



Feuille d'exercices-Semaines 7et 8- Analyse 3- (SMIA)

Exercice 1. Calculer les développements limités suivants au voisinage 0 à l'ordre n des fonctions suivantes.

(1) $e^x \sin x$ à l'ordre $n = 4$.

(2) $\frac{e^x}{\cos x}$ à l'ordre 3.

(3) $\sin x \cos x$ à l'ordre $n = 5$.

Correction. (1) Les développements limités de deux fonctions $\exp(x)$ et $\sin(x)$ sont donnés par

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \text{ et } \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Donc

$$\begin{aligned} \sin(x) \times e^x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)\right) \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \\ &= \left(x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6}\right) - \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6}\right) + o(x^4) \\ &= x + x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)x^4 + o(x^4) \\ &= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4). \end{aligned}$$

(2) Puisque le DL de $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{1 - u}; \quad \text{où } u = \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \\ &= 1 + u + o(x^3) \quad (\text{car } u^2 = o(x^3)) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3). \end{aligned}$$

En multipliant ce résultat par le DL de $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ on obtient

$$\frac{e^x}{\cos(x)} = e^x \times \frac{1}{\cos(x)} = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

On peut aussi obtenir le résultat en effectuant la division selon les puissances croissantes de e^x par $\cos x$.

(3) On a

$$\begin{aligned} \cos(x) \times \sin(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \times \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) + \left(-\frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{12}\right) + \frac{x^5}{24} + o(x^5) \\ &= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

□

Exercice 2. Calculer les développements limités au voisinage de 0 à l'ordre n des fonctions suivantes.

(1) $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5.

(2) $(1 + \sin x)^x$ à l'ordre 6.

(3) $\exp\left(\frac{e^x-1}{x} \arcsin x\right)$ à l'ordre 4.

Correction. (1) On a

$$(\cos(x))^{\sin(x)} = \exp(\sin(x) \ln(\cos(x))).$$

Comme $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$, on pose $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$. On a

$$\begin{aligned} \ln(\cos(x)) &= \ln(1+u) \\ &= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + o(u^5). \end{aligned}$$

Or $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$, $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^5)$ et les u^3 , u^4 , u^5 sont des $o(x^5)$. Donc

$$\begin{aligned} \ln(\cos(x)) &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) - \frac{\left(\frac{x^4}{2} + o(x^5)\right)}{2} + o(x^5) \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{5x^4}{24} + o(x^5). \end{aligned}$$

Nous avons $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$. On en déduit

$$\sin(x) \times \ln(\cos(x)) = -\frac{x^3}{2} + \left(\frac{1}{12} - \frac{5}{24}\right)x^5 + o(x^5) = -\frac{x^3}{2} - \frac{3}{24}x^5 + o(x^5).$$

On pose $v = -\frac{x^3}{2} - \frac{3}{24}x^5 + o(x^5)$. Puisque $v^2 = o(x^5)$, on a

$$e^v = 1 + v + o(x^5).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} (\cos(x))^{\sin(x)} &= \exp(\sin(x) \ln(\cos(x))) \\ &= \exp(v) \\ &= 1 + v + o(x^5) \\ &= 1 - \frac{x^3}{2} - \frac{3}{24}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

(2) On écrit

$$(1 + \sin(x))^x = \exp(x \ln(1 + \sin(x))).$$

On commence par développer $\ln(1 + \sin(x))$ à l'ordre 4. Pour $u = \sin(x)$, on a

$$(1) \quad \ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 + o(u^5).$$

Or,

$$\begin{aligned} u &= \sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) \\ u^2 &= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5) \\ u^3 &= x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^5) \\ u^4 &= x^4 + o(x^5) \\ u^5 &= x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation (1), on obtient

$$\ln(1 + \sin(x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} + o(x^5).$$

On pose $y = x(\ln(1 + \sin(x))) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^6}{24} + o(x^6)$. On a

$$\begin{aligned} y &= x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{12}x^5 + \frac{1}{24}x^6 + o(x^6) \\ y^2 &= x^4 - x^5 + \frac{7}{12}x^6 + o(x^6) \\ y^3 &= x^6 + o(x^6), \end{aligned}$$

