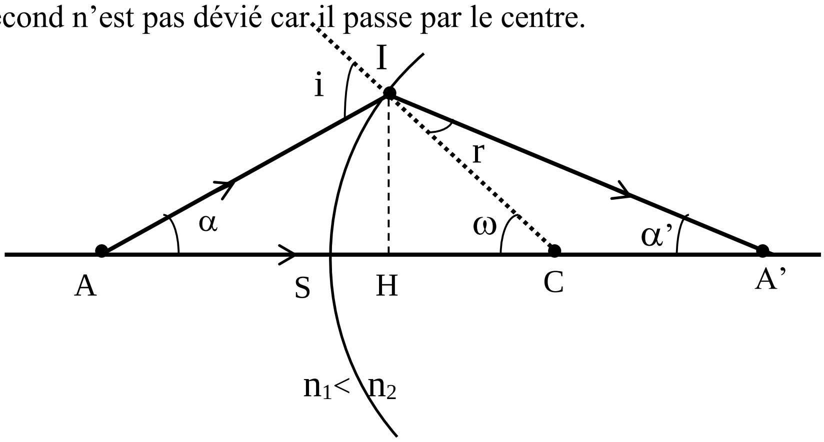
# Chapitre 4 : Dioptres sphériques

## I. Dioptres sphériques

Un dioptre sphérique est une surface sphérique séparant deux milieux transparents, homogènes et d'indices différents.

### I-1. Relations des dioptres sphériques

Soit un dioptre sphérique de rayon $\overline{SC}$ séparant les milieux d'indices $n_1$ et $n_2$. Déterminons l'image A' d'un objet ponctuel A en utilisant un rayon faisant un angle d'incidence i et le rayon qui passe par le sommet S. Le premier rayon est réfracté sous un angle r au point d'incidence I, alors que le second n'est pas dévié car il passe par le centre.




Dans le triangle IAH : $tg\alpha = \dfrac{\overline{HI}}{\overline{AH}}$

Dans le triangle IA'H : $tg\alpha' = \dfrac{\overline{HI}}{\overline{HA'}}$

Dans le triangle IHC : $tg\omega = \dfrac{\overline{HI}}{\overline{HC}}$

La position de A' dépend de I, le dioptre n'est pas stigmatique. Pour qu'il y'ait stigmatisme, il faut se mettre dans les conditions de Gauss : rayons voisins de l'axe et peu inclinés. Dans ces conditions, on peut effectuer les approximations suivantes :

$$\overline{HC} \approx \overline{SC} \; ; \; tg\alpha \approx \alpha = \frac{\overline{HI}}{\overline{AH}} \; ; \; \alpha' = \frac{\overline{HI}}{\overline{HA'}} \text{ et } \omega = \frac{\overline{HI}}{\overline{HC}}$$

$n_1.i = n_2.r$, puisque $n_1.\sin i = n_2.\sin r$ avec i et r faibles, avec $\omega = r + \alpha' = i - \alpha$

Ce qui donne :

$$n_1(\omega + \alpha) = n_2(\omega - \alpha')$$

$$n_1\alpha + n_2\alpha' = \omega(n_2 - n_1)$$

D'où:

$$n_1 \frac{\overline{HI}}{\overline{AH}} + n_2 \frac{\overline{HI}}{\overline{HA'}} = (n_2 - n_1) \frac{\overline{HI}}{\overline{HC}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n_1}{\overline{AH}} + \frac{n_2}{\overline{HA'}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{HC}}$$

Qu'on peut écrire :

$$\frac{n_1}{\overline{AS}} + \frac{n_2}{\overline{SA'}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}$$

ou encore :

$$\boldsymbol{\frac{n_2}{\overline{SA'}} - \frac{n_1}{\overline{SA}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}}$$

C'est la relation de conjugaison des dioptres sphériques avec origine au sommet.

En posant $\overline{SA'} = \overline{SC} + \overline{CA'}$ et $\overline{SA} = \overline{SC} + \overline{CA}$, on obtient la relation de conjugaison avec origine au centre:

$$\boldsymbol{\frac{n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n_2}{\overline{CA}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}}}$$

Dans le cas d'un dioptre plan, en faisant tendre $\overline{SC}$ vers l'infini dans la relation de conjugaison avec origine au sommet, on retrouve la relation de conjugaison du dioptre plan:

$$\boldsymbol{\frac{n_2}{\overline{SA'}} = \frac{n_1}{\overline{SA}}}$$

## I-2. Foyers et vergence du dioptre sphérique

### *a- Foyer objet*

Si le point A' est très éloigné du dioptre, càd $\overline{SA'} \to \infty$, la relation des dioptres sphériques devient : $\frac{n_1}{\overline{AS}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}$

