Chapitre I *

Le Champ Électrostatique

I - Notions générales

1. Phénomènes électrostatiques : notion de charge électrique

Les phénomènes électrostatique ont été rapportés par Thalès de Milet vers 600 av. J.- C. Il avait observé l'attraction de brindilles de paille par de l'ambre jaune frotté. Le mot électricité, qui désigne l'ensemble de ces manifestations, provient de 'elektron', qui signifie ambre en grec.

Au XIX^{ème} siècle, s'est élaborée la théorie unifiée des phénomènes électriques et magnétiques, appelée électromagnétisme. Des expériences simples d'électrisation par frottement ou contact, d'attraction et de répulsion de corps chargés on déduit :

- ⊙ *Deux corps portant une électricité de même nature (soit positive, soit négative) se repoussent, tandis qu'ils s'attirent s'ils portent des électricités de natures opposées.*
- ⊙ *Cette électricité est capable, non seulement d'agir à distance (répulsion ou attraction), mais également de se déplacer d'un corps à un autre.*
- ⊙ *Aux erreurs de l'expérience près et à la limite de précision des balances actuelles l'électrisation ne modifie pas le poids des corps qui les portent. Cependant, le fait qu'il soit nécessaire qu'il y ait un contact entre deux matériaux pour que l'électricité puisse passer de l'un à l'autre, semble indiquer que cette électricité est portée par de la matière.*

On explique l'ensemble des effets d'électricité statique par l'existence, au sein de la matière, de particules portant une charge électrique q, positive ou négative, et libres de se déplacer.

En 1909, C. A. Millikan a établi que *toute charge électrique Q est quantifiée.* C'est à dire qu'elle existe seulement sous forme de multiples

---

* Ces notes sont en fait, de larges extraits du cours de M. Jonathan Feirrera (Université Joseph Fourier Grenoble , France. (http://www-laog.obs.ujf-grenoble.fr/ ferreira-/teaching.html=sma)

d'une charge élémentaire e, indivisible :

$$\forall Q, \quad \exists N \in \mathbb{Z} \quad : \quad Q = N\mathrm{e}.$$

La particule portant cette charge élémentaire est appelée **électron**. Dans le système d'unités international, l'unité de la charge électrique est le Coulomb (symbole C). Les phénomènes d'électricité statique mettent en jeu des charges de l'ordre des nanocoulombs (nC) voire des microcoulombs (μC), tandis que l'on peut rencontrer des charges de l'ordre du Coulomb en électrocinétique.

L'ensemble des expériences de la physique ne peuvent s'expliquer que si la charge électrique élémentaire est un invariant : on ne peut ni la détruire ni l'engendrer, et ceci est valable quel que soit le référentiel. C'est ce que l'on décrit par la notion d'invariance relativiste de la charge électrique.

La charge d'un système est une grandeur extensive, c'est à dire qu'elle est la somme algébrique de toutes les charges constituant le système.

La charge est une grandeur conservative. Dans un système isolé, il ne peut pas y avoir de création ou de destruction de charges. L'apparition de charges dans ce système ne peut être due qu'à l'extérieur. Une autre façon de dire la même chose est que la charge totale contenue dans l'Univers est constante.

2. Structure de la matière

La matière est constituée d'atomes. Ceux-ci sont eux-mêmes constitués d'un noyau (découvert en 1911 par Rutherford) autour duquel gravite une sorte de nuage composé d'électrons et portant l'essentiel de la masse. Ces électrons se repoussent les uns les autres mais restent confinés autour du noyau car celui-ci possède une charge électrique positive qui les attire. On attribue cette charge positive à des particules appelées protons. Cependant, le noyau atomique ne pourrait rester stable s'il n'était composé que de protons : ceux-ci ont en effet tendance à se repousser mutuellement. Il existe donc une autre sorte de particules, les neutrons (découverts en 1932 par Chadwick) portant une charge électrique nulle.

Tout processus d'électrisation doit être compris comme le transfert d'un certain nombre de ces charges élémentaires. Lorsqu'on arrache un ou plusieurs électrons à cet atome neutre, il devient un ion chargé positivement ; à l'inverse, si on ajoute un ou plusieurs électrons à cet atome, on crée un ion chargé négativement. Plus généralement, à l'échelle macroscopique, un corps déficitaire en électrons sera considéré comme chargé positivement tandis qu'un corps excédentaire en électrons sera considéré comme chargé négativement.

Valeurs des charges électriques et des masses des constituants atomiques dans le Système International :

Electron	*Proton*	*Neutron*
$q_e = -e$	$q_p = +e$	$q_n = 0\,\mathrm{C}$
$q_e = -1.602 \times 10^{-19}\mathrm{C}$	$q_p = +1.602 \times 10^{-19}\mathrm{C}$	

Une charge de l'ordre du Coulomb, correspondant à $\sim 10^{18}$ électrons, produit un accroissement de masse de l'ordre de 10^{-12}kg : c'est effectivement imperceptible.

3. Matériaux isolants et matériaux conducteurs

Aux températures usuelles, la matière est électriquement neutre : toutes les charges électriques sont compensées (même nombre d'électrons et de protons).

En conséquence, lorsque des effets d'électricité statique se produisent, cela signifie qu'il y a eu un déplacement de charges, d'un matériau vers un autre : c'est ce que l'on appelle l'électrisation d'un corps.

Un matériau est dit **conducteur parfait** si, lorsqu'il devient électrisé, les porteurs de charge non compensés peuvent se déplacer librement dans tout le volume occupé par le matériau.

Un matériau est dit **isolant parfait ou diélectrique parfait** si les porteurs de charge non compensés ne peuvent pas se déplacer librement et restent localisés à l'endroit où ils ont été déposés.

Un matériau quelconque se situe évidemment entre ces deux états ext rêmes.

II - Force et champ électrostatiques

1. La force de Coulomb

Charles Auguste de Coulomb (1736-1806)

Coulomb a effectué, à l'aide d'une balance de torsion, une série de mesures qui lui ont permis de déterminer avec un certain degré de précision les propriétés de la force électrostatique exercée par une charge ponctuelle q_1 sur une autre charge ponctuelle q_2 :

- ⊙ La force est radiale, c'est à dire dirigée selon la droite qui joint les deux charges ;
- ⊙ Elle est proportionnelle au produit des charges : attractive si elles sont de signe opposé, répulsive sinon ;
- ⊙ Elle varie comme l'inverse du carré de la distance entre les deux charges.

L'expression mathématique de la force de Coulomb traduisant les propriétés ci-dessus est :

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}, \qquad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9. \times 10^9 \text{ SI} \tag{1}$$

Remarques :

- + Cette expression n'est valable que pour des charges immobiles (approximation de l'électrostatique) et dans le vide. Cette loi est la base même de toute l'électrostatique.
- + Cette force obéit au principe de l'action et de la réaction de la mécanique classique.
- + Cette loi a exactement les mêmes propriétés vectorielles que la force de la gravitation (loi de Newton).

2. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

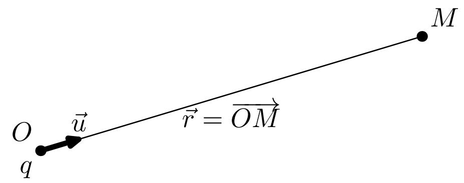
Soit une charge q_1 située en un point O de l'espace, exerçant une force électrostatique sur une autre charge q_2 située en un point M. L'expression de cette force est donnée par la loi de Coulomb. On peut la mettre sous la forme :

$$\vec{F}_{12} = q_2\vec{E}_1(M)$$
$$\vec{E}_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\vec{u}$$

L'intérêt de cette séparation vient du fait que l'on distingue clairement ce qui dépend uniquement de la particule qui subit la force (la charge q_2), de ce qui ne dépend que d'une source extérieure, ici le vecteur $\vec{E}_1(M)$.

Définition : *Une particule de charge q située au point O crée en tout point M de l'espace distinct de O un champ vectoriel*

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$



appelé champ électrostatique.
L'unité est le Volt/mètre (V/m).

3. Champ créé par un ensemble de charges

On considère maintenant n particules, chacune portant une charges électriques q_i est située en un point P_i. Quel est le champ électrostatique créé par cet ensemble de charges en un point M ?

Pb. *Est ce que la présence du champ créé par des particules voisines modifie celui créé par la charge en question ?*

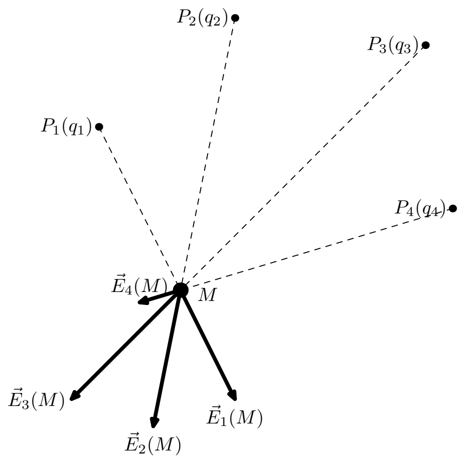
L'expérience montre que la force totale subie par une charge q située en M est simplement la superposition des forces élémentaires créées par les charges voisines.

$\vec{E}(M)$ est le champ électrostatique créé par un ensemble discret de charges. Cette propriété de superposition des effets électrostatiques est un fait d'expérience et énoncée comme le principe de superposition.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i}{{r_i}^2}\vec{u}_i$$

où $r_i = P_iM$; $\overrightarrow{P_iM} = P_iM\vec{u}_i$ et il en résulte donc que :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i}{{r_i}^2}\vec{u}_i$$



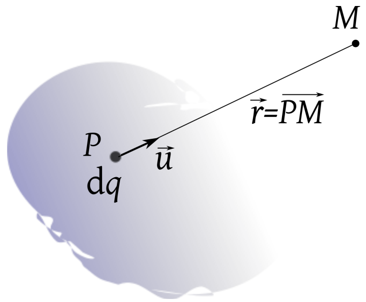
Dans la pratique, on considère des échelles spatiales très grandes devant les distances inter-particulaires (atomique, moléculaire, ...). Le nombre de particules devient important et Il est donc impossible de distinguer une particule de l'autre.

L'expression précédente est alors rarement utilisées. On lui préfèrent des expressions déduites en supposant des distributions continues de charges.

Soit P un point quelconque d'un matériau comportant des charges électriques. Soit $\mathsf{d}q(P)$ la charge élémentaire contenue dans une portion de l'espace autour de P. Le champ électrostatique total créé en un point M par cette distribution de charges est :

$$\vec{E}(M) = \int_{\texttt{Distribution}} \mathsf{d}\vec{E}(M) \quad \textsf{avec} \quad \mathsf{d}\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathsf{d}q}{r^2}\vec{u}$$

Mathématiquement, tout se passe donc comme une charge ponctuelle dq était située en un point P de la distribution, créant au point M un champ électrostatique d$\vec{E}(M)$, avec $r = PM$ et $\overrightarrow{PM} = PM\vec{u}$. Il s'agit évidemment d'une approximation, permettant de remplacer une somme presque infinie par une intégrale.



