TD N°1 : Rappels et Compléments Mathématiques

Exercice 1 : Calcul de quelques intégrales

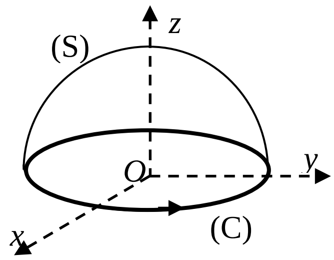
Calculer par intégration les quantités suivantes :

- **a)** Le périmètre et la surface d'un disque de centre O et de rayon R.
- **b)** La surface et le volume d'une sphère de centre O et de rayon R.
- **c)** La surface latérale et le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h.

Exercice 2 : Circulation d'un champ de vecteur

On considère le champ de vecteur : $\vec{A} = 2y\vec{\imath} + 3x\vec{\jmath} - z^2\vec{k}$,
(S) la surface de l'hémisphère supérieur d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

et (C) le contour sur lequel s'appuie cet hémisphère (figure ci-contre).



- **a)** Calculer la circulation de $\vec{A}$ le long du cercle (C)
- **b)** Calculer le rotationnel de $\vec{A}$
- **c)** Enoncer et vérifier le théorème de Stokes pour le champ de vecteurs $\vec{A}$.

Exercice 3 : Flux d'un champ de vecteur

Soit O l'origine du système de coordonnées et $\vec{V} = \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, un champ de vecteurs.

1) Calculer la divergence de $\vec{V}$ en coordonnées cartésiennes.
2) Ecrire $\vec{V}$ en coordonnées sphériques. Calculer son flux à travers la surface d'une sphère de centre *O* et de rayon *R*. Calculer la divergence de $\vec{V}$ en coordonnées sphériques et montrer que le théorème de Green-Ostrogradsky est vérifié dans ce cas.
3) Ecrire $\vec{V}$ en coordonnées cylindriques et calculer son flux à travers la surface d'un cylindre d'axe Oz, de hauteur *h*, de rayon *R* et dont le cercle de base contient le point *O*. Calculer la divergence de $\vec{V}$ en coordonnées cylindriques et vérifier la validité du théorème de Green-Ostrogradsky.

   On donne : En coordonnées cylindriques : $div\vec{V} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(V_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

   En coordonnées sphériques : $div\vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}$

Exercice 4 : Calcul d'angle solide

Soit O l'origine du système de coordonnées et $\vec{E}(M) = \frac{\vec{r}}{r^3}$, ($\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$) un champ de vecteurs défini en tout point de l'espace, sauf en O.

1) Calculer le flux de $\vec{E}(M)$ à travers un cône de sommet O, de demi-angle au sommet θ et de hauteur *h*.
2) En déduire l'angle solide sous lequel "on voit" un disque à partir d'un point *O* de son axe.
3) Quel est l'angle solide correspondant à une moitié d'espace ? A l'espace entier ?

* * * * *