Cours d'optique géométrique n°6

Vendredi 3 mai 2021

Dioptres sphériques

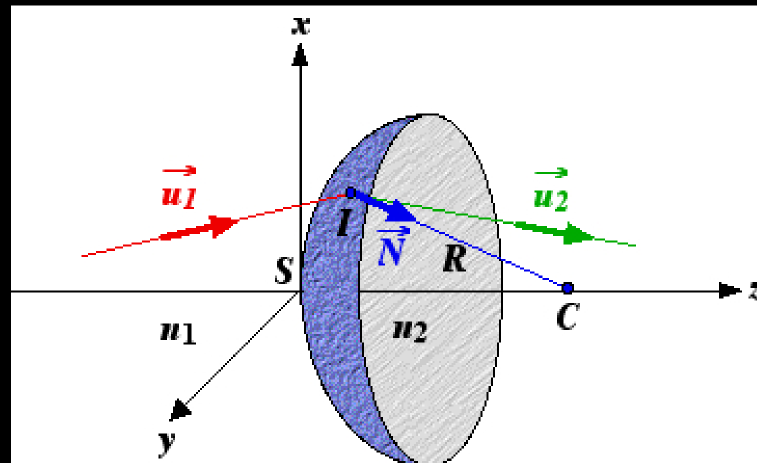
Pr. Hamid TOUMA

Département de Physique

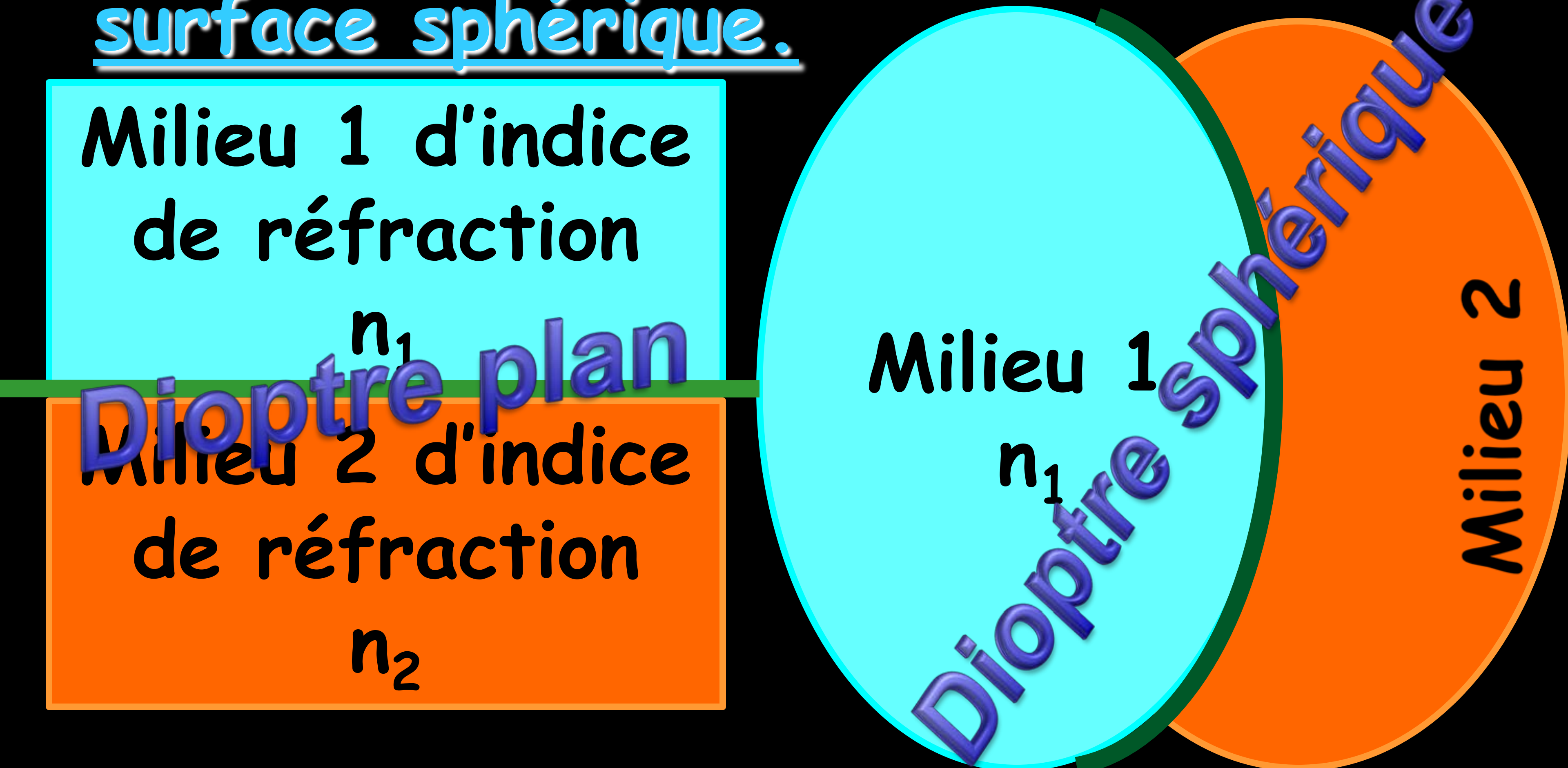
Faculté des Sciences de Rabat

Université Mohamed V Rabat Agdal

Dioptre sphérique

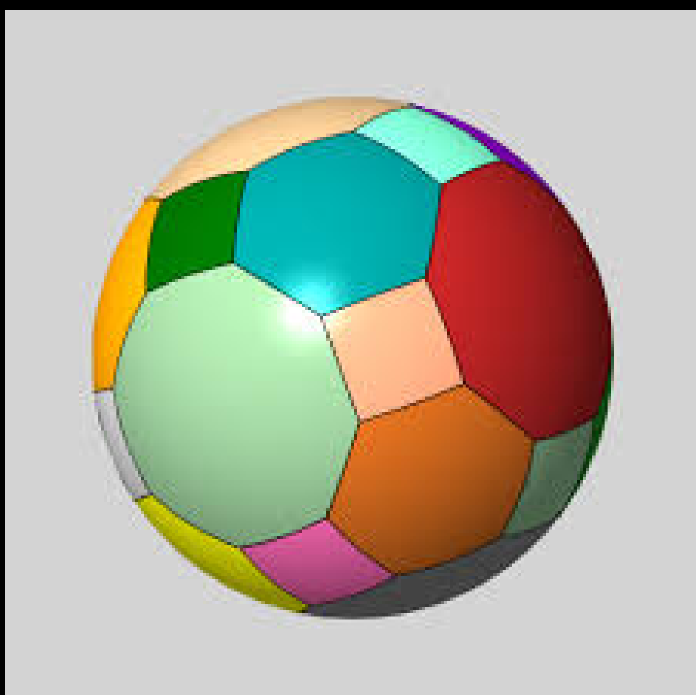


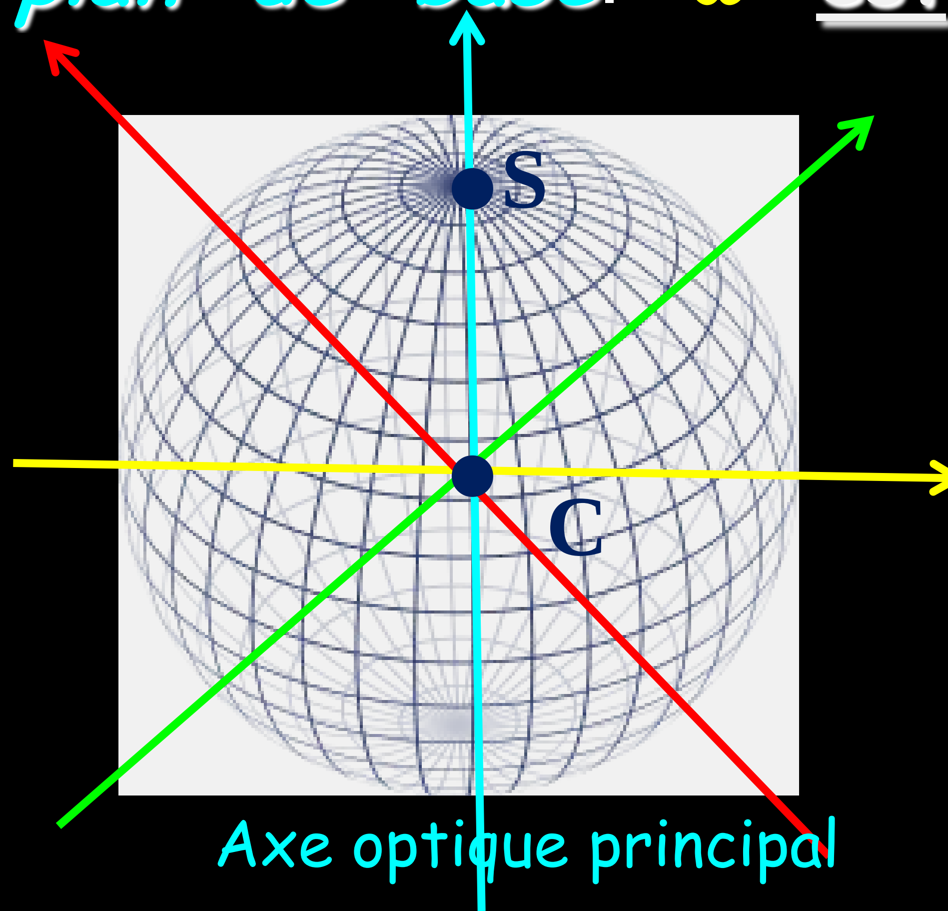
- **Définition : Un dioptre sphérique est un ensemble de <u>deux milieux homogènes</u> d'indices de réfraction différents n_1 et n_2, séparés par une <u>surface sphérique.</u>**

