CHAPITRE 3

POTENTIEL ELECTROSTATIQUE

- Champ électrostatique = champ de vecteurs
- Potentiel électrostatique = champ de scalaires

➔ La fonction potentiel présente un double intérêt:

★ calcul du champ électrostatique.

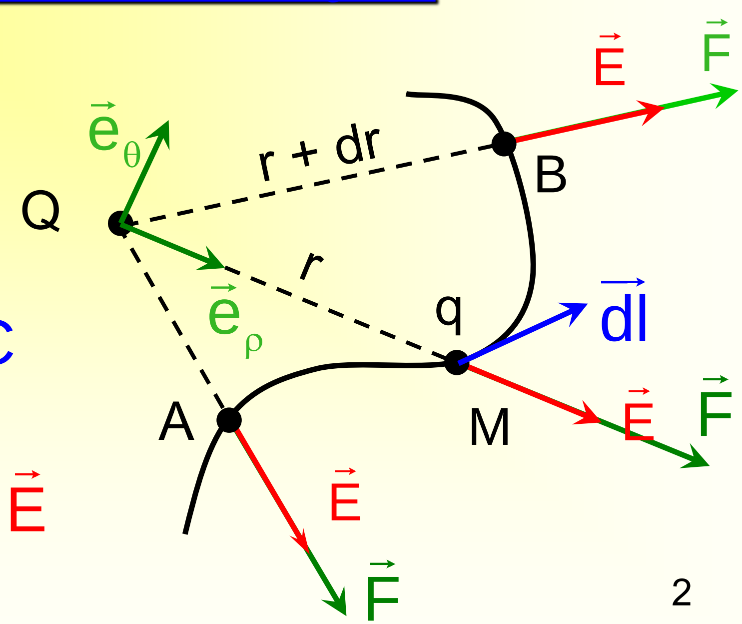
★ elle est directement liée à l'énergie potentielle électrique d'une charge placée dans un champ électrostatique.

I- CIRCULATION DU CHAMP ELECTROSTATIQUE

Travail de $\vec{F}$ entre A et B:

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

$$W_{AB} = \int_A^B q\vec{E} \cdot \vec{dl} \quad \text{soit} \quad W_{AB} = q\int_A^B dC$$



dC est la circulation élémentaire de $\vec{E}$ le long de la courbe AB

★ **Calcul de dC:**

$dC = \vec{E}\cdot\vec{dl} = E\cdot dr$ car $\vec{dl} = dr\cdot\vec{e}_\rho + rd\theta\cdot\vec{e}_\theta$ et $\vec{E} = E\cdot\vec{e}_\rho$

soit $dC = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dr}{r^2}$ que l'on peut écrire sous la forme:

$dC = -d\left[\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} + V_0\right]$ V_0 étant une constante.

d'où $\boxed{dC = -dV(M)}$ avec $\boxed{V(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r} + V_0}$

➔ La circulation élémentaire du champ électrostatique $\vec{E}$ d'une charge ponctuelle est la différentielle totale d'une fonction V(M) appelée potentiel électrostatique de la charge Q au point M.

➔ Remarques

★ En intégrant dC entre A et B, on obtient:

$$C_A^B = \int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right) \Rightarrow \boxed{\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = V(A)-V(B)}$$

$\rightarrow$ La circulation de $\vec{E}$ est **indépendante du trajet suivi entre A et B**. Elle ne dépend que des positions A et B.

$\rightarrow$ $V(A) - V(B)$ est la "différence de potentiel entre A et B".

★ Si A est confondu avec B, on trouve:

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{dl} = 0$$

$\rightarrow$ La circulation de $\vec{E}$ le long d'une courbe fermée est nulle.

$\rightarrow$ Le champ $\vec{E}$ est à circulation conservative.

$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{E}$ est un **champ de gradients**.

★ $W_{AB} = q\int_A^B dC = q\left[V(A) - V(B)\right]$

$\rightarrow$ Le travail que doit fournir un opérateur pour déplacer une charge q dans un champ électrostatique entre 2 points A et B est conservatif.

$\Leftrightarrow \quad W_{AB} = E_e(A) - E_e(B)$

avec $E_e(M) = q\,V(M)$ énergie potentielle électrique de la charge q

★ V(M) est défini à une constante près.

$\rightarrow$ S'il n'y a pas de charges à l'infini, alors $V(\infty) = 0$ et $V_0 = 0$

$\rightarrow$ V(0) n'est pas défini.