On définit $\rho = \frac{\mathsf{d}q}{\mathsf{d}v}$ comme étant la densité volumique de charges (unités : C/m^3). Le champ électrostatique créé par une telle distribution est donc :

$$\vec{E}(M) = \int_{\texttt{volume}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho}{r^2}\vec{u}\,\mathsf{d}v$$

Lorsque l'une des dimensions de la distribution de charges est beaucoup plus petite que les deux autres (ex : un plan ou une sphère creuse), on peut généralement faire une intégration sur cette dimension. On définit alors la densité surfacique de charges $\sigma = \frac{\mathsf{d}q}{\mathsf{d}s}$ (unités : C/m^2), produisant un champ total :

$$\vec{E}(M) = \int_{\texttt{Surface}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma}{r^2}\vec{u}\,\mathsf{d}s$$

Enfin, si deux des dimensions de la distribution sont négligeables devant la troisième (ex : un fil), on peut définir une densité linéique de charges $\lambda = \frac{\mathsf{d}q}{\mathsf{d}l}$ (unités : C/m), associé au champ :

$$\vec{E}(M) = \int\limits_{\texttt{Longueur}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2}\, \vec{u}\, \mathsf{d}l$$

L'utilisation de l'une ou l'autre de ces trois expressions dépend de la géométrie de la distribution de charges considérée.

4. Propriétés de symétrie du champ électrostatique

Principe de Curie : *Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.*

Du fait que le champ soit un effet créé par une distribution de charges, il contient des informations sur les causes qui lui ont donné origine. Ainsi, si l'on connaît les propriétés de symétrie d'une distribution de charges, on pourra connaître celles du champ électrostatique associé. Ces propriétés sont fondamentales car elles permettent de simplifier considérablement le calcul du champ électrostatique.

Règles de symétrie

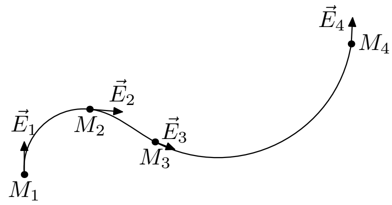
- **Invariance par translation :** si S est invariant dans toute translation parallèle à un axe Oz, les effets ne dépendent pas de z.
- **Symétrie axiale :** si S est invariant dans toute rotation θ autour d'un axe Oz, alors ses effets exprimés en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) ne dépendent pas de θ.
- **Symétrie cylindrique :** si S est invariant par translation le long de l'axe Oz et rotation autour de ce même axe, alors ses effets exprimés en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) ne dépendent que de la distance à l'axe ρ.
- **Symétrie sphérique :** si S est invariant dans toute rotation autour d'un point fixe O, alors ses effets exprimés en coordonnées sphériques (ρ, θ, z) ne dépendent que de la distance au centre r.
- **Plan de symétrie Π :** si S admet un plan de symétrie Π, alors en tout point de ce plan, le champ électrostatique est contenu dans ce plan.

- **Plan d'antisymétrie Π' :** si, par symétrie par rapport à un plan Π', S est transformé en $-S$, alors en tout point de ce plan, le champ électrostatique lui est perpendiculaire.

5. Lignes de champ

Le concept de lignes de champ (également appelées lignes de force) est très utile pour se faire une représentation spatiale d'un champ de vecteurs.

Définition : *Une ligne de champ d'un champ de vecteur quelconque est une courbe $\mathcal{C}$ définie dans l'espace telle qu'en chacun de ses points le vecteur y soit tangent.*



Considérons un déplacement élémentaire d$\vec{l}$ le long d'une ligne de champ électro- statique $\mathcal{C}$. Le fait que le champ E soit en tout point de $\mathcal{C}$ parallèle à d$\vec{l}$ s'écrit :

$$\vec{E} \wedge \mathsf{d}\vec{l} = \vec{0}$$

En coordonnées cartésiennes, $\mathsf{d}\vec{l} = \mathsf{d}x\,\vec{i} + \mathsf{d}y\,\vec{j} + \mathsf{d}z\,\vec{k}$ et les lignes de champ sont calculées en résolvant

$$\frac{\mathsf{d}x}{E_x} = \frac{\mathsf{d}y}{E_y} = \frac{\mathsf{d}z}{E_z}$$

En coordonnées cylindriques $\mathsf{d}\vec{l} = \mathsf{d}\rho\,\vec{u}_\rho + \rho\mathsf{d}\theta\,\vec{u}_\theta + \mathsf{d}z\,\vec{u}_z$ et l'équation des lignes de champ devient

$$\frac{\mathsf{d}\rho}{E_\rho} = \frac{\rho\mathsf{d}\theta}{E_\theta} = \frac{\mathsf{d}z}{E_z}$$

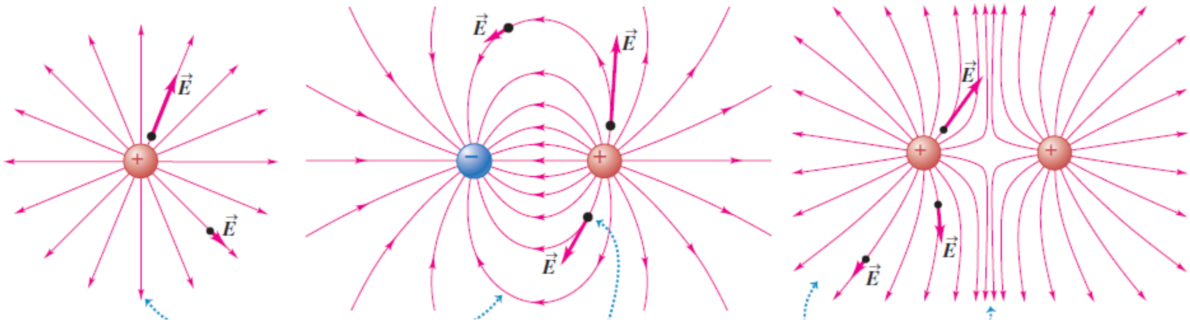
En coordonnées sphériques, $\mathsf{d}\vec{l} = \mathsf{d}r\,\vec{u}_\rho + r\mathsf{d}\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\mathsf{d}\varphi\,\vec{u}_\varphi$ et on a

$$\frac{\mathsf{d}r}{E_r} = \frac{r\mathsf{d}\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta\mathsf{d}\varphi}{E_\varphi}$$

À titre d'exemple, l'équation des lignes du champ créé par une charge ponctuelle placée à l'origine O. Dans le système des coordonnées sphériques adapté à cette symétrie les équations ci-dessus donnent :

$$\frac{\sin\theta}{r}\mathsf{d}\varphi = 0 \qquad \text{soit } \varphi = \mathsf{Cste}$$
$$\frac{\mathsf{d}\theta}{r} = 0 \qquad \text{soit } \theta = \mathsf{Cste}$$

Ainsi les lignes de champ produit par une charge ponctuelle placée au point O sont des droites passant O. La figure ci-dessous représente ces lignes pour une charge positive (figure de gauche), un dipôle (figure du milieu) et un doublet positif (figure de droite).



En un point où se coupent deux lignes de champ, $\vec{E}$ est soit nul soit indéfini. En effet, en ce point, le champ doit être tangent à deux lignes différentes ; s'il n'est pas nul, il n'a pas de valeur définie. C'est le cas pour une charge ponctuelle positive (respectivement négative) d'où divergent (respectivement convergent) toutes les lignes de champ (fig a) et b)).

III - Circulation du champ électrostatique

1. Notion de potentiel électrostatique

Considérons une quantité scalaire $V(M)$ définie en tout point M de l'espace. Cette quantité est également appelée champ scalaire. Une variation dV de ce champ lorsqu'on passe d'un point M à un autre point M' infiniment proche est alors fournie par la différen- tielle totale :

$$\mathsf{d}V(M) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_i}\mathsf{d}x_i = \overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \mathsf{d}\overrightarrow{OM} = \vec{\nabla}V \cdot \mathsf{d}\overrightarrow{OM}$$

où le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{\nabla} V$, est le gradient du champ scalaire V et constitue un champ de vecteurs défini partout. Ses composantes dans un système de coordonnées donné sont obtenues très simplement. Par exemple, en coordonnées cartésiennes, on a

$$\overrightarrow{OM} = \mathsf{x}\vec{i} + \mathsf{y}\vec{j} + \mathsf{z}\vec{k}$$
$$\mathsf{d}V = \frac{\partial}{\partial x} V \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y} V \mathrm{d}y + \frac{\partial}{\partial z} V \mathrm{d}z$$

d'où l'expression suivante pour le gradient en coordonnées cartésiennes

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial}{\partial x} V \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} V \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} V \vec{j}$$

En faisant de même en coordonnées cylindriques et sphériques on trouve respectivement

Coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial}{\partial \rho} V \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} V \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} V \vec{e}_z$$

Coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial}{\partial r} V \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} V \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} V \vec{e}_\varphi$$

Un déplacement $\overrightarrow{MM'}$ le long d'une courbe (ou surface) définie par $V = \text{Cst}$ correspond à $\mathrm{d}V = 0$, ce qui signifie que $\vec{\nabla} V$ est un vecteur qui est perpendiculaire en tout point à cette courbe (ou surface).

Définition : *le potentiel électrostatique V est relié au champ électrostatique $\vec{E}$ par*

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

En fait, depuis Newton (1687) et sa loi de gravitation universelle, de nombreux physiciens et mathématiciens s'étaient penché sur les propriétés de cette force radiale en $1/r^2$. En particulier Lagrange avait ainsi introduit en 1777 une fonction scalaire appelée potentiel, plus fondamentale puisque la force en dérive. C'est Poisson qui a introduit le potentiel électrostatique en 1813, par analogie avec la loi de Newton.

Remarques :

- ⊙ Le signe moins est une convention liée à celle adoptée pour l'énergie électrostatique (voir plus loin).
- ⊙ La conséquence de cette définition du potentiel est $\mathrm{d}V(M) = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ pour un déplacement infinitésimal quelconque.
- ⊙ Les lignes de champ électrostatique sont perpendiculaires aux courbes équipotentielles.