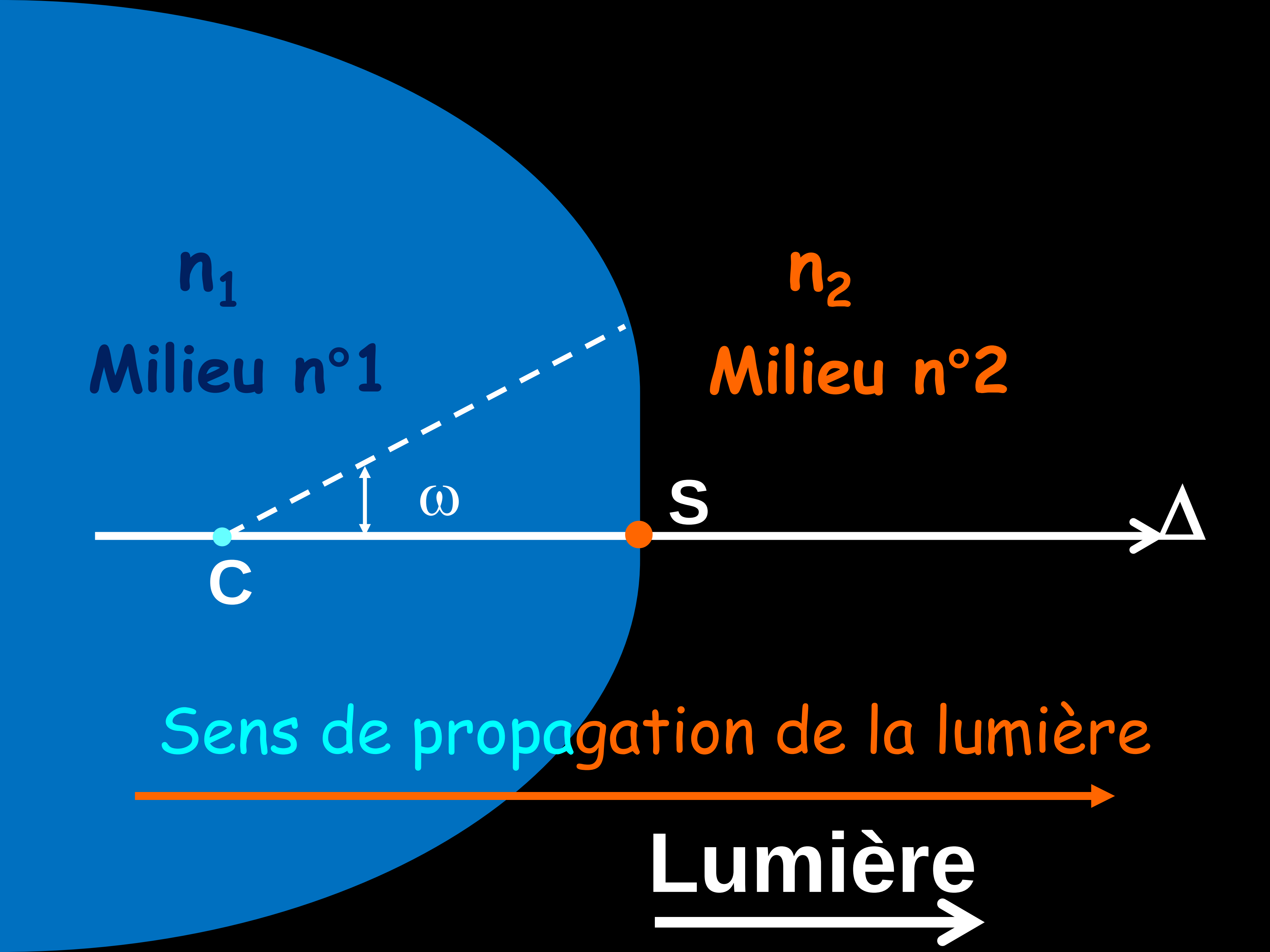


- Tout diamètre de la sphère est un axe optique du dioptre sphérique.

- L'axe optique principal Δ, du **dioptre sphérique** de sommet S, est ***l'axe perpendiculaire au plan de base***. ω **<u>est l'angle d'ouverture</u>**