Le point A est situé en un point F appelé foyer objet du dioptre :

$$\frac{n_1}{\overline{FS}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}$$

D'où :

$$\overline{FS} = \frac{n_1 \overline{SC}}{n_2 - n_1}$$

En prenant le sommet S comme origine :

$$\boldsymbol{\overline{SF} = \frac{n_1 \overline{SC}}{n_1 - n_2}}$$

### b- Foyer image

Cette fois, c'est le point A qui est très éloigné du dioptre : $\frac{n_1}{\overline{AS}} \approx 0$

Ce qui donne :

$$\frac{n_2}{\overline{SA'}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}$$

L'image du point A est située en un point sur l'axe, F', dit foyer image.

$$\frac{n_2}{\overline{SF'}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}$$

$$\overline{\mathbf{SF'}} = \frac{\mathbf{n_2}\overline{\mathbf{SC}}}{\mathbf{n_2 - n_1}}$$

A partir des expressions précédentes, on déduit :

$$\overline{SF} + \overline{SF'} = \overline{SC} \text{ et } \frac{\overline{SF'}}{\overline{SF}} = -\frac{n_2}{n_1}$$

### c- Vergence du dioptre sphérique

La position et la nature des foyers objet F et image F' dépendent des indices $n_1$, $n_2$ et du rayon de courbure $\overline{SC}$. On définit la vergence V du dioptre sphérique par:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{n_2}}{\overline{\mathbf{SF'}}} = -\frac{\mathbf{n_1}}{\overline{\mathbf{SF}}} = \frac{\mathbf{n_2 - n_1}}{\overline{\mathbf{SC}}}$$

Si la vergence d'un dioptre sphérique est positive, les foyers objet F et image F' sont réels, le dioptre est convergent. Dans le cas contraire, si la vergence est négative, les foyers objet F et image F' sont virtuels, le dioptre est divergent. Le tableau suivant dresse la nature des dioptres sphériques en fonction des valeurs $n_1$, $n_2$ et $\overline{SC}$.

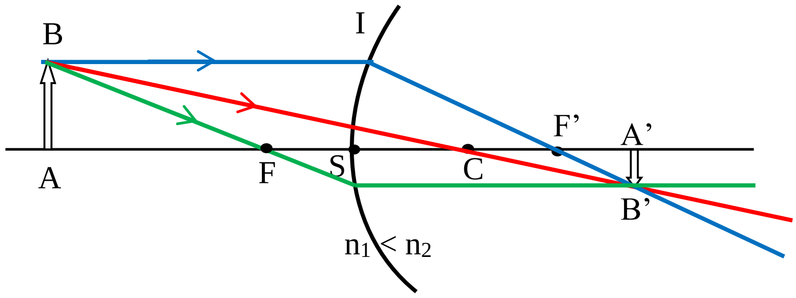
| $n_2 - n_1$ | $\overline{SC}$ | Vergence V | Nature des foyers objet F et image F' | Nature du dioptre |
|---|---|---|---|---|
| $n_2 - n_1 > 0$ | $\overline{SC} > 0$ | positive | réels | convergent |
| | $\overline{SC} < 0$ | négative | virtuels | divergent |
| $n_2 - n_1 < 0$ | $\overline{SC} > 0$ | négative | virtuels | divergent |
| | $\overline{SC} < 0$ | positive | réels | convergent |

## II. Construction des images

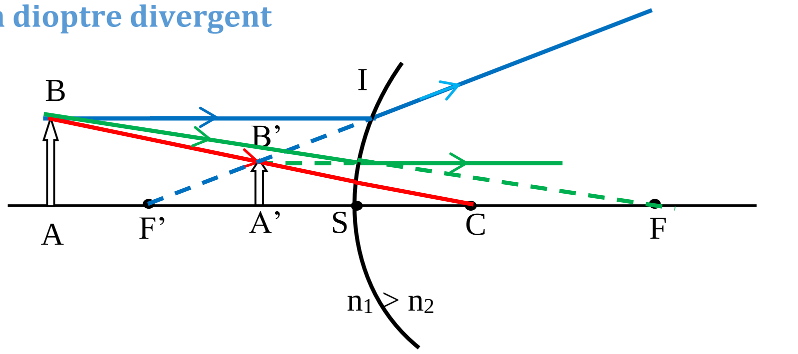
Pour réaliser les constructions géométriques, les rayons particuliers suivants sont utilisés:

- Un rayon qui arrive parallèlement à l'axe passe par le foyer image F'
- Un rayon qui passe par le foyer objet F sort parallèlement à l'axe optique du dioptre
- Un rayon qui passe par le centre C du dioptre n'est pas dévié.