Donc il suffit de développer $\exp(y)$ à l'ordre 3. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} (1 + \sin(x))^x &= \exp(y) \\ &= 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{6}y^3 + o(y^3) \\ &= 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{7}{12}x^5 + \frac{1}{2}x^6 + o(x^6). \end{aligned}$$

- (3) Pour développer $\exp\left(\frac{e^x-1}{x} \arcsin x\right)$ à l'ordre 4, il faut développer $\frac{e^x-1}{x} \arcsin x$ à l'ordre 4. Puisque $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, il suffit de développer $\frac{e^x-1}{x}$ à l'ordre 3 (car $xo(x^3) = o(x^4)$). Pour cela, et puisqu'on divise $e^x - 1$ par x , il faut développer $e^x - 1$ à l'ordre 4. On a

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

Donc

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3).$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 1}{x} \arcsin x &= \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)\right) \times \left(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) = u. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} u &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) \\ u^2 &= x^2 + x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4) \\ u^3 &= x^3 + \frac{3}{2}x^4 + o(x^4) \\ u^4 &= x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

On obtient finalement,

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{e^x - 1}{x} \arcsin x\right) = e^u &= 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 + o(u^4) \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{7}{8}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

□

Exercice 3. Donner le développement limité de $\tan x$ au voisinage de 0 à l'ordre $n = 5$, en utilisant le fait que la dérivée de $\tan x$ est égale à $1 + \tan^2 x$.

Correction. Comme la fonction tangente est impaire, nous savons que son développement d'ordre 5 est de la forme $\tan x = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$, où a, b et c sont des réels à déterminer. D'une part

$$\tan' x = a + 3bx^2 + 5cx^4.$$

D'autre part

$$\tan' x = 1 + \tan^2(x) = 1 + (ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5))^2 = 1 + a^2x^2 + 2abx^4 + o(x^4).$$

Par unicité du développement limité, on doit avoir

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ 3b &= a^2 \\ 5c &= 2ab. \end{aligned}$$

On obtient donc $a = 1, b = 1/3, c = 2/15$ et

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

□

Exercice 4. Calculer les développements limités au voisinage 0 et à l'ordre n des fonctions suivantes.

- (1) $\frac{x}{\sin x}$ à l'ordre 5.
- (2) $\frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x(1+x)}}$ à l'ordre 4.
- (3) $\frac{(\arcsin x)^2}{\arctan x}$ à l'ordre 5.

Correction. (1) Puisque $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$, on a

$$\frac{x}{\sin(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{4}{120} + o(x^4)} = \frac{1}{1 - u}$$

avec $u = \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + o(x^4)$. Il suffit donc de développer $\frac{1}{1-u}$ à l'ordre 2, (puisque $u^3 = o(x^4)$).
Ce qui donne

$$\frac{x}{\sin(x)} = \frac{1}{1 - u} = 1 + u + u^2 + o(x^5) = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + o(x^5).$$

- (2) On peut écrire $\frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x(1+x)}}$ sous la forme

$$\frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

Un développement à l'ordre 8 de la fonction $g(y) = \frac{\arcsin y}{y}$ au voisinage de 0, donnera un développement à l'ordre 4 au voisinage de 0 par valeurs supérieures de la fonction $\frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. On a

$$\frac{\arcsin y}{y} = 1 + \frac{1}{6}y^2 + \frac{3}{40}y^4 + \frac{5}{112}y^6 + \frac{35}{1152}y^8 + o(y^8).$$

Pour $x > 0$, on obtient

$$\frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3 + \frac{35}{1152}x^4 + o(x^4).$$

D'autre part :

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + o(x^4).$$

En effectuant le produit des deux polynômes jusqu'à l'ordre 4, nous obtenons le DL pour suivant, $x > 0$,

$$\frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x(1+x)}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{11}{30}x^2 - \frac{17}{70}x^3 + \frac{649}{2520}x^4 + o(x^4).$$

