

Formule de Taylor, développements limités, applications

1 Rappel de cours

1.1 Formule de Taylor

Si une fonction $f(x)$ est définie et continue sur $[a, b]$, ainsi que ses n premières dérivées, et si elle admet dans l'intervalle $]a, b[$ une dérivée d'ordre $n + 1$, alors il existe une valeur $c \in]a, b[$ pour laquelle

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b - a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(c). \quad (1)$$

Cette égalité peut encore s'écrire avec $h = b - a$

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(a + \theta h), \quad (2)$$

avec $0 < \theta < 1$.

Rappel : $n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n$ avec n un nombre entier.

1.2 Formule de Maclaurin

Dans le cas particulier où $0 \in [a, b]$, on a pour tout $x \in]a, b[$

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(\theta x). \quad (3)$$

Cette formule est un cas particulier de la formule de Taylor dans laquelle on prend $a = 0$ et $b = x$.

1.3 Développements limités

1.3.1 Notion sur les développements limités

Une fonction $f(x)$ définie au voisinage de $x = x_0$ admet un développement limité d'ordre n , si il existe un polynôme de degré n

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n, \quad (4)$$

tel que

$$f(x) = P_n(x) + \epsilon.(x - x_0)^n, \quad (5)$$

où ϵ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 .

$P_n(x)$ est la partie régulière du développement limité et $\epsilon.(x - x_0)^n$ est le terme complémentaire ou reste, qu'on peut noter $o(x - x_0)^n$. En posant $X = x - x_0$, lorsque x tend vers x_0 alors X tend vers 0. On peut donc se ramener très facilement à un développement limité au voisinage de 0. Aussi nous limiterons-nous par la suite aux développements limités au voisinage de 0 sauf indications contraires.

1.3.2 Propriétés des développements limités

1. Unicité

Une fonction ne peut admettre qu'un seul développement limité d'ordre n donné.

2. Somme

Si $f(x)$ et $g(x)$ admettent des développements limités d'ordre n , $f(x)+g(x)$ admet un développement limité dont la partie régulière est la somme des parties régulières des développements limités de $f(x)$ et $g(x)$.

3. Produit

La partie régulière du développement limité d'ordre n de $f(x).g(x)$ se compose des termes de degré au plus égal à n du produit des parties régulières des développements limités de $f(x)$ et $g(x)$.

4. Quotient

La partie régulière du développement limité d'ordre n de $f(x)/g(x)$ s'obtient en divisant suivant les puissances croissantes la partie régulière du développement limité de $f(x)$ par celle de $g(x)$ jusqu'à l'ordre n .

1.3.3 Formulation théorique d'un développement limité

La formule de Maclaurin relative à une fonction $f(x)$ satisfaisant aux conditions de Taylor dans un intervalle contenant 0 donne le développement limité d'ordre n de $f(x)$ au voisinage de 0.

1.3.4 Développements limités de quelques fonctions usuelles

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

1.4 Applications à la recherche des limites

Les développements limités permettent de remplacer une fonction par une fonction polynôme plus simple et de lever une possible indétermination. D'une façon générale, une fonction $f(x)$, quand $x \rightarrow 0$ est équivalente au premier terme non nul de son éventuel développement limité au voisinage de 0.

1.4.1 Infiniment petit

On dit que $f(x)$ est un infiniment petit au voisinage de x_0 si $f(x)$ tend vers 0 lorsque $x \rightarrow x_0$.

Exemple : x^2 , $\sin x$, $1 - \cos x$ avec $x_0 = 0$.

1.4.2 Infiniment grand

On dit que $f(x)$ est un infiniment grand au voisinage de x_0 si $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ lorsque $x \rightarrow x_0$.

Exemple : $1/x$, $(\cos x - 1)/x^3$ avec $x_0 = 0$.

2 Exercices

1. Quel est le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 7 de

$$y = (\cos x - 1)(\sinh x - x) - (\cosh x - 1)(\sin x - x)$$

2. Quel est le développement limité au voisinage de 1 à l'ordre 4 de

$$y = \frac{\ln x}{x^2}$$

3. Quelle est la limite lorsque x tend vers l'infini de

$$y = \frac{\exp(1/x) - \cos(1/x)}{1 - \sqrt{1 - 1/x^2}}$$

4. Déterminer la limite pour $x \rightarrow \infty$ de

$$y = \left[\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \right]^{x \ln x}$$

5. Calculer le développement limité à l'ordre 6 de $y = \tan x$.
6. Calculer le développement limité à l'ordre 6 de $y = \tanh x$.
7. Calculer la limite de $y = \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$ lorsque $x \rightarrow 0$.