Université Mohammed V
Faculté des Sciences de Rabat
Département de Mathématiques

Printemps 2021

Série 3, Analyse 3 (SMIA)

Exercice 1. (1) *Soit f une fonction qui admet un DL au voisinage de 0 à l'ordre 1 ($f(x) = a_0 + a_1 x + x\varepsilon(x)$, avec $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0). Montrer que f est continue et dérivable en 0.*

(2) *Les fonctions suivantes admettent-elles des développements limités d'ordre 1 au voisinage de 0 ?*

$$f(x) = \ln(x), \qquad g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \textit{et} \qquad h(x) = \sin\left(\sqrt{|x|}\right).$$

(3) *Montrer que $f(x) = x^3 sin(1/x)$ admet un DL à l'ordre 2 et que f n'est pas deux fois dérivable en 0.*

Exercice 2. *Calculer les développements limités d'ordre n au voisinage de 0 des fonctions suivantes:*

(a) $f(x) = \cos(x^2) + \sin(x)$, $n = 5$.

(b) $f(x) = \log(1 + x^3)$, $n = 9$.

(c) $f(x) = \sqrt{1+x}\ e^{2x}$, $n = 3$.

(d) $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$, $n = 6$.

(e) $f(x) = \tan(x)$, $n = 5$.

Exercice 3. *Déterminer le développement limité à l'ordre n, au voisinage de x_0, des fonctions suivantes:*

(a) $f(x) = \cos x$, $n = 5$ *et* $x_0 = \pi/3$.

(b) $f(x) = \sqrt{x}$, $n = 3$ *et* $x_0 = 4$.

(c) $f(x) = \ln(x)$, $n = 3$ *et* $x_0 = 2$.

Exercice 4 (Produit et inverse)**.** *Calculer les développements limités suivants au point 0.*

(1) $\frac{x}{\sin x}$ *à l'ordre* 7.

(2) $\frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x(1+x)}}$ *à l'ordre* 4.

(3) $\frac{(\arcsin x)^2}{\arctan x}$ *à l'ordre* 5.

Exercice 5 (Composition)**.** *Calculer les développements limités suivants au point 0.*

(1) $(\cos x)^{\sin x}$ *à l'ordre* 5.

(2) $(1 + \sin x)^x$ *à l'ordre* 6.

(3) $\exp\left(\frac{e^x-1}{x}\arcsin x\right)$ *à l'ordre* 4.

Exercice 6 (Intégration et composition)**.** *Calculer le développement limité à l'ordre* 3 *au point* 0 *de*

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right),$$

de trois façons

(1) *par la formule de Taylor-Young*

(2) *par composition de développements limités*

(3) *en commençant par calculer le développement limité de f'.*

Exercice 7. *Calculer les limites suivantes*

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x-\sin(x)\right)}{\sqrt{1+x^3}-1} \qquad 2.\ \lim_{x\to 0}\left(e^x-x\right)^{1/x^2} \qquad 3.\ \lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln\left(1+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

Exercice 8. *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x) = \frac{1}{e^x+1}.$$

(1) *Donner un développement limité de f à l'ordre* 3 *en* 0*.*
(2) *En déduire que la courbe représentative de f admet une tangente au point* 0*.*
(3) *que peut-on dire à propos de ce point?*

Exercice 9. (1) *Écrire le développement limité généralisé de* $\cos\left(\frac{1}{2x}\right)$ *en* $+\infty$ *à l'ordre* 3*.*

(2) *Écrire le développement limité généralisé de* $\sqrt{2+\frac{1}{x}}$ *en* $+\infty$ *à l'ordre* 3*.*

(3) *En déduire le développement limité généralisé de* $f(x) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2x}\right)}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}$ *en* $+\infty$ *à l'ordre* 3*.*

(4) *Écrire l'équation de l'asymptote de f en* $+\infty$