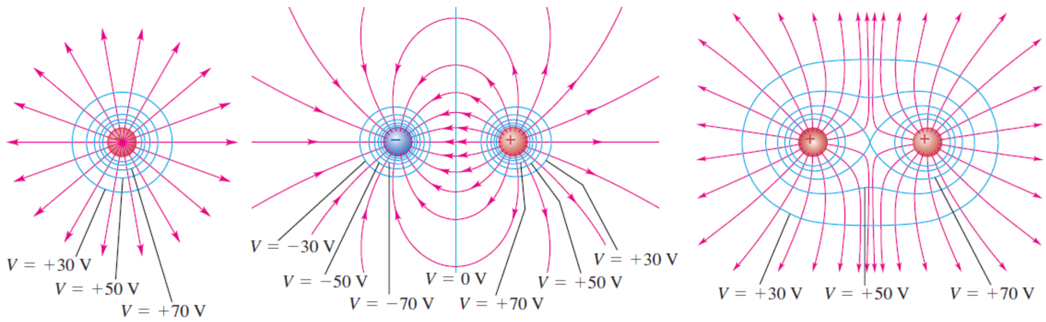
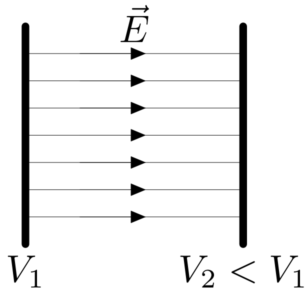


Fig. *Courbes équipotentielles superposées à des lignes de champs pour une charge ponctuelle, un dipôle et un doublet positif.*

Définition : *la circulation du champ électrostatique le long d'une courbe allant de A vers B est*

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_A^B \mathrm{d}V = V(A) - V(B)$$

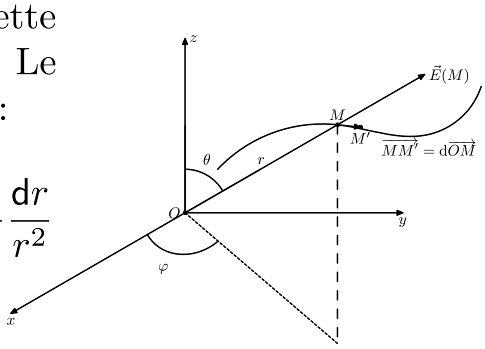
Remarques :



- ⊙ Cette circulation est conservative : elle ne dépend pas du chemin suivi.
- ⊙ La circulation du champ électrostatique sur une courbe fermée (on retourne en A) est nulle. On verra plus loin que ceci est d'une grande importance en électrocinétique.
- ⊙ D'après la relation ci-dessus, le long d'une ligne de champ, c'est à dire pour $E\mathsf{d}l > 0$ on a $V(A) > V(B)$. Les lignes de champ électrostatiques vont dans le sens des potentiels décroissants.

2. Potentiel créé par une charge ponctuelle

Considérons une charge ponctuelle q située en un point O. En un point M de l'espace, cette charge crée un champ électrostatique $\vec{E}(M)$. Le potentiel électro- statique est alors donné par :



$$\mathsf{d}V(M) = -\vec{E}\cdot\mathsf{d}\overrightarrow{OM} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{u}\cdot\mathsf{d}\vec{r}}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathsf{d}r}{r^2}$$

c'est à dire, après intégration suivant r,

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} + V_0$$

Remarques :

- ⊙ La constante d'intégration est en général choisie nulle (le potentiel s'annule à l'infini)
- ⊙ L'unité du potentiel est le Volt . En unités du système international (SI) le Volt vaut
$$[V] = [E\,L] = ML^2T^{-3}I^{-1}$$
- ⊙ Si l'on veut se former une représentation du potentiel, on peut remarquer qu'il mesure le degré d'électrification d'un conducteur. Il y a en fait une analogie formelle entre d'un coté, potentiel V et température T d'un corps, et de l'autre, entre charge Q et chaleur déposée dans ce corps.

3. Potentiel créé par un ensemble de charges

Considérons maintenant un ensemble de n charges ponctuelles q_i distribuées dans tout l'espace. En vertu du principe de superposition, le champ électrostatique total $\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$ est la somme vectorielle des champs $\vec{E}_i$ créés par chaque charge q_i . On peut donc définir un potentiel électrostatique total $V(M)$:

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} V_i(M)$$

tel que :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

soit encore vérifié. En utilisant l'expression du potentiel créé par une charge unique, on obtient :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i} + V_0$$

où r_i est la distance entre la charge q_i et le point M.

Lorsqu'on s'intéresse à des échelles spatiales qui sont très grandes par rapport aux distances entre les charges q_i, on peut faire un passage à la limite continue et remplacer la somme discrète par une intégrale où P est un point courant autour duquel se trouve une charge élémentaire $\mathsf{d}q$. Le potentiel électrostatique créé par une distribution de charges continue est alors où $r = PM$ est la distance entre le point M et un point P quelconque de la distribution de charges.

Remarques :

- ⊙ Pour des distributions de charges linéique λ, surfacique σ et volumique ρ, on obtient respectivement

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda \mathsf{d}l}{r} + V_0$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma \mathsf{d}S}{r} + V_0$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho \mathsf{d}v}{r} + V_0$$

- ⊙ Noter que l'on ne peut pas évaluer le potentiel (ni le champ d'ailleurs) sur une particule en utilisant l'expression discrète (c'est à dire pour

$r_i = 0$). Par contre, on peut le faire avec une distribution continue : c'est dû au fait que dq/r converge lorsque r tend vers zéro.

IV - Énergie potentielle électrostatique

1. Énergie électrostatique d'une charge ponctuelle

Comment mesure-t-on l'énergie potentielle gravitationnelle d'un corps de masse m ? On le déplace d'une position initiale jusqu'à une position finale (on exerce donc une force) puis on le lâche sans vitesse initiale. S'il acquiert une vitesse, c'est qu'il développe de l'énergie cinétique.

Or, en vertu du principe de conservation de l'énergie, cette énergie ne peut provenir que d'un autre réservoir énergétique, appelé énergie potentielle. Comment s'est constituée cette énergie potentielle gravitationnelle ? Grâce au déplacement du corps par l'opérateur.

Ainsi, le travail effectué par celui-ci est une mesure directe de l'énergie potentielle. On adoptera le même raisonnement pour l'énergie électrostatique.

Définition : *l'énergie potentielle électrostatique d'une particule chargée placée dans un champ électrostatique est égale au travail qu'il faut fournir pour amener de façon quasi-statique cette particule de l'infini à sa position actuelle.*

Prenons une particule de charge q placée dans un champ $\vec{E}$. Pour la déplacer de l'infini vers un point M, un opérateur doit fournir une force qui s'oppose à la force de Coulomb. Si ce déplacement est fait suffisamment lentement, la particule n'acquiert aucune énergie cinétique.

Cela n'est possible que si, à tout instant, $\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F} = -q\vec{E}$. Le travail fourni par l'opérateur sera donc :

$$W(M) = \int_{\infty}^{M} (d)W = \int_{\infty}^{M} \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\infty}^{M} -q\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = q[V(M) - V(\infty)]$$

Puisqu'on peut toujours définir le potentiel nul à l'infini, on obtient l'expression suivante pour l'énergie électrostatique d'une charge ponctuelle située en M :

$$W_e = qV$$

On voit donc que le potentiel électrostatique est une mesure (à un facteur q près) de l'énergie électrostatique : c'est dû au fait que V est lié à la circulation du champ.

NB : *l'énergie électrostatique est indépendante du chemin suivi.*

2. Énergie électrostatique d'un ensemble de charges ponctuelles

Dans la section précédente, nous avons considéré une charge q placée dans un champ $\vec{E}$ extérieur et nous avons ainsi négligé le champ créé par la charge elle-même. Mais lorsqu'on a affaire à un ensemble de N charges ponctuelles q_i, chacune d'entre elles créera à l'endroit des autres charges un champ électrostatique, et ainsi, mettre en jeu une énergie d'interaction électrostatique. Quelle sera alors l'énergie potentielle électrostatique de cet ensemble de charges ?

Soit la charge ponctuelle q_1 placée en P_1. On amène alors une charge q_2 de l'infini jusqu'en P_2, c'est à dire que l'on fournit un travail $W_2 = q_2 V_1(P_2) = q_1 V_2(P_1) = W_1$ identique à celui qu'il aurait fallu fournir pour amener q_1 de l'infini en P_1 en présence de q_2 déjà située en P_2. Cela signifie que ce système constitué de 2 charges possède une énergie électrostatique :

$$W_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} = W_1 = W_2 = \frac{1}{2}(W_1 + W_2)$$

où $r_{12} = P_1 P_2$.

Remarques :

- ⊙ Dans cette approche, nous avons considéré q_2 immobile alors que l'on rapprochait q_1. En pratique c'est la distance entre les deux charges qui diminue du fait de l'action de l'opérateur extérieur à la fois sur q_1 et q_2 (avec $\vec{F}_{\text{ext}/1} = -\vec{F}_{\text{ext}/2}$ puisque $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$).
- ⊙ On aurait aussi bien pu calculer le travail total fourni par l'opérateur en évaluant le déplacement de q_1 et de q_2 de l'infini à la distance qui les sépare actuellement.
- ⊙ Une autre façon de comprendre cela, c'est de réaliser que nous avons évalué le travail fourni par l'opérateur dans le référentiel lié à q_2 (immobile). Celui-ci est identique au travail évalué dans un référentiel fixe

(où q_1 et q_2 se déplacent) car le déplacement des charges s'effectue de façon quasi-statique (aucune énergie n'a été communiquée au centre de masse).

Si maintenant on amène une $3^{ème}$ charge q_3 de l'infini jusqu'en P_3 (q_1 et q_2 fixes), il faut fournir un travail supplémentaire :

$$\begin{aligned} W_3 &= q_3 V_{1\oplus 2}(P_3) \\ &= q_3 \Big(V_1(P_3) + V_2(P_3) \Big) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) \end{aligned}$$

correspondant à une énergie électrostatique de ce système de 3 charges :

$$W_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_3 q_2}{r_{23}} \right)$$

Ainsi, on voit qu'à chaque couple $q_i q_j$ est associée une énergie potentielle d'interaction. Pour un système de N charges on aura alors :

$$W_e = \sum_{\text{couples}} q_i V_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j\neq i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

où le facteur 1/2 apparaît parce que chaque couple est compté deux fois. L'énergie électrostatique d'un ensemble de N charges ponctuelles est donc :

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i V_i(P_i)$$

$$\text{où} \qquad V_i(P_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j\neq i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

est le potentiel créé en P_i par toutes les autres charges.

Pour une distribution continue de charges, la généralisation de la formule précédente est évidente. Soit $\mathsf{d}q$ la charge située autour d'un point P

quelconque de la distribution. L'énergie électrostatique de cette distribution s'écrit :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{Distribution}} \mathsf{d}q V(P)$$

$$\text{où} \qquad V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Distribution}} \frac{\mathsf{d}q(P')}{PP'}$$

est le potentiel créé par toute la distribution. En effet ici, il n'est pas nécessaire d'exclure explicitement la charge située en P puisque $\mathrm{d}q(P)$ peut tendre vers zéro avec l'élément infinitésimal (contribution nulle à l'intégrale, absence de divergence).