★ Unité : Volt (V)

→ **Définition:**

Le volt est la ddp entre 2 points tels que pour un déplacement d'une charge de 1 coulomb d'un point à un autre, le travail de la force électrostatique est de 1 joule.

$$W_{AB} = q\,[V(A) - V(B)]$$

1J 1C 1V

★ Seule la ddp entre 2 points est mesurable et a un sens physique.

★ Le potentiel de la Terre est la référence des potentiels:

$$\boxed{V_{Terre} = 0}$$

II- RELATION ENTRE LE CHAMP ET LE POTENTIEL

$$dC = -dV(M) = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}dy - \frac{\partial V}{\partial z}dz = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

avec $\vec{E}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{dl}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(M)}$

★ $\vec{E}(M)$ "dérive" du potentiel V(M)

★ $\vec{E}(M)$ est **toujours dirigé vers les** potentiels décroissants

★ $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E}(M) = \vec{0}$

★ $\text{div}\, \vec{E}(M) = \dfrac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta V(M) = -\dfrac{\rho(M)}{\varepsilon_0}}$ équation de Poisson

III- APPLICATIONS

1- Potentiel créé par un ensemble de charges ponctuelles

$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ créent en un point M de l'espace les champs

$\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \ldots, \vec{E}_n$ donc $\vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_i(M)$ et $dC = \sum_i dC_i$

d'où

$$\boxed{V(M) = \sum_i V_i(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}}$$

2- Potentiel créé par une distribution continue de charges

★ Volume V chargé avec une densité ρ:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P) \cdot dv}{r}$$

P point de la distribution, M point de l'espace avec PM = r.

★ Surface S chargée avec une densité σ:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P) \cdot ds}{r}$$

★ Ligne L chargée avec une densité λ:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{\lambda(P) \cdot dl}{r}$$

IV- DIAGRAMME ELECTRIQUE

1- Surface équipotentielle

C'est une surface (S) telle qu'en tous ses points le potentiel est le même: $V(M) = C^{\underline{te}}$, $\forall\, M \in (S)$.

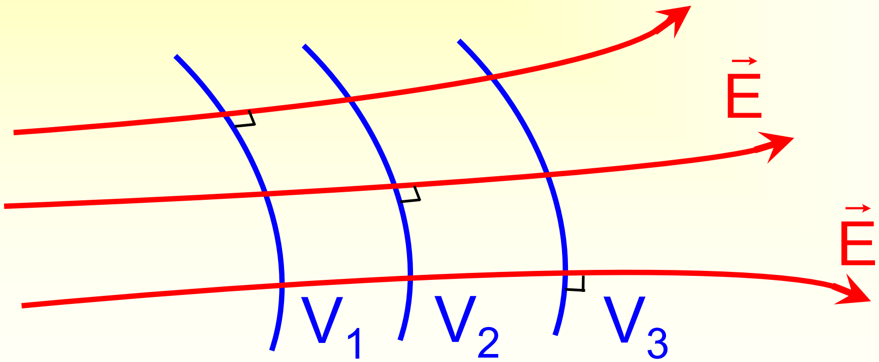
2- Ligne de champ

C'est une courbe (C) tangente en tous ses points au champ électrostatique $\vec{E}$.

➔ les lignes de champ sont des trajectoires orthogonales aux surfaces équipotentielles.

➔ $\vec{E}$ est dirigé vers les potentiels décroissants:

$V_1 > V_2 > V_3$



➔ Une ligne de champ électrostatique ne peut pas être une courbe fermée .

➔ Si $\vec{E}$ est uniforme alors :

→ les lignes de champ sont des droites parallèles.