### II-1. Cas d'un dioptre convergent




### II-2. Cas d'un dioptre divergent



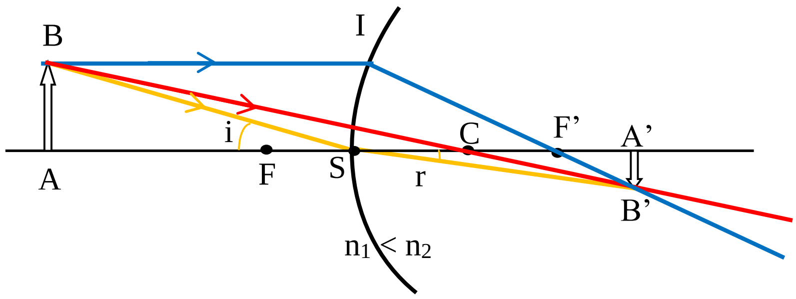

## III. Calcul du grandissement transversal

On définit le grandissement transversal par

$$\gamma_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

### III-1 Grandissement transversal avec origine au sommet

Puisque B' est l'image de B, tous les rayons issus de B passent par B'. Prenons le rayon issu de B qui passe par le sommet S sous une incidence i et qui réfracté sur B' sous un angle de réfraction r.



En considérant le rayon BS passant par le sommet du dioptre qui passe par B', on a :

$$tgi=\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} \qquad tgr=\frac{\overline{B'A'}}{\overline{SA'}}$$

Dans l'approximation de Gauss : $n_1.i = n_2.r$, ce qui donne :

$$n_1.\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}}=n_2.\frac{\overline{B'A'}}{\overline{SA'}}=-n_2.\frac{\overline{A'B'}}{\overline{SA'}}$$

Le grandissement transversal est donné par :

$$\boldsymbol{\gamma_t=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{n_1}{n_2}\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}}$$

### III-2. Grandissement transversal avec origine au centre

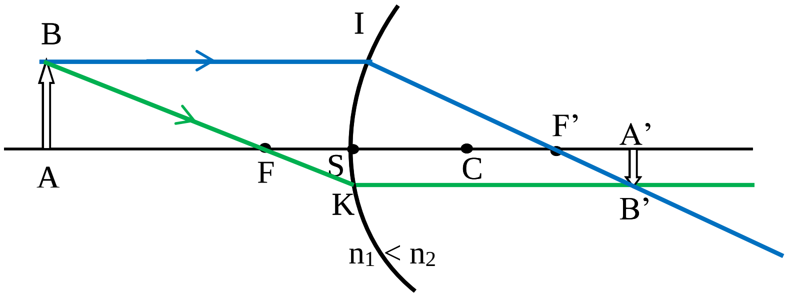
A partir de la figure précédente, on peut écrire

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{B'A'}}{\overline{CA'}}$$

Ce qui donne l'expression du grandissement avec origine au centre $\gamma_t$

$$\boldsymbol{\gamma_t=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}}$$

### III-3. Grandissement avec origine aux foyers




A partir de la figure ci-dessus, dans les conditions de l'approximation de gauss, on tire :

$$\frac{\overline{SI}}{\overline{SF'}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{SF'}}=\frac{\overline{B'A'}}{\overline{F'A'}}$$

Ce qui donne l'expression du grandissement transversal avec origine au foyer image F':

$$\boldsymbol{\gamma_t=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'S}}}$$

De même, on a :

$$\frac{\overline{KS}}{\overline{FS}}=\frac{\overline{B'A'}}{\overline{FS}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}$$

D'où l'expression du grandissement transversal avec origine au foyer objet F

$$\boldsymbol{\gamma_t=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{FS}}{\overline{FA}}}$$

En faisant l'égalité entre les deux expressions du grandissement transversal avec origine au foyer objet F et au foyer image F', on obtient la relation de Newton suivante

$$\mathbf{\overline{F'A'}.\overline{FA} = \overline{F'S'}.\overline{FS}}$$

Qui représente la relation de conjugaison du dioptre sphérique avec origine aux foyers.

## IV. Grandissement axial ou longitudinal

Dans le cas d'un objet avec une structure allongée, le grandissement axial $\gamma_a$ est défini par :

$$\gamma_a = \frac{d\overline{SA'}}{d\overline{SA}}$$

En différenciant la relation de conjugaison du dioptre sphérique avec origine au sommet

$$\frac{n_2}{\overline{SA'}} - \frac{n_1}{\overline{SA}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}$$

On obtient l'expression du grandissement axial

$$\boldsymbol{\gamma_a = \frac{d\overline{SA'}}{d\overline{SA}} = \frac{n_1\overline{SA'^2}}{n_2\overline{SA^2}} = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{n_1\overline{SA'}}{n_2\overline{SA}}\right)^2 = \frac{n_2}{n_1}.{\gamma_t}^2}$$