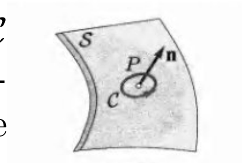
Chapitre II *

LOIS FONDAMENTALES DE L'ÉLECTROSTATIQUE : THÉORÈME DE GAUSS

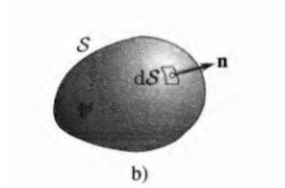
I - Flux du champ électrostatique

1. Surface orientée

Pour orienter une surface S , on trace, autour d'un point P de S , un contour fermé $\mathcal{C}$ sans point double. On choisit alors arbitrairement un sens de parcours sur $\mathcal{C}$. Le sens de la normale positive $\vec{n}$ à S en P s'obtient par la règle de Maxwell (ou d'Ampère), appelée aussi règle du tire-bouchon.



a)

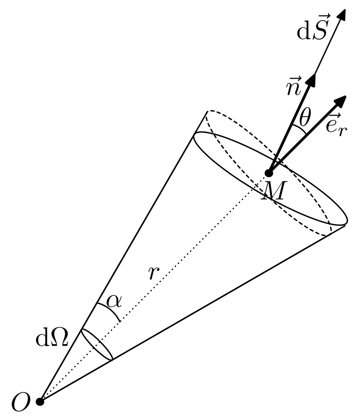


b)

Dans le cas d'une surface fermée (fig b)), où il n'y a pas d'ambiguïté, il est d'usage d'orienter la normale de l'intérieur vers l'extérieur.

2. Notion d'angle solide

La notion d'angle solide est l'extension naturelle dans l'espace de l'angle défini dans un plan. Par exemple, le cône de lumière construit par l'ensemble des rayons lumineux issus d'une lampe torche est entièrement décrit par la donnée de deux grandeurs : la direction (une droite) et l'angle maximal d'ouverture des rayons autour de cette droite. On appelle cette droite la génératrice du cône et l'angle en question, l'angle au sommet.



Définition : *l'angle solide élémentaire* $\mathsf{d}\Omega$*, délimité par un cône coupant un élément de surface élémentaire* $\mathsf{d}S$ *située à une distance* r *de son sommet* O *vaut :*

$$\mathsf{d}\Omega = \frac{\mathsf{d}S}{r^2}$$

* Ces notes sont en fait, de larges extraits du cours de M. Jonathan Feirrera (Université Joseph Fourier Grenoble , France. (http://www-laog.obs.ujf-grenoble.fr/ ferreira-/teaching.html=sma)

Cet angle solide est toujours positif et indépendant de la distance r. Son unité est le stéradian (symbole sr).

En coordonnées sphériques, la surface élémentaire, pour r constant, vaut $\mathsf{d}S = r^2 \sin\theta \mathsf{d}\theta \mathsf{d}\varphi$. L'angle solide élémen- taire s'écrit alors $\mathsf{d}\Omega = \sin\theta \mathsf{d}\theta \mathsf{d}\varphi$. Ainsi, l'angle solide déli- mité par un cône de révolution, d'angle au sommet α vaut :

$$\Omega = \int \mathsf{d}\Omega = \int_0^{2\pi} \mathsf{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \mathsf{d}\theta = 2\pi(1 - \cos\alpha)$$

Le demi-espace, engendré avec $\alpha = \pi/2$ (radians), correspond donc à un angle solide de 2π stéradians, tandis que l'espace entier correspond à un angle solide de $4\pi(\alpha = \pi)$.

De façon générale, le cône peut intercepter une surface quelconque, dont la normale $\vec{n}$ fait un angle θ avec la génératrice de vecteur directeur $\vec{u}$. L'angle solide élémentaire est alors défini par

$$\mathsf{d}\Omega = \frac{\mathsf{d}\vec{S} \cdot \vec{e}_r}{r^2} = \mathsf{d}S \frac{\vec{n} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{\mathsf{d}S'}{r^2}$$

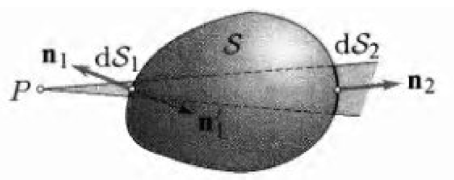
où dS' est la surface effective vue par un observateur situé en O.

a. Angle solide sous lequel est vue une surface fermée

Considérons le cône élémentaire issu du point P découpant, sur une surface fermée S, deux surfaces élémentaires orientées $\vec{n}_1 \mathsf{d}S_1$ et $\vec{n}_2 \mathsf{d}S_2$, conformément à l'orientation d'une surface fermée. Deux cas se présentent suivant que P est à l'extérieur ou à l'intérieur de la surface fermée.

i) P est à l'extérieur de S :

Les angles solides définis par les surfaces $\vec{n}_1' \mathsf{d}S_1 = -\vec{n}_1 \mathsf{d}S_1$ et $\vec{n}_2 \mathsf{d}S_2$ sont égaux puisque relatifs au même cône. Par consé- quent $\mathsf{d}\Omega_1' = -\mathsf{d}\Omega_1$ et $\mathsf{d}\Omega_1 + \mathsf{d}\Omega_2 = 0$. Il en est de même pour tous les cônes élémentaires. Il en résulte que l'angle solide défini par une surface fermée ne contenant pas le point P est nul.



ii) P est à l'intérieur de S :

Lorsque P est à l'intérieur de S, les deux angles solides définis par un même faisceau élémentaire de droites passant par P sont égaux. On calcule la valeur de l'angle solide total en remplaçant localement les éléments de surface quelconques par des éléments de surface $\mathsf{d}\Sigma$ sphériques. On obtient, en explicitant à l'aide des coordonnées sphériques:

$$\Omega = \int \frac{\mathsf{d}\Sigma}{r^2} = \int \sin\theta \mathsf{d}\theta \mathsf{d}\varphi \quad \text{puisque} \quad \mathsf{d}\Sigma = r\sin\theta \mathsf{d}\varphi r \mathsf{d}\theta$$

Il en résulte en intégrant:

$$\Omega = \int_0^{\pi} \sin\theta \mathsf{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathsf{d}\varphi = 4\pi \qquad \text{(Stéradian)}$$

Retenons donc que l'angle solide total est nul si le point P est à l'extérieur de la surface fermée et est égal à sa valeur maximale, 4π si le point P est à l'intérieur de la surface fermée. Le cas où P est sur S peut se ramener à l'un des précédents en affinant la modélisation.

3. Théorème de Gauss

On considère maintenant une charge ponctuelle q située en un point O de l'espace. Le flux du champ électrostatique $\vec{E}$, créé par cette charge, à travers une surface élémentaire quelconque orientée est par définition

$$\mathsf{d}\Phi = \vec{E} \cdot \mathsf{d}\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n} \mathsf{d}S$$

Par convention, on oriente le vecteur unitaire $\vec{n}$, normal à la surface dS, vers l'extérieur, c'est à dire dans la direction qui s'éloigne de la charge q. Ainsi, pour $q > 0$, le champ $\vec{E}$ est dirigé dans le même sens que $\vec{n}$ et l'on obtient un flux positif. A partir de l'expression du champ créé par une charge ponctuelle, on obtient alors

$$\mathsf{d}\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{r^2} \mathsf{d}S = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \mathsf{d}\Omega$$

C'est à dire un flux dépendant directement de l'angle solide sous lequel est vue la surface et non de sa distance r (notez bien que d$\Omega > 0$, q pouvant être positif ou négatif). Ce résultat est une simple conséquence de la décroissance du champ électrostatique en $1/r^2$.

Que se passe-t-il lorsqu'on s'intéresse au flux total à travers une surface (quelconque) fermée ? On a une charge q située à l'intérieur de la surface S (enfermant ainsi un volume V), surface orientée (en chaque point de S, le vecteur $\vec{n}$ est dirigé vers l'extérieur) :

$$\mathsf{d}\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\mathsf{d}\Omega$$

Ce résultat est général puisque, la charge se trouvant à l'intérieur de S, un rayon dans une direction donnée traversera toujours S un nombre impair de fois. En intégrant alors sur toutes les directions (c'est à dire sur les 4π stéradians), on obtient un flux total

$$\Phi = \iint_{\mathsf{S}} \vec{E} \cdot \mathsf{d}\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

En vertu du principe de superposition, ce résultat se généralise aisément à un ensemble quelconque de charges.

Théorème de Gauss : *le flux du champ électrique à travers une surface fermée orientée quelconque est égal, dans le vide, à $1/\epsilon_0$ fois la charge électrique contenue à l'intérieur de cette surface :*

$$\Phi = \iint_{\mathsf{S}} \vec{E} \cdot \mathsf{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Remarques :

- ⊙ Du point de vue physique, le théorème de Gauss fournit le lien entre le flux du champ électrostatique et les sources du champ, à savoir les charges électriques.
- ⊙ La démonstration précédente utilise la loi de Coulomb qui, elle, est un fait expérimental et n'est pas démontrée. Inversement, on peut retrouver la loi de Coulomb à partir du théorème de Gauss : c'est ce qui est fait dans l'électromagnétisme, dans lequel le théorème de Gauss constitue en fait une loi fondamentale, non démontrable (l'une des quatre équations de Maxwell).

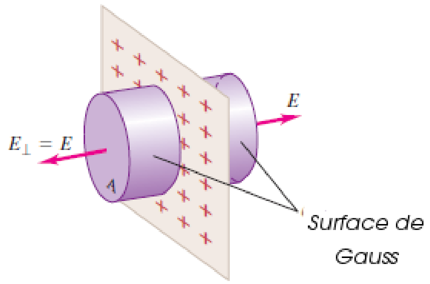
4. Exemples d'applications

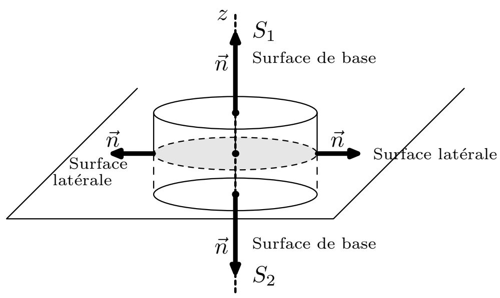
Le théorème de Gauss fournit une méthode très utile pour calculer le champ $\vec{E}$ lorsque celui-ci possède des propriétés de symétrie particulières. Celles-ci doivent en effet permettre de calculer facilement le flux Φ.