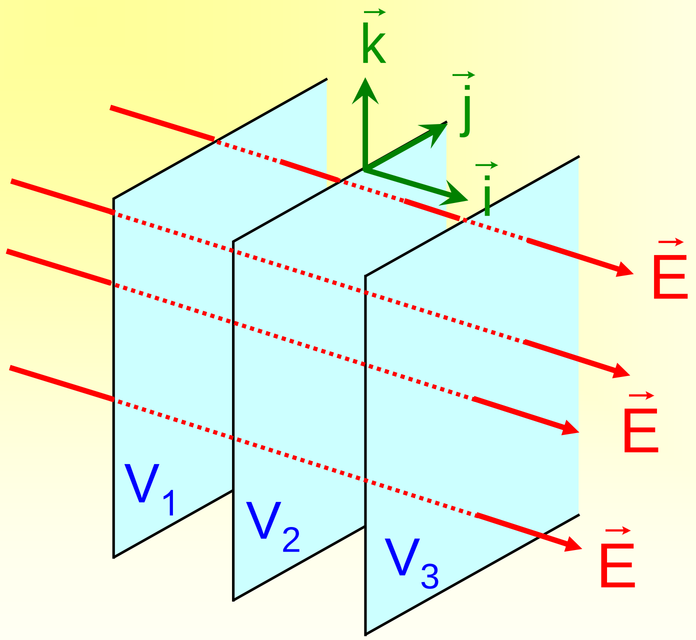
→ les équipotentielles sont des plans parallèles.

★ exemple:

$$\vec{E} = E\ \vec{i}$$

$$\Rightarrow \quad E = -\frac{dV}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad V = -E\,x + C^{te}$$



3- Diagramme électrique

L'ensemble des lignes de champ et des surfaces équipotentielles forment le diagramme électrique d'une distribution de charges.

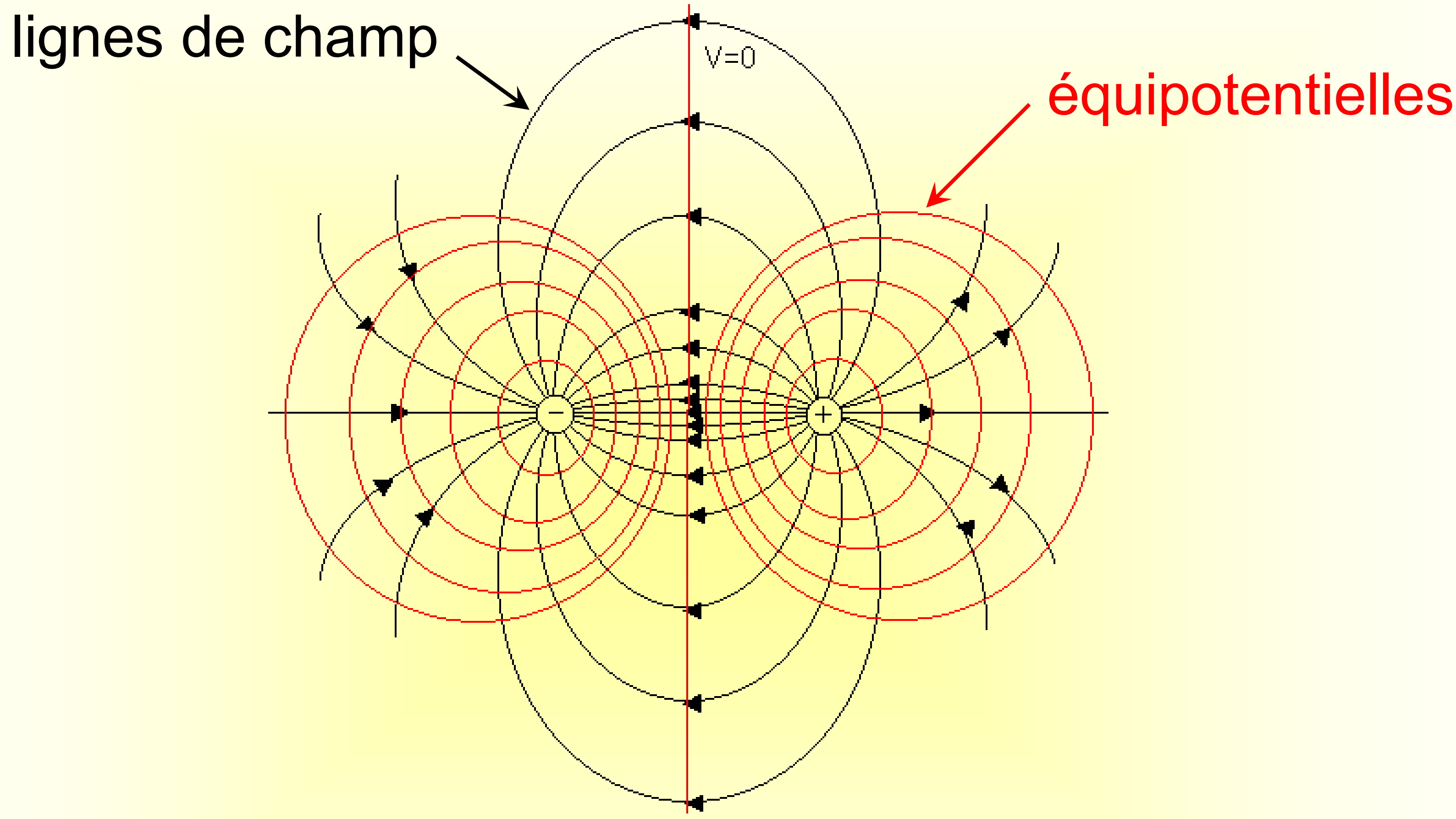
➔ Dipôle électrostatique:

★ Equation des lignes de champ:

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} \quad \Rightarrow \quad r = k_0 \sin^2\theta$$

★ Equation des équipotentielles:

$$V(M) = C^{te} \quad \Rightarrow \quad r = k_1 \sqrt{|\cos\theta|}$$



<u>Diagramme électrique d'un dipôle électrostatique</u>

4- Continuité du potentiel

➔ **Charge ponctuelle:**

Le potentiel est continu dans tout l'espace sauf sur la charge elle-même (point singulier).

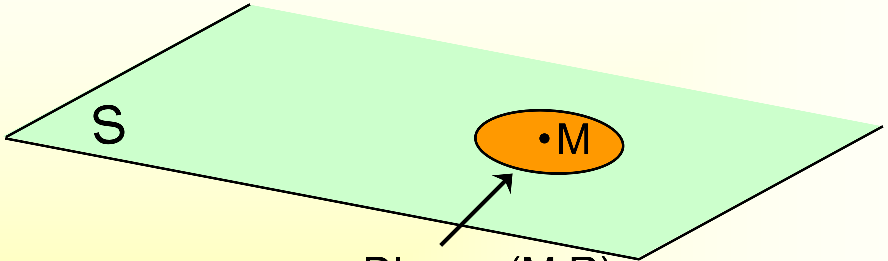
➔ **Distribution volumique:**

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(P)\, dv}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_r 4\pi\rho r\, dr$$

Si $r \longrightarrow 0$, alors $V(M) \longrightarrow 0$

Le potentiel est donc continu dans tout l'espace.

➔ Distribution surfacique:



$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\iint_{disque}\frac{\sigma\, ds}{r} + \iint_{S-disque}\frac{\sigma\, ds}{r}\right]$$

$$V(M) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R 2\pi\sigma\, dr}_{\to \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \text{ si } r\to 0} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S-disque}\frac{\sigma\, ds}{r}}_{r\neq 0 \;\Rightarrow\; \text{intégrale toujours définie}}$$

V(M) partout défini $\Rightarrow$ V(M) continu dans tout l'espace.

➔ Distribution linéique:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda\, dl}{r} \qquad \Rightarrow \qquad V(M) \text{ non défini pour } r = 0$$

5- Théorème sur les extrêmums de potentiel

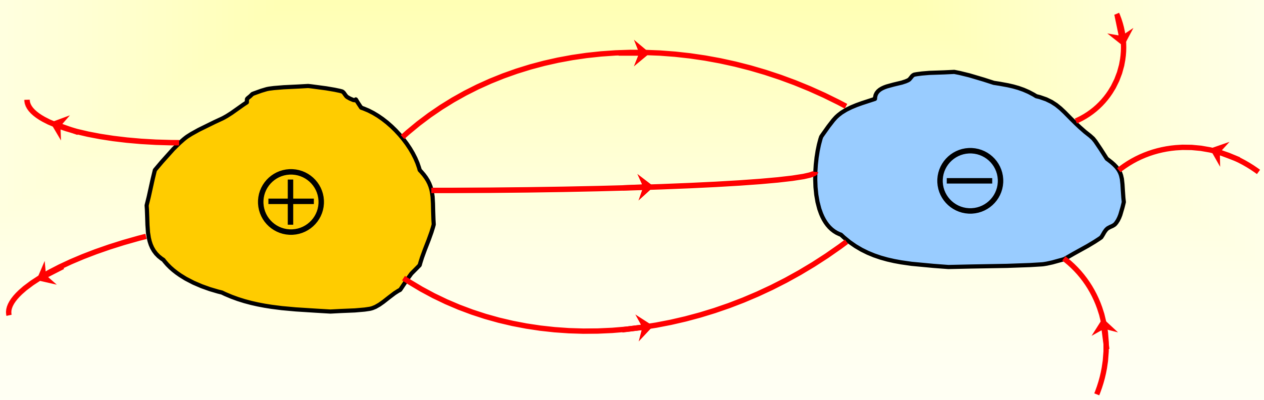
➔ Dans une région où il n'existe pas de charges, le potentiel ne présente ni maximum ni minimum.

