 10^{-4} près.*

Exercice 5 (Exam. 2020)**.** *Soit $f(x) = \ln(1+x)$.*

(1) *Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a*

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)}{(1+x)^n}.$$

(2) *En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à f, montrer que pour tout $t > 0$ nous avons*

$$t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}.$$

(3) *Soit*

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

(a) *Montrer que*

$$|u_n - \log 2| \leq \frac{1}{n+1}.$$

(b) *En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\log 2$.*

Exercice 6. *On considère une fonction réelle $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et vérifiant $f''(0) \neq 0$.*

(a) *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *il existe* $\theta \in]0,1[$, *telle que*

$$f(x) = f(0) + xf'(\theta x).$$

(b) *Montrer que ce* θ *est unique sur un voisinage de* 0.

(c) *Calculer la limite de* θ *lorsque* x *tend vers* 0.

Exercice 7. *Pour* $x > -1, x \neq 0$, *montrer que*

(a) $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$ *si* $\alpha > 1$ *ou* $\alpha < 0$,

(b) $(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$ *si* $0 < \alpha < 1$.

Exercice 8. *Pour* $x > 0$, *établir les inégalités suivantes :*

(a) $e^x > \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$,

(b) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$,

(c) $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$.

Exercice 9. *Montrer que l'approximation*

$$\sqrt{1+x} \asymp 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

donne $\sqrt{1+x}$ *avec une erreur inférieure à* $\frac{1}{2}|x|^3$ *si* $|x| < \frac{1}{2}$.

Exercice 10 (Rattra. 2020)**.** *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$, *et soit* $f(x) = \sin(x\sin(\alpha))e^{x\cos(\alpha)}$.

(1) *Montrer que pour tout* $n \geq 0$ *on a*

$$f^{(n)}(x) = \sin(n\alpha + x\sin(\alpha))e^{x\cos(\alpha)}.$$

(2) *En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à* f, *montrer qu'il existe une constante* $c > 0$ *telle que*

$$\sin(\sin(\alpha))e^{\cos(\alpha)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k\alpha)}{k!} + \frac{\sin((n+1)\alpha + c \times \sin(\alpha))e^{c\cos(\alpha)}}{(n+1)!},$$

où $n \in \mathbb{N}$.

(3) *Soit*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k)}{k!}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(a) *Montrer qu'il existe une constante* $M > 0$ *telle que*

$$|u_n - \sin(\sin(1))e^{\cos(1)}| \leq \frac{M}{(n+1)!}, \quad (\textit{pour tout } n \in \mathbb{N}).$$

(b) *En déduire que la suite* $(u_n)_n$ *converge vers* $\sin(\sin(1))e^{\cos(1)}$.