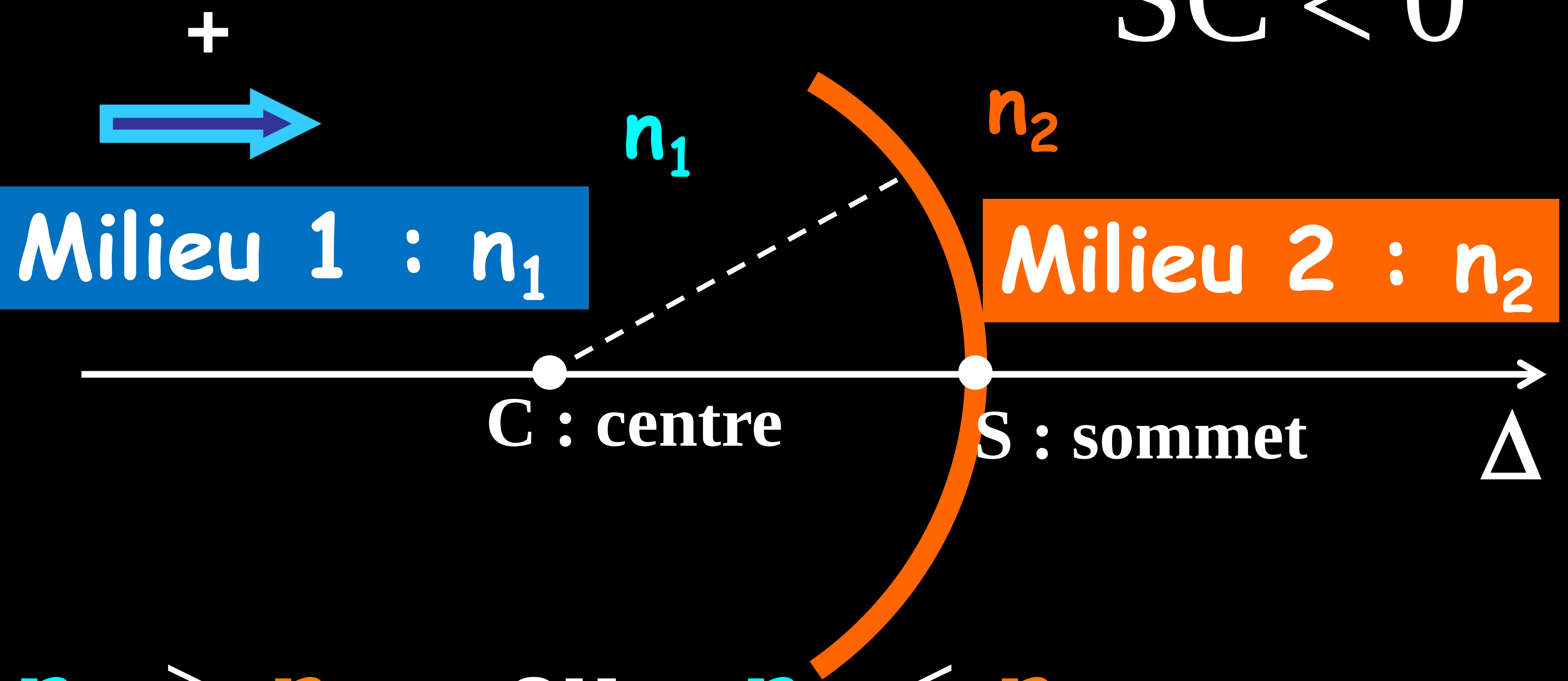





n_1
Milieu n°1
n_2
Milieu n°2
ω
S
Δ
C
Sens de propagation de la lumière
Lumière

dioptre sphérique

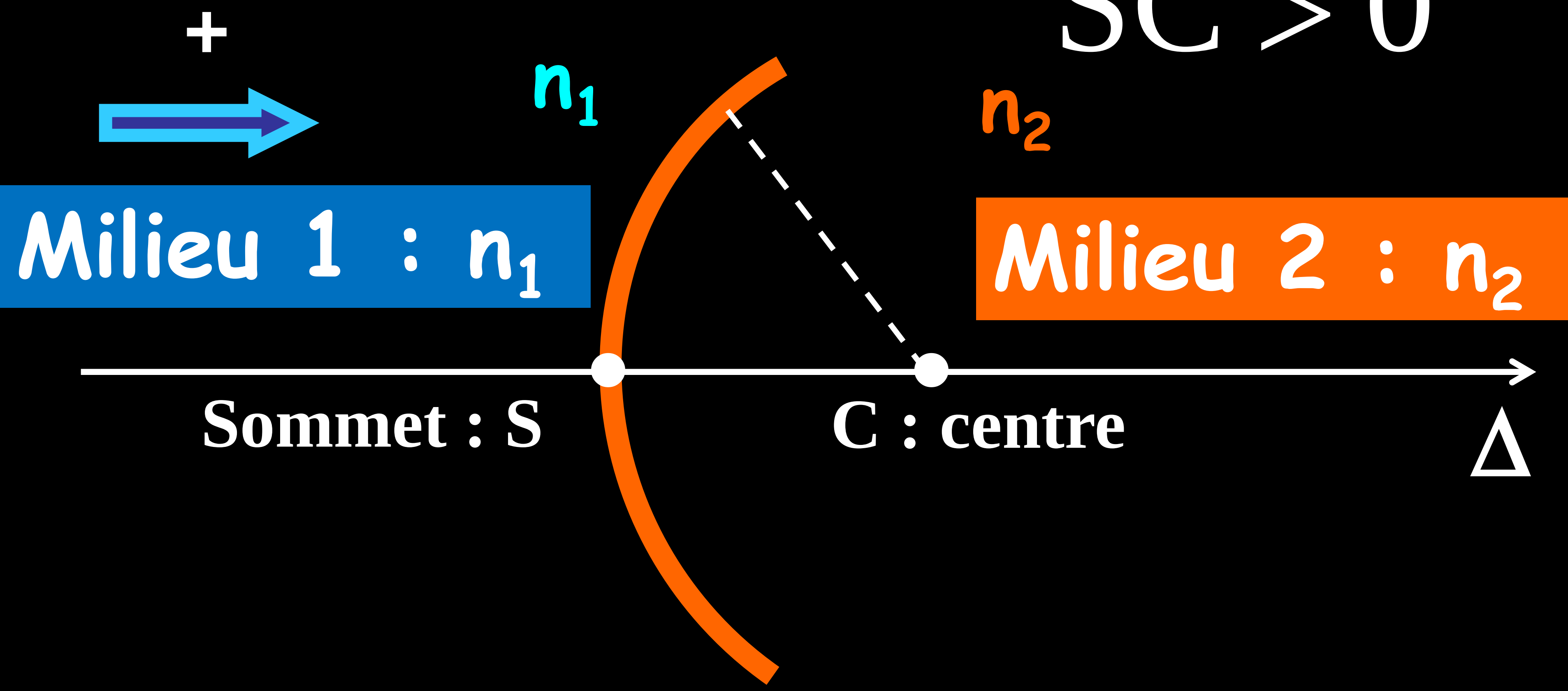
$$\overline{SC} < 0$$



$$n_1 > n_2 \quad \text{ou} \quad n_1 < n_2$$

dioptre sphérique

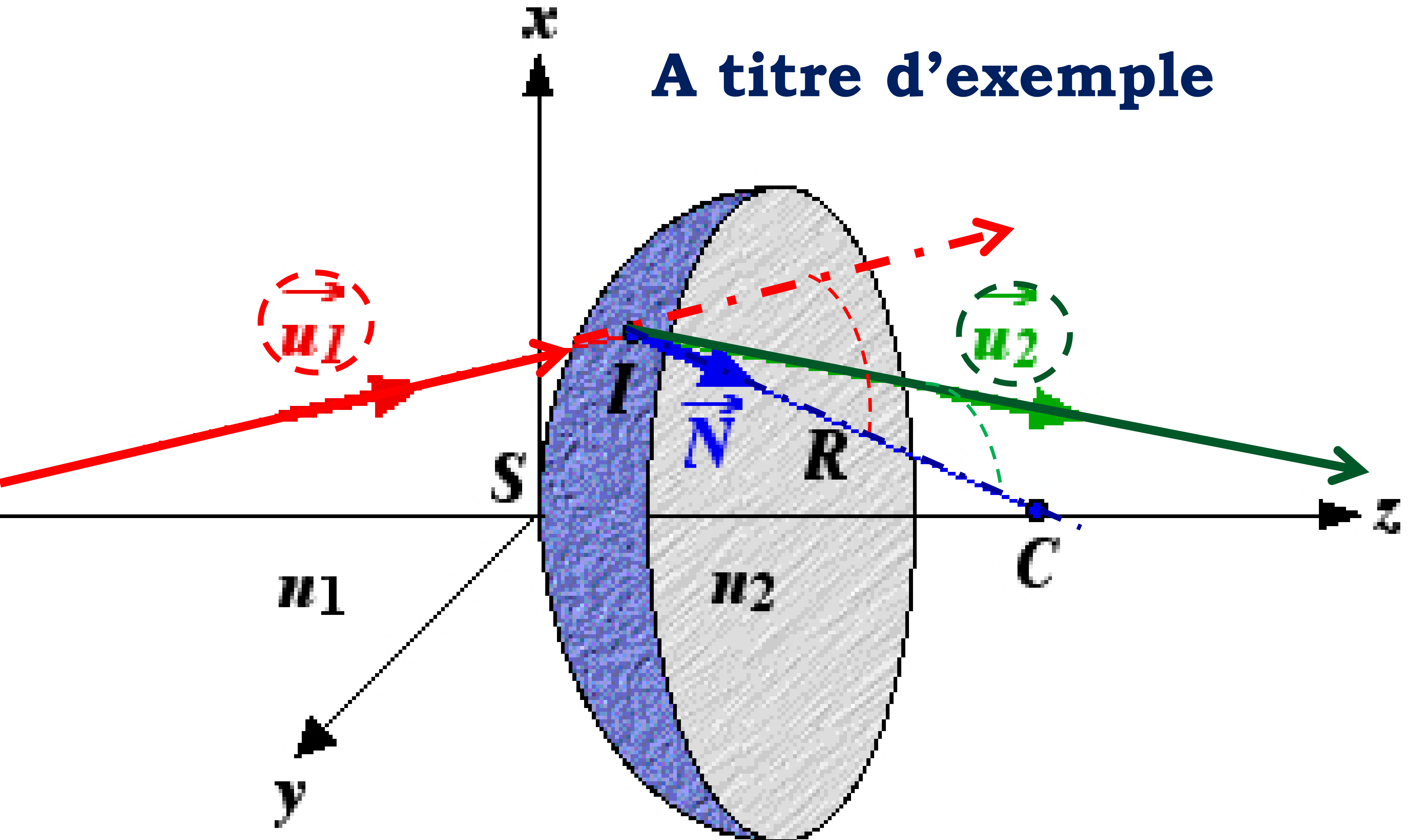
$$\overline{SC} > 0$$



$$n_1 > n_2 \quad \text{ou} \quad n_1 < n_2$$