★ Charge (+) en un point M $\Rightarrow$ V(M) maximum

$\rightarrow$ une ligne de champ ne peut partir que d'un point où il y a une charge positive.

★ Charge (–) en un point M $\Rightarrow$ V(M) minimum

$\rightarrow$ une ligne de champ s'arrête là où il y a une charge négative.

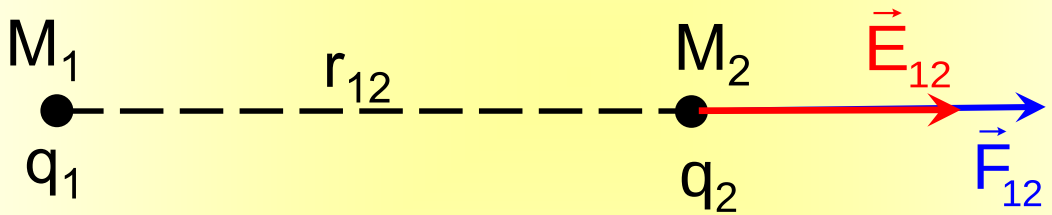


V- ENERGIE POTENTIELLE ELECTROSTATIQUE

1- Définition

➔ L'énergie potentielle électrostatique E_e d'un système de charges q_i est l'énergie qu'il faut fournir pour amener ces charges de l'infini jusqu'aux positions M_i qu'elles occupent.

2- Système de 2 charges ponctuelles



→ pour amener q_1 en M_1 l'opérateur ne fournit aucun travail.

→ pour amener q_2 en M_2 il faut fournir le travail:

$$dW_{\infty M_2} = -dW(\vec{F}_{12}) = q_2 dV$$

car $\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_{12}$ $\Rightarrow$ $dW(\vec{F}_{12}) = q_2\ \vec{E}_{12} \cdot \vec{dl} = -q_2 dV$

$\rightarrow$ L'énergie potentielle de la charge q_2 dans le champ électrostatique de q_1 est alors:

$$E_e = W_{\infty M_2} = \int_{\infty}^{M_2} q_2 dV = q_2 V(M_2)$$

avec $V(M_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}} =$ potentiel créé en M_2 par q_1

➔ Une charge q placée en un point M où existe un potentiel V(M) aura une énergie potentielle électrostatique égale à:

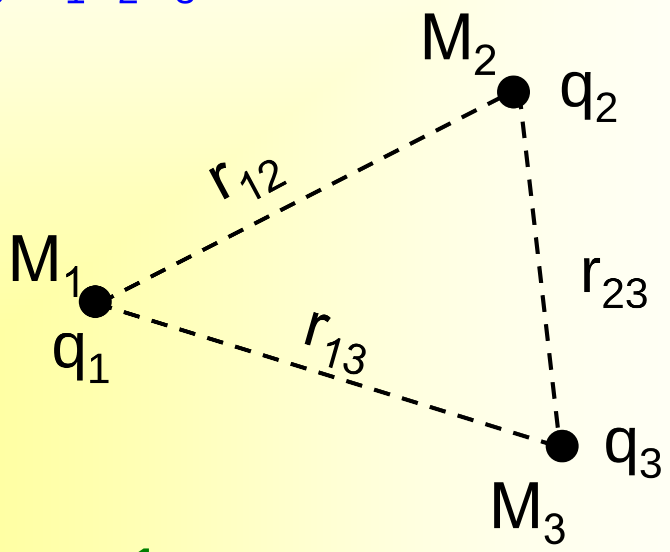
$$\boxed{E_e(M) = qV(M)}$$

➔ L'énergie potentielle électrostatique d'un système de 2 charges ponctuelles q_1 et q_2 est:

$$\boxed{E_e(q_1 q_2) = q_2 V(M_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}}$$