Comme le théorème de Gauss est valable pour une surface quelconque, il nous suffit de trouver une surface S adaptée, c'est à dire respectant les propriétés de symétrie du champ, appelée **surface de Gauss** .

Exemple 1. *Champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé*

On considère un plan infini Π portant une charge électrique σ uniforme par unité de surface. Pour utiliser le théorème de Gauss, il nous faut d'abord connaître les propriétés de symétrie du champ $\vec{E}$. Tous les plans perpendiculaires au plan infini Π sont des plans de symétrie de celui-ci : $\vec{E}$ appartient aux plans de symétrie, il est donc perpendiculaire à Π. Si ce plan est engendré par les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$ alors $\vec{E} = E_z(x, y, z)\vec{k}$. Par ailleurs, l'invariance par translation selon x et y nous fournit $\vec{E} = E_z(z)\vec{k}$. Le plan Π est lui-même plan de symétrie, donc $E(z)$ est impaire.





Étant donné ces propriétés de symétrie, la surface de Gauss la plus adaptée est un cylindre de sections perpendiculaires au plan et situées à des hauteurs symétriques.

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_{\mathsf{S}} \vec{E} \cdot \mathsf{d}\vec{S} = \iint_{\mathsf{S}_1} \vec{E} \cdot \mathsf{d}\vec{S} + \iint_{\mathsf{S}_2} \vec{E} \cdot \mathsf{d}\vec{S} + \iint_{\mathsf{S}_L} \vec{E} \cdot \mathsf{d}\vec{S} \\
&= E(Z)S - E(-z)S + 0 = 2ES \\
&= \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\mathsf{S}} \sigma \mathsf{d}S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'intensité du champ électrostatique créé par un plan infini uniformé- ment chargé vaut

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Remarques :

- ⊙ Le champ ne varie pas avec la distance, ce qui est naturel car le plan est supposé infini.
- ⊙ On peut encore appliquer ce résultat pour une surface quelconque chargée uniformé- ment. Il suffit alors d'interpréter E comme le champ au voisinage immédiat de la surface : suffisamment près, celle-ci peut être assimilée à un plan infini.

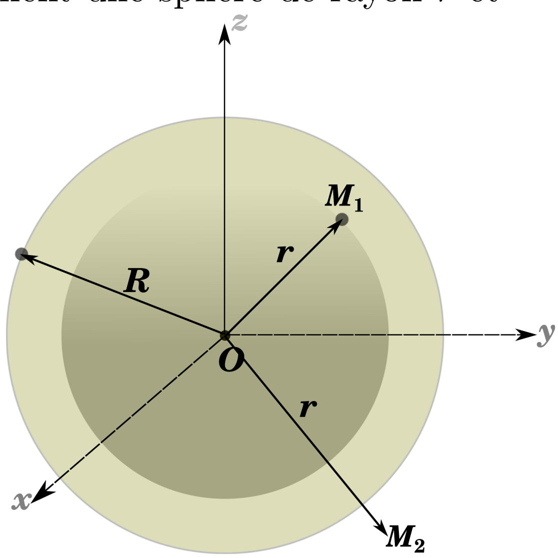
Exemple 2. *Champ créé par une boule uniformément chargée*

On considère une boule (sphère pleine) de centre O et de rayon R, chargée avec une distribution volumique de charges ρ. Cette distribution possédant une symétrie sphérique, le champ électrostatique qui en résulte aura la même symétrie, donc $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$.

La surface de Gauss adaptée est simplement une sphère de rayon r et le théorème de Gauss nous fournit

$$\Phi = \iint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S E(r)\mathrm{d}S = E(r)4\pi r^2$$

$$\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_V \rho \mathrm{d}v$$



lorsque $r < R$, on obtient

$$E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

Lorsque $r > R$, la sphère de Gauss enferme un volume V supérieur à celui de la boule. Mais la distribution de charges n'est non nulle que jusqu'en $r = R$. L'expression du champ E devient alors

$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{4\pi\epsilon_0\, r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, r^2}$$

où Q est la charge totale portée par la boule. On vient ainsi de démontrer, sur un cas simple, qu'une distribution de charges à symétrie sphérique produit à l'extérieur le même champ qu'une charge ponctuelle égale, située en O.

5. Forme locale du théorème de Gauss

On considère une surface fermée S qui délimite un volume V contenant une distribution de charge de densité ρ. Soit dV un élément de volume élémentaire délimité par une surface dS. L'élément de flux dΦ à travers dS est, d'après le théorème de Gauss :

$$\mathsf{d}\Phi = \frac{\mathsf{d}Q}{\epsilon_0}$$

On appelle divergence du champ de vecteurs $\vec{E}$ la limite, lorsque dS et dV tendent vers 0, de $\frac{d\Phi}{dV}$:

$$\mathsf{div}\vec{E} = \lim_{\substack{dS \to 0 \\ dV \to 0}} \frac{\mathsf{d}\Phi}{\mathsf{d}V}$$

Dans le cas d'une distribution volumique de densité ρ, on en déduit que, pour un volume élémentaire $\mathsf{d}V$:

$$\mathsf{div}\vec{E}\;\mathsf{d}V = \mathsf{d}\Phi = \frac{\mathsf{d}Q}{\epsilon_0} = \frac{\rho\mathsf{d}V}{\epsilon_0}$$

d'où

$$\mathsf{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

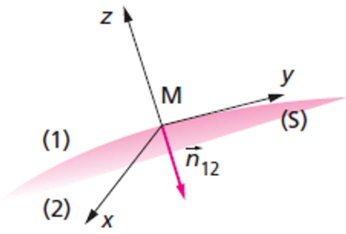
Cette équation entre le champ vectoriel $\vec{E}$ et le champ scalaire ρ en tout point de l'espace constitue l'expression locale du théorème de Gauss. Cette définition intrinsèque de la divergence donne immédiatement la relation connue sous le nom de formule d'Ostro- gradsky :

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{\mathsf{d}}S = \int_V \mathsf{div}\vec{E}\,\mathsf{d}V$$

où

$$\mathsf{div}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z$$

6. Discontinuité de la composante normale du champ à la traversée d'une couche chargée



Soit deux milieux (1) et (2) séparés par une surface (S) qui porte la densité superficielle de charges σ. Soit xMy le plan tangent à (S) en M et $\overrightarrow{Mz}$ un axe perpendiculaire à ce plan. Traçons sur S une courbe fermée $\mathcal{C}$ et construisons le volume cylindrique, de base $\mathcal{C}$, engendré par les normales à S et limité par deux surfaces élémentaires voisines $\mathsf{d}S_1$ et $\mathsf{d}S_2$ de part et d'autre de S.

La hauteur h du cylindre est négligeable devant les dimensions latérales de la base $\mathcal{C}$. Appliquons le théorème de Gauss sur la surface entourant le volume cylindrique. Il vient, en désignant par $\vec{n}_{12}$ la normale à la surface orientée de S_1 vers S_2 et en négligeant le flux à travers la surface latérale :

$$\Phi = \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_{12}\mathsf{d}S - \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_{12}\mathsf{d}S = \frac{\sigma \mathsf{d}S}{\epsilon_0}$$

d'où

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

On désigne par $\vec{E}_n$ la composante normale de $\vec{E}$ en M, donc parallèle à $\overrightarrow{Mz}$. De même on désigne par $\vec{E}_t$ la composante tangentielle de $\vec{E}$ en M, perpendiculaire à $\overrightarrow{Mz}$. La relation précédente montre que la composante normale de $\vec{E}$ subit une discontinuité :

$$E_{n_2} - E_{n_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$
$$E_{t_2} - E_{t_1} = 0$$

Chapitre III [*]

Électrocinétique

I - Propriétés des conducteurs

1. Définition

Dans un conducteur les charges sont mobiles et susceptibles de se déplacer lorsqu'elles sont soumises à un champ électrostatique (électrons libres dans un métal, ions positifs et négatifs d'un gaz ionisé...). Au contraire dans un isolant, les charges sont immobiles.

Lorsqu'on charge un conducteur par contact par exemple, les charges amenées se répartissent sur le conducteur. L'état d'équilibre électrostatique du conducteur est défini par l'état stationnaire de charge et de champ électrostatique qui existe après que les charges se soient distribuées sur le conducteur puis immobilisées. On démontre que cet état d'équilibre est unique.

2. Propriétés des conducteurs

⊙ **Propriété fondamentale :** *Le champ est nul en tout point intérieur d'un conducteur homogène en équilibre électrostatique.*

En effet un champ électrique moyen mettrait les électrons en mouvement et il y aurait un courant dans le conducteur contrairement à l'hypothèse faite de l'équilibre électrostatique et de l'immobilité des charges.

Il ne faut pas confondre ce champ moyen macroscopique avec les champs intenses régnant au voisinage des atomes. Ceux-ci sont très rapidement variables en direction et en module, et leur moyenne est nulle.

⊙ **Le potentiel à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique est constant.** *La surface du conducteur est une surface équipotentielle et les lignes de champ quittent le conducteur en lui étant perpendiculaires.*

---

[*] Ces notes sont en fait, de larges extraits du cours de M. Jonathan Feirrera (Université Joseph Fourier Grenoble , France. (http://www-laog.obs.ujf-grenoble.fr/ ferreira-/teaching.html=sma)

La variation du potentiel d'un point à un point est égale à la circulation de champ électrique sur une courbe $\mathcal{C}$ joignant ces points :

$$V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Comme $E = 0$ on a bien $V_A = V_B$.

⊙ **La quantité d'électricité dans tout volume intérieur au conducteur est nulle.** *Les charges portées par un conducteur ne peuvent qu'être réparties sur sa surface.*

Appliquons le théorème de Gauss à une surface fermée intérieure au conducteur. Comme le champ électrique est nul, le flux dudit champ est également nul. D'où la charge est nulle. Il n'y a pas de charge en excès dans le volume intérieur au conducteur (il s'y trouve évidement beaucoup d'électrons et de noyaux mais la somme de leurs charges est nulle). Les charges portées par un conducteur ne peuvent qu'être superficielles.

⊙ **Capacité d'un conducteur isolé.** *La charge Q d'un conducteur isolé (éloigné de tout autre conducteur) est proportionnelle à son potentiel V.*

L'on peut écrire

$$Q = CV$$

Le coefficient de proportionnalité C est appelé capacité du conducteur isolé. La C capacité du conducteur isolé ne dépend que de sa géométrie. Elle s'exprime en farads (symbole F). Un farad correspond à une charge de 1C quand le potentiel est de 1V. En fait les ordres de grandeurs pratiqués seront des sous-multiples du Farad.

II - Courant et résistance électriques

1. Le courant électrique

L'expérience montre qu'il était possible d'électriser un matériau conducteur, par exemple par frottements.

