

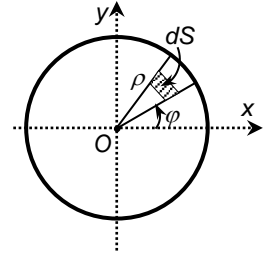
**SMIA- S2 / Printemps-Eté 2021**  
**TD N°1 : CORRIGE**

**Exercice 1.**

a) Périmètre et surface d'un disque :

$$\blacklozenge P_{\text{disque}} = \int_C dl \quad , \quad dl = R d\varphi \Rightarrow P_{\text{disque}} = \int_0^{2\pi} R d\varphi = 2\pi R = 2\pi R$$

$$\blacklozenge S_{\text{disque}} = \iint_{\text{disque}} ds \quad ; \quad ds = \rho d\rho d\varphi \Rightarrow S_{\text{disque}} = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R^2$$



b) Surface de la sphère :  $\alpha = \pi \Rightarrow S_{\text{(Sphère)}} = 4\pi R^2$

$$S_{\text{sphère}} = \iint_{\text{sphère}} ds = \iint_{\text{sphère}} R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = R^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2$$

$$\blacklozenge \text{Volume de la sphère : } V_{\text{sphère}} = \iiint_{\text{sphère}} dv \quad ; \quad dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$V_{\text{sphère}} = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3$$

c) Surface latérale du cylindre :  $ds = R d\varphi dz \Rightarrow S_{\text{cyl}} = \iint_{\text{cyl}} ds = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz = 2\pi Rh$

$$\blacklozenge \text{Volume : } V_{\text{cyl}} = \iiint_{\text{cyl}} dv \quad ; \quad dv = \rho d\rho d\varphi dz \Rightarrow V_{\text{cyl}} = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz = \pi R^2 h$$

**Exercice 2**

$$\vec{A} = 2y\vec{i} + 3x\vec{j} - z^2\vec{k}$$

a) Calcul de la circulation de  $\vec{A}$  sur le contour (C).

En coord. polaires :  $d\vec{l} = R d\varphi \vec{e}_\varphi$  où  $\vec{e}_\varphi$  est le vecteur unitaire tangent à (C) :

$\vec{A}$  et  $d\vec{l}$  doivent être exprimés dans le même système de coordonnées

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j} \Rightarrow d\vec{l} = -R \sin\varphi d\varphi \vec{i} + R \cos\varphi d\varphi \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot d\vec{l} = -2yR \sin\varphi d\varphi + 3xR \cos\varphi d\varphi$$

avec  $x = R \cos\varphi$  et  $y = R \sin\varphi$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot d\vec{l} = -2R^2 \sin^2\varphi d\varphi + 3R^2 \cos^2\varphi d\varphi = R^2 (5\cos^2\varphi - 2) d\varphi$$

$$\text{On en déduit la circulation sur (C) : } C = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = R^2 \int_0^{2\pi} (5\cos^2\varphi - 2) d\varphi$$

$$C = 5R^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi - 2R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 5\pi R^2 - 4\pi R^2 = \pi R^2 = 9\pi$$

b) Calcul de  $\text{rot } \vec{A}$  :  $\text{rot } \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \vec{k}$

c) Théorème de Stokes (S) : Surface quelconque s'appuyant sur un contour fermé (C).

$\vec{A}$  : Champ de vecteurs défini  $\forall M \in (S)$ .

La circulation de  $\vec{A}$  le long de (C) est égale au flux du  $\text{rot } \vec{A}$  à travers la surface quelconque (S)

$$\text{s'appuyant sur (C) : } C = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad ;$$

Calcul de flux de  $\text{rot } \vec{A}$  à travers la surface S de l'hémisphère supérieur

sur la surface S on a :  $d\vec{s} = ds \cdot \vec{n} = ds \cdot \vec{e}_r = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$ ,

$$\Phi(\text{rot } \vec{A} / S) = \iint_S \vec{k} \cdot ds \vec{e}_r = R^2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R^2 = 9\pi = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Donc le théorème de Stokes est vérifié dans ce cas.