3- Système de n charges ponctuelles

★ $E_e(\text{système}) = E_e(q_1) + E_e(q_1 q_2) + E_e(q_1 q_2 q_3)$



$\rightarrow \quad E_e(q_1) = 0$

$\rightarrow \quad E_e(q_1 q_2) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q_1 q_2}{r_{12}}$

$\rightarrow \quad E_e(q_1 q_2 q_3) = q_3 V(M_3) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q_1 q_3}{r_{13}} + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q_2 q_3}{r_{23}}$

D'où:

$$\boxed{E_e(\text{système}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right]}$$

➔ Généralisation:

★ Système de n charges ponctuelles

$$E_e = \frac{1}{2}\sum_{i}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

→ Soit V_i le potentiel créé en M_i par toutes les charges sauf q_i:

$$V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{q_j}{r_{ij}}$$

L'énergie potentielle électrostatique E_e s'écrit alors:

$$\boxed{E_e = \frac{1}{2}\sum_{i} q_i V_i}$$

★ Distribution continue de charges:

→ distribution volumique:

$$E_e = \frac{1}{2}\iiint_V \rho(P)\, V(P)\, dv \qquad P \in V$$

V(P) est le potentiel total créé par toutes les charges au point P.

→ distribution surfacique:

$$E_e = \frac{1}{2}\iint_S \sigma(P)\, V(P)\, ds$$

→ distribution linéique:

$$E_e = \frac{1}{2}\int_L \lambda(P)\, V(P)\, dl$$

Exercice d'application

1. Le plan infini uniformément chargé

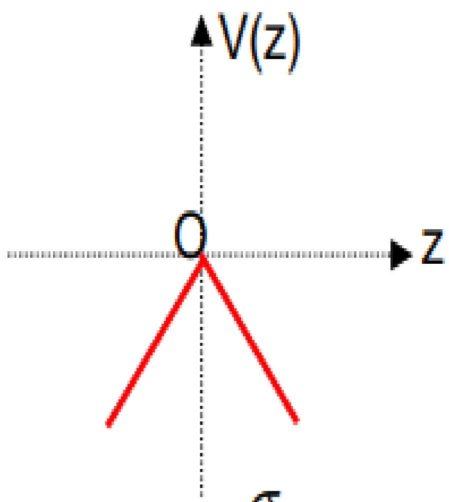
Le théorème de Gauss nous donne : $\vec{E}(z>0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$ et $\vec{E}(z<0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$

Le potentiel *V(M)* : $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\,V(M)$

$E_z = -\frac{dV}{dz}$ pour z > 0 $\Rightarrow$ $V(z) = -\int E_z(z)dz = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z + C$

Le potentiel est nul dans le plan (*xOy*) : $V(0)=0 \Rightarrow V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z$

$$\begin{cases} \underline{z>0} \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \ ; \ V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z \\ \underline{z<0} \Rightarrow E(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \ ; \ V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z \end{cases}$$



Ces deux résultats peuvent être **condensés** sous la forme : $E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}$ $z \neq 0$; $V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|z|$

2. Sphère uniformément chargée en volume (Symétrie sphérique)

On considère une boule de centre O et de rayon R uniformément chargée en volume, charge volumique ρ, soit une charge totale $Q =$.

→ Étude des symétries et invariances ; surface de Gauss :

Les symétries et invariances sont identiques à celles de la charge ponctuelle, par conséquent :

$$\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r$$

et on retient comme surface de Gauss une sphère de rayon r centrée sur l'origine

→ Application du théorème de Gauss :

$$\Phi_\Sigma = E_r(r) \times 4\pi r^2$$

Il reste à déterminer la charge contenue dans la sphère de rayon r ; deux cas se présentent :

⋆ Pour $r > R$, $Q_{int} = Q = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$; l'application du théorème de Gauss conduit à :

$$\vec{E}_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

Tout se passe comme si toute la charge étant concentrée au centre !

⋆ Pour $r < R$, $Q_{int} = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3$; l'application du théorème de Gauss conduit à :

$$\vec{E}_{int} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{u}_r$$

On constate que le champ est continu en $r = R$. Ceci est toujours vrai dans le cas d'une distribution volumique de charge.

→ <u>Potentiel électrostatique</u> :

⋆ Pour $r > R$: (avec le choix d'un potentiel nul à l'infini)

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\forall\, r > R,\ \ V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

⋆ Pour $r < R$: (avec la continuité du potentiel en $r = R$)

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \forall\, r \in [0, R],\ \ V(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right)$$