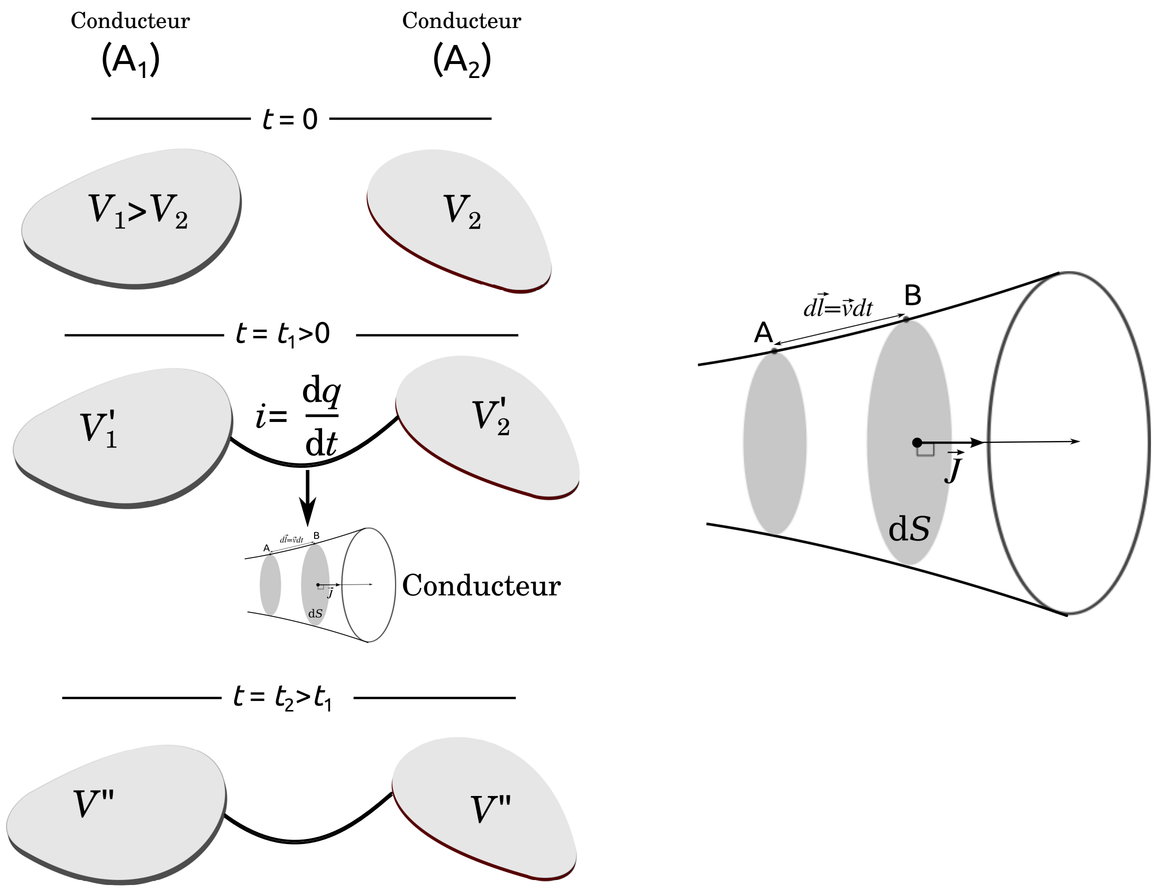
Si l'on met ensuite ce conducteur en contact avec un autre, le deuxième devient à son tour électrisé, c'est à dire qu'il a acquis une certaine charge Q. Cela signifie que lors du contact des charges se sont déplacées de l'un vers l'autre.

On définit alors le courant I par

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

L'unité du courant est l'Ampère (symbole A). Dans le système international, l'Ampère est l'une des 4 unités fondamentales (avec le mètre, le kilogramme et la seconde), de telle sorte que 1C= 1A·s (Ampère seconde).

La définition précédente de I ne renseigne pas sur son signe, il faut choisir une convention. Par exemple, soit $Q > 0$ la charge du conducteur initialement chargé (A1). On a affaire ici à une décharge de (A1) vers (A2). Si l'on désire compter positivement le courant de (A1) vers (A2), alors il faut mettre un signe moins à l'expression ci-dessus.



2. La densité de courant électrique

La raison physique du courant est un déplacement de charges, c'est à dire l'existence d'une vitesse organisée (par opposition à la vitesse d'agitation thermique) de celles-ci. Considérons donc un fil conducteur de section

S, dans lequel se trouvent n porteurs de charge q, animés d'une vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel du laboratoire. Pendant un instant $\mathrm{d}t$, ces charges parcourent une distance $\vec{v}\mathrm{d}t$. Soit $\mathrm{d}^2S\vec{n}$ un élément infinitésimal de surface mesuré sur la section du fil, orienté dans une direction arbitraire. La quantité de charge électrique qui traverse cette surface pendant $\mathrm{d}t$ est celle contenue dans le volume élémentaire $\mathrm{d}V$ associé

$$\mathrm{d}^3Q = nq\mathrm{d}^3V = nq\vec{v}\mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}^2S\vec{n}$$

On voit alors apparaître un vecteur qui décrit les caractéristiques du milieu conducteur et qu'on appelle la densité de courant :

$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

exprimée en Ampères par mètre carré (A/m^2). Le courant I circulant dans le fil est relié à la densité par

$$\begin{aligned} I &= \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{1}{\mathrm{d}t}\iint_{\text{Surface}} \vec{j} \cdot \mathrm{d}^2\vec{S}\mathrm{d}t \\ &= \iint_{\text{Surface}} \vec{j} \cdot \mathrm{d}^2\vec{S} \end{aligned}$$

Le courant dans un conducteur est égal au flux, à travers la section du fil, du vecteur densité de courant. Le sens du courant, qui est une grandeur algébrique, est alors donné par le sens du vecteur densité de courant.

Un conducteur est un cristal (cuivre, argent, or, $\cdots$) dans lequel se déplacent des particules chargées (ex, électrons). Suivant le matériau, les porteurs de charges responsables du courant peuvent être différents. Dans un métal, ce sont des électrons, dits de conduction. Dans un gaz constitué de particules ionisées, un plasma, ou bien dans un électrolyte, il peut y avoir plusieurs espèces chargées en présence.

En toute généralité, on doit donc définir la densité locale de courant de la forme :

$$\vec{j} = \sum_a n_a q_a \vec{v}_a$$

où l'on fait une sommation sur toutes les espèces (électrons et ions) en présence. Dans le cas particulier d'un cristal composé d'ions immobiles (dans le référentiel du laboratoire) et d'électrons en mouvement, on a :

$$\vec{j} = -n_e e \vec{v}_e$$

où e est la charge élémentaire et n_e la densité locale d'électrons libres. La densité de courant (donc le sens attribué à I) est ainsi dans le sens contraire du déplacement réel des électrons.

3. Loi d'Ohm microscopique (ou locale)

Modèle de Drude

Considérons le cas simple d'une charge électrique q soumise à la force de Coulomb d'une part, et à des collisions d'autre part. Ces collisions peuvent être décrites (ou modélisées) comme une force de frottement proportionnelle à la vitesse (moyenne) $\vec{v}$ de la charge. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\vec{E} - k\vec{v}$$

Cette équation montre qu'en régime permanent (stationnaire, mais non statique), la charge q atteint une vitesse limite $\vec{v} = \mu\vec{E}$ où $\mu = q/k$ est appelé la mobilité des charges. Ce régime est atteint en un temps caractéristique $\tau = m/k$, appelé temps de relaxation.

Dans la plupart des conducteurs, on observe une proportionnalité entre la densité de courant et le champ électrostatique local,

$$\vec{j} = \gamma\vec{E}$$

Le coefficient de proportionnalité γ est appelé la conductivité du milieu. On définit également $\eta = 1/\gamma$, la résistivité du milieu. La conductivité est une grandeur locale positive, dépendant uniquement des propriétés du matériau. Ainsi, le Cuivre possède une conductivité $\gamma_{\mathrm{Cu}} = 58 \times 10^6 \mathrm{S/m}$, tandis que celle du verre (isolant) vaut $\gamma_{\mathrm{verre}} = 10^{-11}\mathrm{S/m}$.

Une telle loi implique que les lignes de champ électrostatique sont également des lignes de courant, indiquant donc le chemin pris par les charges électriques. Par ailleurs, comme γ est positif, cela implique que le courant s'écoule dans la direction des potentiels décroissants.

La loi d'Ohm microscopique (ou locale) s'explique correctement par le modèle simple de collisions des porteurs de charge. On a longtemps cru que c'étaient des collisions avec les ions du réseau cristallin du conducteur, mais il s'avère qu'il s'agit en fait de collisions avec les impuretés contenues dans celui-ci.

Prenons le cas du Cuivre, métal conducteur au sein duquel existe une densité numérique d'électrons de conduction de l'ordre de $n_e = 8\times10^{28}\mathrm{m}^{-3}$. Le temps de relaxation est alors de $\tau = \frac{\gamma_{\mathrm{Cu}} m_e}{e^2 n_e} \simeq 2\times10^{-14}\mathrm{s}$. C'est le temps typique entre deux collisions.

La distance maximale parcourue par les électrons pendant cet intervalle de temps ou libre parcours moyen dépend de la vitesse réelle des électrons. Celle-ci est la somme de la vitesse moyenne $\vec{v}$ (le courant) et de la vitesse d'agitation thermique $v_{\mathrm{th}} = \sqrt{kT/m_e} \simeq 10^5\mathrm{m/s}$ à température ambiante ($T \sim 300$ K) mais dont la valeur moyenne vectorielle est nulle. (pour mémoire, un fil de Cuivre d'une section de 1 mm^2 parcouru par un courant de 1A, possède une densité de courant de 10^6 Am^{-2} et une vitesse moyenne de $v = 0.007\mathrm{m/s}$).

Le libre parcours moyen d'un électron serait alors de :

$$l = v_{\mathrm{th}}\tau \simeq 2\times10^{-9}m$$

un ordre de grandeur supérieur à la distance inter-atomique (de l'ordre de l'Angström). Ce ne sont donc pas les collisions avec les ions du réseau qui sont la cause de la loi d'Ohm.