- (3) Posons pour tout x non nul

$$\phi(x) = \frac{\arcsin x}{x} \quad \psi(x) = \frac{\arctan x}{x},$$

d'où

$$\frac{(\arcsin x)^2}{\arctan x} = x \frac{\phi(x)^2}{\psi(x)} = f(x).$$

Déterminons le DL de f d'ordre 5 au voisinage de 0; pour cela il suffit de déterminer le $DL_4(0)$ de $\frac{\phi(x)^2}{\psi(x)}$. Et donc de déterminer le $DL_4(0)$ des fonctions ϕ et ψ . On a

$$\phi(x) = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + o(x^5).$$

D'où

$$\phi(x)^2 = 1 + 2\left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4\right) + \frac{1}{36}x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{45}x^4 + o(x^4).$$

D'autre part

$$\psi(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + o(x^4) + o(x^4).$$

D'où

$$(\psi(x))^{-1} = 1 + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{5}x^4\right) + \frac{1}{9}x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{45}x^4 + o(x^4).$$

Effectuons le produit, on obtient

$$\frac{(\arcsin x)^2}{\arctan x} = x + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{45}x^5 + o(x^5)$$

□

Exercice 5. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage 0 de

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right),$$

de trois façons,

- (1) par la formule de Taylor-Young,
- (2) par composition de développements limités,
- (3) en commençant par calculer le développement limité de f' .

Correction. (1) Pour utiliser la formule de Taylor-Young on doit d'abord calculer les dérivées de f jusqu'à l'ordre 3 en 0. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x+2}\right)^2} \times \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} & f'(0) &= \frac{1}{2} \\ f''(x) &= -2\frac{x+1}{(x^2 + 2x + 2)^2} & f''(0) &= -\frac{1}{2} \\ f'''(x) &= 2\frac{3x^2 + 6x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^3} & f'''(0) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d'où le développement limité est donné comme suit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3).$$

- (2) Le développement limité de la fonction arctan au voisinage de 0 d'ordre 3 est donné par :

$$\arctan(u) = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$

On pose $u = \frac{x}{x+2} = \frac{x}{2} \frac{1}{1+x/2}$. On a

$$u = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + o(x^3).$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}\arctan(u) &= u - \frac{u^3}{3} + o(u^3) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3).\end{aligned}$$

(3) On a $f'(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$ et le développement limité de f' au point 0 à l'ordre 2 peut être calculé par la division selon les puissances croissantes. On obtient

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{-1-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} & \frac{2+2x+x^2}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2} \\ \hline \frac{-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x+x^2+o(x^2)} & \\ \hline \frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{\frac{-1}{2}x^2+o(x^2)} & \\ \hline & o(x^2) \end{array}$$

ainsi

$$\begin{aligned}f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 \right) dt + o(x^3) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3).\end{aligned}$$

□

Exercice 6. On suppose qu'il existe une fonction, f , de classe C^2 au voisinage de 0 telle que

$$x(f(x) - 2) + e^{f(x)-1} - 1 = 0.$$

Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au point 0.

Correction. On désigne par (E) l'hypothèse vérifiée par f , pour $x = 0$, on obtient

$$(2) \quad e^{f(0)-1} = 1, \quad \text{d'où} \quad f(0) = 1$$

Effectuant une dérivation par rapport à x sur (E) , on trouve

$$(f(x) - 2) + xf'(x) + f'(x)e^{f(x)-1} = 0.$$

Il résulte pour $x = 0$ que

$$(f(0) - 2) + f'(0)e^{f(0)-1} = 0,$$

en vertu de (2), $f'(0) = 2 - f(0) = 1$.

Effectuons, encore une fois, une dérivation seconde sur (E) , on obtient

$$2f'(x) + xf''(x) + (f''(x) + (f'(x))^2)e^{f(x)-1} = 0$$

pour $x = 0$, on trouve

$$2f'(0) + f''(0) + (f'(0))^2 = 0$$

d'où

$$\begin{aligned}f''(0) &= -2f'(0) - (f'(0))^2 \\ &= -2 - 1 \\ &= -3.\end{aligned}$$

Le développement limité de f est donné donc par

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2).$$

□