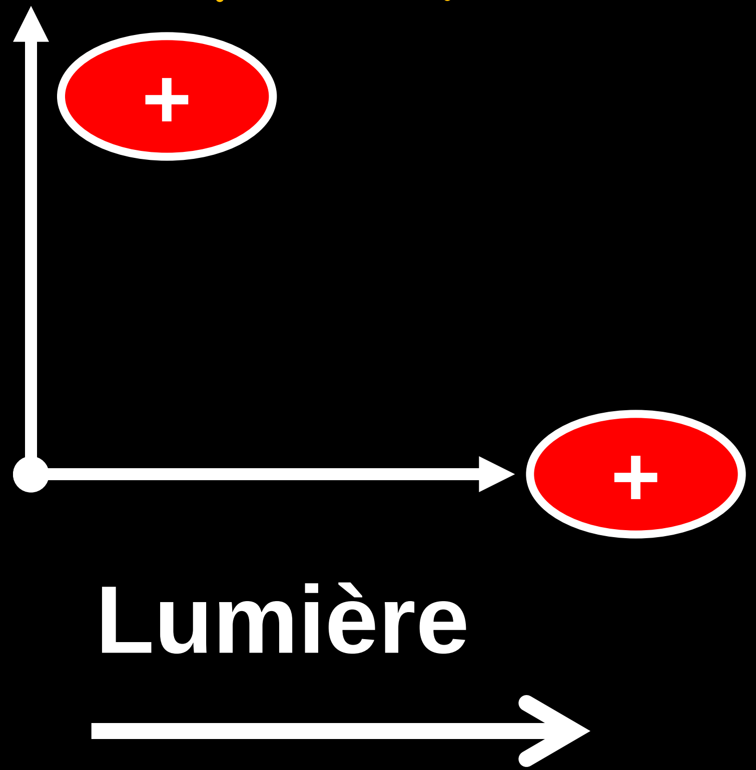
$$n_1.\sin(i_1) = n_2.\sin(i_2) \qquad n_2 > n_1$$

A titre d'exemple



Invariant fondamental

Nous choisissons comme sens positif celui de la propagation de la lumière le long des rayons et celui de bas en haut dans la direction normale à l'axe optique du dioptre sphérique.



Soit un **point A** de **l'axe optique CS** du **dioptre sphérique**, et son **image A'** si elle existe, sera