4. Résistance d'un conducteur : loi d'Ohm macroscopique

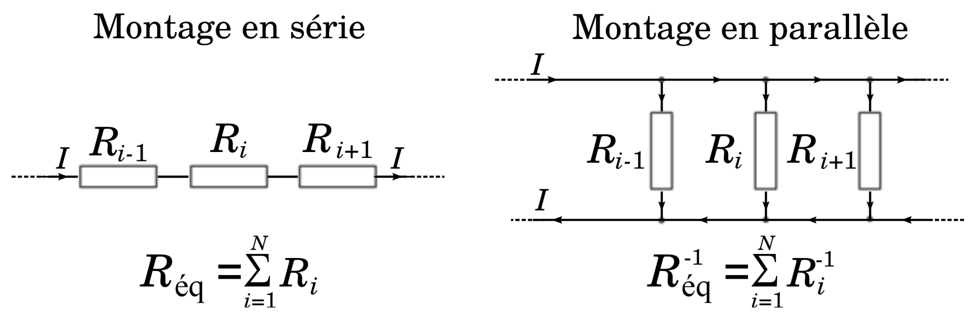
Considérons maintenant une portion AB d'un conducteur parcouru par un courant I. S'il existe un courant, cela signifie qu'il y a une chute de potentiel entre A et B, $U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$. On définit alors la résistance électrique de cette portion par

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}{\iint_S \gamma\vec{E}\cdot \mathrm{d}^2\vec{S}}$$

L'unité de la résistance électrique est l'Ohm (symbole Ω). Dans le cas simple d'un conducteur filiforme de section S où, sur une longueur L, le champ électrostatique est uniforme, on obtient le lien entre la résistance d'un conducteur (propriété macroscopique) et sa résistivité (propriété microscopique)

$$R = \frac{EL}{\gamma ES} = \eta \frac{L}{S}$$

L'unité de la résistivité est le Ω·m (Ohm·mètre).



a. Associations de résistances : Résistances en série

Soient n résistances R_i mises bout à bout dans un circuit et parcourues par un courant I. La tension aux bornes de la chaîne est $U = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \cdots + (V_{n-1} - V_n) = R_1 I + R_2 I + \cdots + R_n I$. C'est à dire analogue à celle obtenue par une résistance unique dont la valeur est

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

b. Associations de résistances : Résistances en parallèle

Soient n résistances R_i mises en parallèle sous une tension $U = V_1 - V_2$ et alimentées par un courant I. Le courant se sépare alors en n courants

$$I_i = \frac{U}{R_i}$$

dans chacune des n branches. En vertu de la conservation du courant (voir ci-dessous), on a

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{U}{R_i} = \frac{U}{R}$$

c'est à dire que l'ensemble des n branches est analogue à une résistance équivalente en série

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

III - Éléments d'un circuit électrique

1. Notion de circuit électrique

Définitions :

⊕ *Un circuit électrique est constitué d'un ensemble de dispositifs appelés dipôles, reliés entre eux par des fils conducteurs et formant ainsi une structure fermée.*

⊕ *Un nœud d'un circuit est une interconnexion où arrivent 3 fils ou plus.*

⊕ *Une branche est un tronçon de circuit situé entre deux nœuds.*

⊕ *Une maille est un ensemble de branches formant une boucle fermée.*

Un dipôle s'insère dans un circuit par l'intermédiaire de deux pôles, l'un par où s'effectue l'entrée du courant (borne plus), l'autre la sortie (borne moins). Il est caractérisé par sa réponse à une différence de potentiel U entre ses bornes : c'est à dire la courbe caractéristique $I = f(U)$. Un dipôle passif a une courbe passant par l'origine. Un dipôle actif fournit un courant (positif ou négatif) même en l'absence d'une tension. Enfin, on appelle dipôle linéaire tout dipôle dont la courbe caractéristique est une droite.

Nous avons vu que dans tout conducteur, la présence d'une résistivité entraîne une chute de tension et, en toute rigueur, il en va de même pour les fils. Mais ceux-ci étant mis en série avec d'autres dipôles, on néglige en général la résistance des fils devant celle des dipôles présents. Donc, les fils situés entre deux dipôles d'un circuit seront supposés équipotentiels.

Remarque :

⊙ Le courant $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ n'existe que lors d'un temps court, correspondant à une phase que l'on appelle régime transitoire. Dans ce qui suit, on s'intéresse à des cas où un courant est établi de façon permanente dans un circuit, c'est à dire dont l'intensité est la même en tout point du circuit. Cela exige évidemment que le circuit soit fermé.

⊙ Lorsqu'on ferme un circuit (par l'intermédiaire d'un interrupteur par ex), il faut un temps très court pour que les charges électriques prennent connaissance de l'ensemble du circuit. Ce temps correspond à celui pris par la lumière pour parcourir l'ensemble du circuit. C'est ce temps qui compte pour nous puisque c'est celui d'établissement du régime stationnaire. Autrement dit, tout ce qui est fait ici en courant continu, reste vrai pour un courant alternatif (du 50 Hz correspond à un temps de 20 ms, bien supérieur à la durée du régime transitoire).

2. Puissance électrique disponible

Soit une portion AB d'un circuit, parcourue par un courant permanent I allant de A vers B. L'existence de ce courant implique que le potentiel en A est supérieur à celui en B. Cette différence de potentiel se traduit par l'existence d'un champ électrostatique $\vec{E}$ produisant une force de Coulomb $\vec{F} = q\vec{E}$ capable d'accélérer une charge q. Ainsi, soit $P_q = \vec{F} \cdot \vec{v}$la puissance nécessaire pour communiquer une vitesse $\vec{v}$ à une particule de charge q quelconque. Sachant que dans ce conducteur il y a n porteurs de charge par unité de volume, la puissance totale P mise en jeu dans le brin AB parcouru par un courant I est

$$\begin{aligned}
P &= \iiint_{BrinAB} nP_q \mathrm{d}V = \int_A^B \mathrm{d}l \iint_{section} nP_q \mathrm{d}S = \int_A^B \mathrm{d}l \iint_{section} nq\vec{E} \cdot \vec{v}\mathrm{d}S \\
&= \int_A^B \iint_{section} (nq\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S})\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \iint_{section} (\vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}) \\
&= I \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I\big(V(A) - V(B)\big)
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$P = UI$$

où $U = V(A) - V(B) > 0$ puisque le courant s'écoule de A vers B. Cette puissance est donc la puissance électrique disponible entre A et B, du simple fait qu'il y circule un courant I.

Suivant la nature du dipôle placé entre A et B (récepteur), l'énergie électrique dispo- nible sera convertie sous une forme ou une autre. Dans le cas simple où entre A et B ne se trouve qu'une résistance R, la puissance disponible P ne sert qu'à faire chauffer la résistance puisque $U = RI$. Cela se traduit par une dissipation d'énergie sous forme de chaleur, appelée effet Joule, et dont la puissance vaut

$$P_J = RI^2$$

Cette énergie électrique peut être également reconvertie en rayonnement (lampe), énergie mécanique (moteur), chimique (bac à électrolyse) ou même énergie cinétique ordonnée (diode à vide). Toute chaleur dégagée par le conducteur correspond à un gain d'énergie d'agitation thermique : cela signifie que de l'énergie cinétique a été communiquée au cristal par les électrons de conduction.

3. Nécessité d'une force électromotrice ou fém

Si on applique le raisonnement précédent à un circuit fermé, c'est à dire si l'on regarde la puissance totale fournie entre A(point de départ) et A(point d'arrivée) par la force de Coulomb, on obtient :

$$P = I \int_A^A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I\big[V(A) - V(A)\big]$$

c'est à dire une puissance nulle ! Cela signifie qu'il ne peut y avoir de courant en régime permanent. Lorsque qu'il y a un courant, alors cela implique que la force de Coulomb n'est pas responsable du mouvement global des porteurs de charge dans un conducteur.

Le courant dans un conducteur peut être compris avec l'analogie de la rivière circulant dans son lit. Pour qu'il y ait un écoulement, il faut que l'eau s'écoule d'une région plus élevée vers une région plus basse (d'une énergie gravitationnelle plus haute (élevée) vers une autre plus basse (plus faible)). Ainsi, le mouvement de l'eau d'un point élevé vers un point plus bas est bien dû à la simple force de gravitation. Mais si l'on veut constituer un circuit fermé, alors il faut fournir de l'énergie (grâce à une pompe) pour amener l'eau à une plus grande hauteur, et le cycle peut alors effectivement recommencer.

C'est exactement ce qui se passe dans un circuit électrique : une force autre que la force électrostatique doit permettre aux porteurs de charge de remonter le potentiel.

Le siège de la force responsable du courant dans un circuit est appelé le générateur. Regardons donc attentivement ce qui se passe à l'intérieur d'un générateur, où A correspond à la borne $\ominus$, B à la borne $\oplus$, le courant circulant donc de B vers A à l'extérieur du générateur. En régime permanent, les charges ne s'accumulent en aucun point du circuit, il y a libre circulation des charges : cela implique donc que les charges doivent traverser le générateur. Or, $V(B) > V(A)$, ce qui signifie qu'il y a un champ électrostatique $\vec{E}_s$ dirigé de B vers A à l'intérieur du générateur. Quel que soit le signe des porteurs de charge responsables du courant, si celui-ci va de B vers A à l'extérieur, alors $\vec{E}_s$ s'oppose au mouvement des charges à l'intérieur. La seule façon d'obtenir un régime stationnaire avec un courant permanent I, c'est donc d'avoir un champ supplémentaire, appelé champ électromoteur $\vec{E}_m$, supérieur en norme et dirigé en sens inverse de $\vec{E}_s$.

Mettons maintenant le générateur en circuit ouvert ($I = 0$). Le fait qu'une différence de potentiel (ddp) se maintienne entre ses bornes implique nécessairement la présence d'une autre force compensant l'attraction coulombienne. Ainsi, la force totale s'exerçant sur une charge q doit s'écrire $\vec{F} = q(\vec{E}_s + \vec{E}_m)$ et, à l'équilibre et en l'absence de courant, on doit donc avoir $\vec{E}_s + \vec{E}_m = 0$. Cela signifie donc que la ddp ou tension mesurée aux bornes d'un générateur ouvert vaut

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}_s \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_A^B \vec{E}_m \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

où , bien évidemment, $V_A - V_B < 0$. On appelle (de façon un peu maladroite) la force électromotrice ou fém du générateur la quantité e ($e > 0$ est exprimée en Volts) de sorte :

$$e = \int_A^B \vec{E}_m \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

Dorénavant, on utilisera la notation $\vec{E}_s$ pour le champ électrostatique et $\vec{E}_m$ pour le champ électromoteur.

Puisque, à l'intérieur du générateur, on a $\vec{E}_s = -\vec{E}_m \neq \vec{0}$ en l'absence de courant, cela signifie qu'un générateur est un conducteur non-équipotentiel.