sur cet axe optique, car le rayon ACS traverse le dioptre **sans déviation**, **son incidence est nul**.

Un rayon quelconque **AI** se réfracte suivant **IA'**. **Ces rayons** ainsi que la **normale CI** et **l'axe** optique **CS** étant contenus dans le plan d'incidence que l'on prend comme plan de figure.

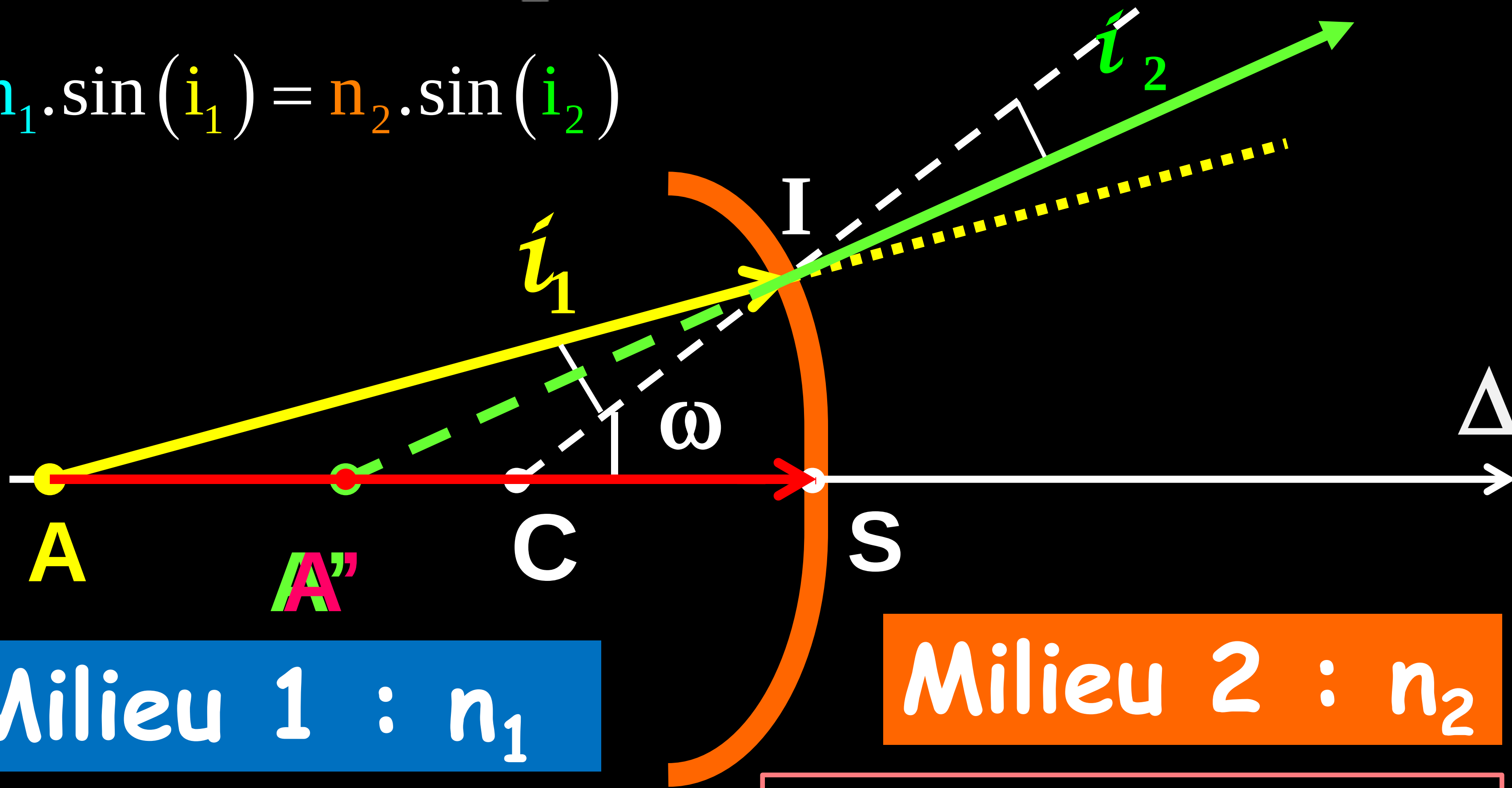
$$A \xrightarrow{\mathcal{D}\,(S,C,n_1,n_2)} A'$$

Deux rayons lumineux issus du **point source A**, leur **rayon réfracté correspondant** contribuent à la formation d'image A': le rayon ACS traverse le dioptre sans déviation, son incidence est nul.

Le prolongement de ces **deux rayons réfractés** forme cette **image A'.**

Dioptre sphérique

$$n_1.\sin(i_1) = n_2.\sin(i_2)$$



Milieu 1 : n_1

Milieu 2 : n_2

$$n_1 < n_2$$

$$A \xrightarrow{\mathcal{D}\,(S,C,n_1,n_2)} A'$$

Ces lois sont énoncées et démontrées, pour la ***forme sphérique****, par* ***Abu Nasr Mansur*** *(960-1036 Professeur d'AlBairouni) au début du* ***XIe siècle*** *et, pour la forme plane, par* ***Nasir al-Din al-Tusi*** *au début du* ***XIIIe siècle****.*

Un triangle ABC quelconque

La loi du sinus *permet de trouver la mesure d'un côté ou d'un angle d'un triangle quelconque, si on connait les autres côtés ou angles.*

La loi du sinus à rappeler

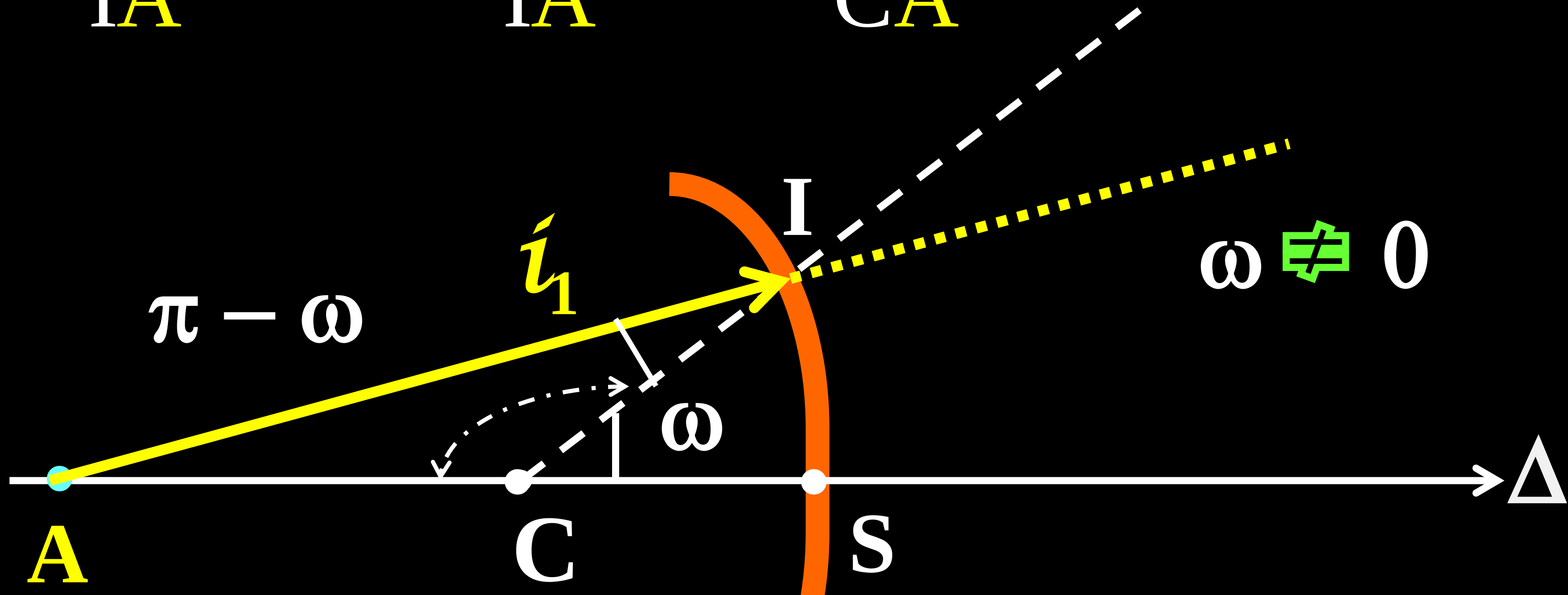
rappel

$$\boxed{\frac{\sin\left(\hat{A}\right)}{\overline{BC}} = \frac{\sin\left(\hat{B}\right)}{\overline{AC}} = \frac{\sin\left(\hat{C}\right)}{\overline{AB}}}$$

une relation de proportionnalité entre les longueurs des côtés d'un triangle et les sinus des angles respectivement opposés.