A l'équilibre, mais en présence d'un courant I (générateur branché dans un circuit fermé), les porteurs de charge responsables de ce courant subissent une force supplémentaire, due aux collisions se produisant à l'intérieur du conducteur. Pour un géné- rateur idéal, ces collisions sont négligeables et l'on obtient $V_A - V_B = -e$. En revanche, pour un générateur non idéal, de telles collisions se produisent et se traduisent par l'existence d'une résistance interne r. D'après le modèle de Drude, on a :

$$\int_A^B \left(\vec{E}_s + \vec{E}_m - \frac{k}{q}\vec{v}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$V_A - V_B + e = \int_A^B \frac{k}{q}\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B \eta\vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = rI$$

C'est à dire une tension aux bornes du générateur $V_A - V_B = rI - e$. La résistance interne de celui-ci introduit une chute de tension, ce qui fait qu'il délivre une tension inférieure à celle donnée par sa fém.

Les générateurs diffèrent selon la source d'énergie utilisée et la méthode de conversion de celle-ci en énergie électrique (autrement dit, selon la nature de E_m). On peut ainsi produire de l'énergie électrique à partir d'une pile (énergie chimique), d'un générateur électrostatique (énergie mécanique, ex machine de Van de Graaf), d'une dynamo (énergie mécanique), d'une pile solaire (énergie du rayonnement) ou d'un thermocouple (chaleur, c'est à dire énergie cinétique désordonnée).

Dans la suite, nous supposerons simplement l'existence d'une fém e dans un circuit, localisée dans un dipôle appelé générateur, sans préciser sa nature.

Reprenons le calcul fait précédemment mais appliquons-le cette fois-ci à l'ensemble du circuit. Soit alors V le volume total occupé par le conducteur formant le circuit et $\vec{F}$ la force s'exerçant sur les charges mobiles q et donc responsable de leur mouvement. La puissance totale P qui doit être fournie en régime permanent est alors

$$
\begin{aligned}
P &= \iiint_V nP_q \mathrm{d}V = \oint \mathrm{d}l \iint_{section} nP_q \mathrm{d}S \\
&= \oint_{section} \mathrm{d}l \iint_{section} n\vec{F} \cdot \vec{v} \mathrm{d}S \\
&= \oint_{section} \iint (nq\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}) \frac{\vec{F} \cdot d\vec{l}}{q} \\
&= \oint_{circuit} \frac{\vec{F} \cdot d\vec{l}}{q} \iint_{section} \iint (\vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}) \\
&= \oint_{circuit} \frac{\vec{F} \cdot d\vec{l}}{q} \\
&= Ie
\end{aligned}
$$

où

$$
e = \oint_{circuit} \frac{\vec{F} \cdot d\vec{l}}{q} = \oint_{circuit} \vec{E}_m \cdot d\vec{l}
$$

est la fém totale du circuit. L'intégrale portant sur l'ensemble du circuit, la fém totale est donc la somme des fém présentes le long du circuit. Si celles-ci sont localisées dans des dipôles, l'expression précédente devient

$$
e = \sum_k e_k
$$

où les e_k sont les valeurs algébriques des différentes fém :
- ⊙ $e_k > 0$ correspond à un générateur (production d'énergie électrique) ;
- ⊙ $e_k < 0$ correspond à un récepteur (consommation d'énergie électrique).

Un moteur convertit de l'énergie électrique en énergie mécanique et correspond donc à un récepteur de fém négative : on dit également qu'il possède une force contre-électro- motrice ou fcém.

IV - Lois régissant les circuits électriques

1. Loi d'Ohm généralisée

Considérons un brin AB d'un circuit électrique fermé, parcouru par un courant I, de résistance R et ayant une fém e. La loi d'Ohm généralisée s'écrit

$$V_A - V_B = RI - e$$

Remarques :

- ⊙ Cette expression n'est valable que lorsque le courant s'écoule de A vers B.
- ⊙ On peut réinterpréter la résistance R comme étant la résistance totale du brin AB (fil, résistance et résistance interne du générateur) et e comme la fém totale (somme algébrique de toutes les fém).
- ⊙ L'effet Joule fait chuter le potentiel tandis que le générateur ($e > 0$) remonte le potentiel.
- ⊙ Si $e < 0$, cela signifie que le dipôle associé fait chuter le potentiel. On appelle alors e la force contre-électromotrice (fcém). Elle peut être due soit à un moteur (récepteur pur), soit à un générateur dont la polarité est opposée à celle du générateur principal, responsable du courant circulant entre A et B.

2. Lois de conservation dans un circuit (lois de Kirchhoff)

Les lois de l'électrocinétique, connues sous le nom de lois de Kirchhoff, sont en fait de simples lois de conservation.

a. Conservation du courant (loi des nœuds)

Soit un nœud quelconque du circuit sur lequel arrive un certain nombre de fils. Sur chacun de ces fils, circule un courant. En régime permanent, la conservation de la charge électrique se traduit par la conservation du courant : en aucun point du circuit il ne peut y avoir accumulation (ou perte) de charges. Cela signifie donc que l'ensemble des courants entrants compense exactement les courants sortants,

$$\sum I_{\text{entrants}} = \sum I_{\text{sortants}}$$

Ceci constitue la loi des nœuds ou l'équation aux nœuds.

b. Conservation de l'énergie (loi des mailles)

Soit une maille d'un circuit constituée de n branches. L'équation aux branches pour la $k-^{\text{ième}}$ branche s'écrit $U_k = R_k I_k - e_k$ où R_k, I_k et e_k

sont respectivement la résistance totale, le courant et la fém contenues dans cette branche. La conservation de l'énergie pour cette maille s'exprime par le fait que, partant du nœud 1 et revenant à ce nœud, on retrouve le même potentiel, c'est à dire $V_1 - V_1 = V_1 - V_2 + \cdot + V_n - V_1 = U_1 + \cdot + U_n = 0$. La loi des mailles (ou équation de maille) s'exprime tout simplement par

$$\sum_{k=1}^{n}(R_k I_k - e_k) = 0$$

3. Résolution pratique des équations en électrocinétique

En général, on cherche à calculer les courants I_k qui circulent dans chacune des branches d'un circuit, étant donné ses résistances R_k et ses générateurs (ou récepteurs, selon le sens de branchement) e_k . Du fait des lois de conservation ci-dessus, un circuit comportant n branches n'a pas n courants I_k indépendants les uns des autres. Le nombre réel d'inconnues est en fait $M = B - N + 1$; où B est le nombre de branches du circuit et N le nombre de nœuds. Pour résoudre ce problème on utilisera la méthode suivante :

- ⋆ Choisir M mailles indépendantes, c'est à dire ayant au moins une branche non partagée avec une autre maille.
- ⋆ Sur chacune de ces mailles, définir un sens de parcours arbitraire pour le courant de maille I_m.
- ⋆ Écrire les M équations de maille $\sum_{k=1}^{n}(R_k I_m - e_k) = 0$, en suivant le sens de parcours choisi pour I_m. Pour être en accord avec la convention de la loi d'Ohm généralisée, le signe de chaque fém e_k doit dépendre de la polarité rencontrée en suivant le courant. Ainsi, si l'on rencontre la borne $\oplus$, on met un signe + ($R_k I_m + e_k = 0$), tandis que si l'on rencontre la borne $\ominus$, on met le signe − ($R_k I_m - e_k = 0$).

En suivant cette méthode, on obtient M équations à M inconnues (les courants de maille). Si, après calculs, un courant de maille est positif, cela signifie qu'il est effectivement dans le sens choisi initialement.

On détermine enfin les courants réels I_k circulant dans chaque branche (courants de branches), en choisissant arbitrairement leur sens, puis en exprimant ceux-ci en fonction des M courants de maille I_m.

On pourra vérifier que cette méthode permet de satisfaire automatiquement la conservation du courant (loi des nœuds).

Exemple : Le pont de Wheatstone (cf . TD, série 03).

Le pont de Wheatstone possède $M = 6 - 4 + 1 = 3$ *mailles indépendantes. On choisit par exemple les* 3 *mailles suivantes :*

- *ABDA, de courant de maille* i_1 *allant de A vers B.*
- *BCDB, de courant de maille* i_2 *allant de B vers C.*
- *GADCG, de courant de maille* i_3 *allant de A vers C.*

En choisissant arbitrairement le sens des 6 courants de branche I_k *comme sur la figure, on obtient les relations suivantes :*

$$I_1 = i_3 \qquad I_2 = i_3 - i_1 \qquad I_3 = i_3 - i_2$$
$$I_4 = i_1 \qquad I_5 = i_2 \qquad I_6 = i_1 - i_2$$

qui satisfont bien automatiquement la conservation du courant aux 4 nœuds

$$I_1 = I_2 + I_4 \qquad I_3 = I_2 + I_6 \qquad I_4 = I_5 + I_6 \qquad I_1 = I_3 + I_5$$

Il ne nous reste plus qu'à écrire les 3 équations de maille (étape 3) pour calculer les 3 courants de maille, puis en déduire les courants réels I_k *circulant dans chaque branche. En utilisant cette méthode, on se ramène à la résolution d'un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues, au lieu d'un système linéaire de 6 équations à 6 inconnues*

4. Le théorème de Thèvenin

Enoncé : *tout réseau linéaire compris entre deux bornes A et B, aussi compliqué soit-il, est équivalent à un générateur unique de fém e et de résistance interne r telles que*

⊙ $e = E$ *est la tension mesurée entre A et B à l'aide d'un voltmètre ;*

⊙ $r = R_{\text{eq}}$ *, où* R_{eq} *est la résistance équivalente du réseau, obtenue en posant que toutes les fém et fcém sont nulles.*

La démonstration est assez simple. Considérons un réseau constitué de n fém algébriques e_k. Si ce réseau est linéaire, c'est à dire si sa courbe caractéristique $I = f(U)$ est une droite, alors

$$I = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k + b \cdot U$$

où les a_k et b sont des constantes ne dépendant que des résistances du circuit et qui sont donc à déterminer. Si l'on place un voltmètre parfait (résistance interne infinie) aux bornes du réseau, le courant I est nul et on mesure une tension $V_A - V_B = E$, ce qui fournit $\sum_k a_k e_k + b \cdot E = 0$ c'est à dire

$$I = b(U - E)$$

Maintenant, si l'on pose $e_k = 0$, c'est à dire si l'on remplaçait tous les générateurs et tous les récepteurs par uniquement leurs résistances internes, alors $E = 0$: le réseau se ramène à une simple résistance équivalente. Celle-ci serait alors mesurable en traçant la courbe caractéristique $I_{\text{ext}} = f(U)$, où le courant I_{ext} serait produit grâce à un générateur externe fournissant une tension U. En faisant attention au signe du courant, on obtiendrait

$$I = -bU = -\frac{U}{R_{\text{eq}}}$$

où le signe moins est dû au fait que le courant est ici en sens inverse de celui produit par le réseau lui-même ($I = -I_{\text{ext}}$). En rassemblant ces deux cas particuliers, on obtient que la tension aux bornes du réseau peut toujours s'écrire

$$V_A - V_B = E - R_{\text{eq}} I$$

Ceci achève la démonstration du théorème de Thèvenin.