$$\frac{\sin\left(\pi-\omega\right)}{\overline{IA}}=\frac{\sin\left(\omega\right)}{\overline{IA}}=\frac{\sin\left(i_1\right)}{\overline{CA}}$$

Triangle AIC



Milieu 1 : n_1

Milieu 2 : n_2

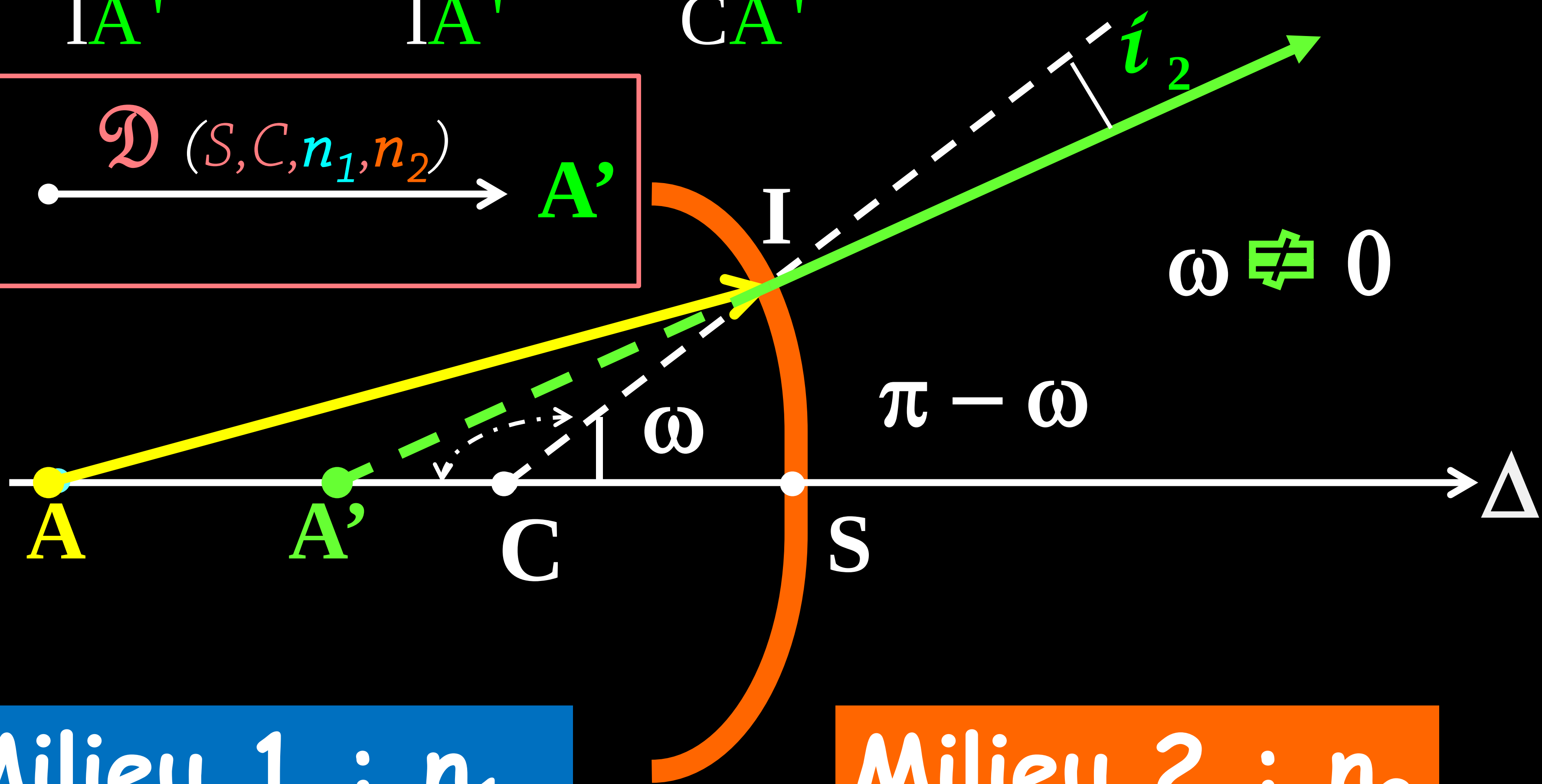
$n_1 < n_2$

Dioptre sphérique

$$\frac{\sin(\pi-\omega)}{\overline{IA'}} = \frac{\sin(\omega)}{\overline{IA'}} = \frac{\sin(i_2)}{\overline{CA'}}$$

Triangle A'IC

$$A \xrightarrow{\mathcal{D}(S,C,n_1,n_2)} A'$$



Milieu 1 : n_1

Milieu 2 : n_2

$n_1 < n_2$

Dioptre sphérique

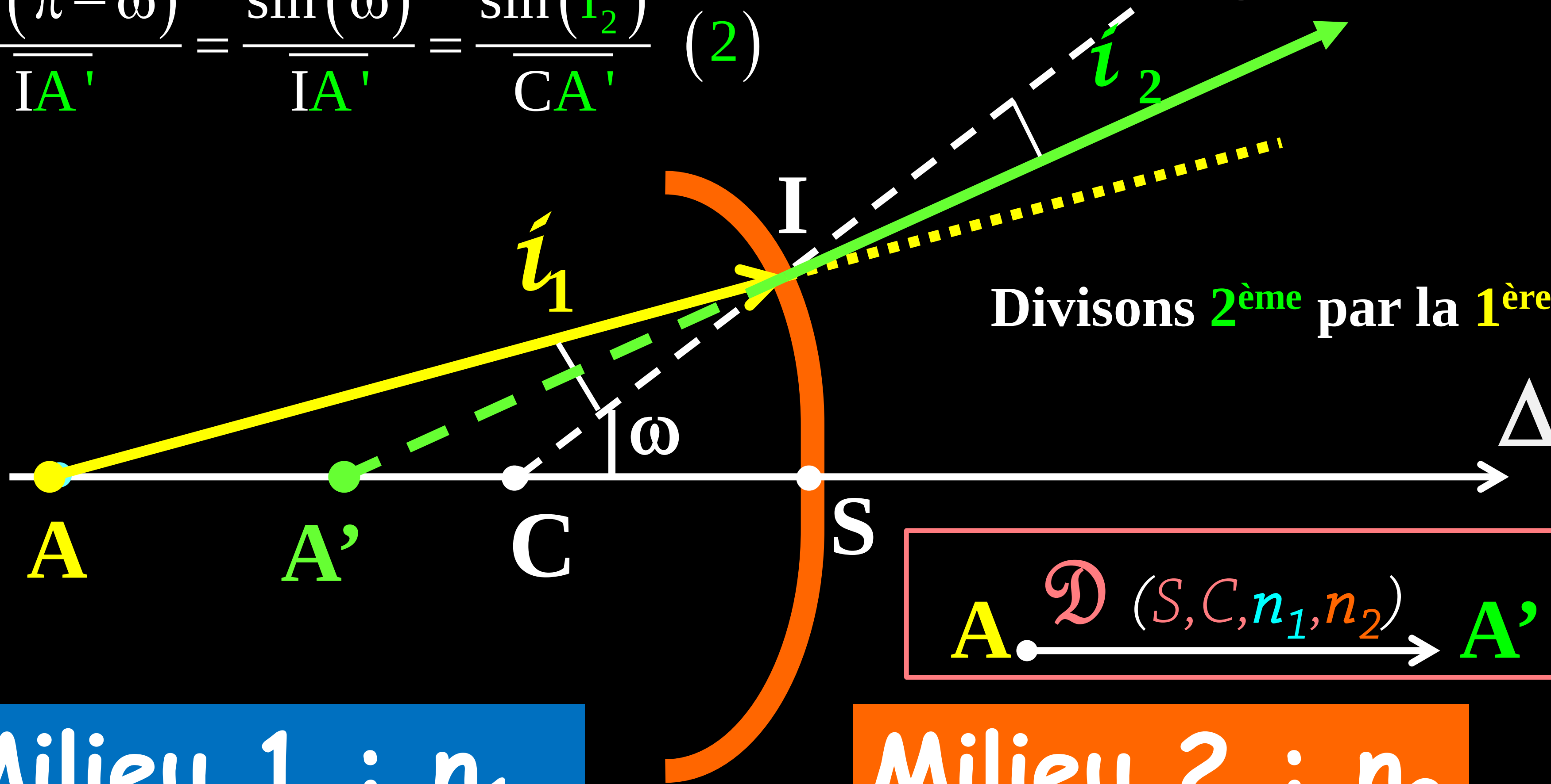
Triangle AIC

$$\frac{\sin(\pi-\omega)}{\overline{IA}}=\frac{\sin(\omega)}{\overline{IA}}=\frac{\sin(i_1)}{\overline{CA}} \quad (1)$$

Triangle A'IC

$$\frac{\sin(\pi-\omega)}{\overline{IA'}}=\frac{\sin(\omega)}{\overline{IA'}}=\frac{\sin(i_2)}{\overline{CA'}} \quad (2)$$

Divisons 2ème par la 1ère



Milieu 1 : n_1

Milieu 2 : n_2

$n_1 < n_2$

Dioptre sphérique

$$\frac{\sin(\pi-\omega)}{\overline{IA}} = \frac{\sin(\omega)}{\overline{IA}} = \frac{\sin(i_1)}{\overline{CA}} \quad (1)$$

$$\frac{\sin(\pi-\omega)}{\overline{IA'}} = \frac{\sin(\omega)}{\overline{IA'}} = \frac{\sin(i_2)}{\overline{CA'}} \quad (2)$$

Divisons 2ème par la 1ère

$$\omega \neq 0$$

$$n_1.\sin(i_1) = n_2.\sin(i_2)$$

$$\frac{n_1}{n_2}$$

$$\frac{\dfrac{\cancel{\sin(\omega)}}{\overline{IA'}}}{\dfrac{\cancel{\sin(\omega)}}{\overline{IA}}} = \frac{\dfrac{\sin(i_2)}{\overline{CA'}}}{\dfrac{\sin(i_1)}{\overline{CA}}}$$

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} . \frac{\sin(i_2)}{\sin(i_1)}$$

d'où, par division membre à membre des deux égalités :

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} \cdot \frac{n_1}{n_2}$$

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} \cdot \frac{\sin(i_2)}{\sin(i_1)}$$

et, en tenant compte de la deuxième loi de la réfraction

$$n_1 . \sin(i_1) = n_2 . \sin(i_2)$$

$$\frac{n_1}{n_2}$$

$$\boxed{n_1 . \frac{\overline{CA}}{\overline{IA}} = n_2 . \frac{\overline{CA'}}{\overline{IA'}}}$$

$$\boxed{n_1 \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{IA}} = n_2 \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{IA'}}}$$

Il est à rappeler que le phénomène de la réflexion conserve l'angle ($i=r$)
Le phénomène de réfraction conserve le produit $n.\sin(i)$.

Alors, la quantité $\boxed{n \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{IA}}}$

est **l'invariant fondamental** du dioptre sphérique. Cette quantité se conserve à la traversée de ce dioptre sphérique.

$$\boxed{\mathbf{A} \xrightarrow{\mathfrak{D}\,(S,C,n_1,n_2)} \mathbf{A'}}$$

Comme **A’** est **l’image** du point source **A**, fournie par le **dioptre sphérique** de sommet **S**, de centre **C** et séparant les deux milieux homogènes d’indices différents $\mathbf{n_1}$ et $\mathbf{n_2}$, alors ces **deux points (A , A’)** sont conjugués par ce dioptre sphérique.

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\mathcal{D}\,(S,C,n_1,n_2)} \mathbf{A'}$$

Ces deux points sont aussi liés par **une relation de conjugaison** propre à ce **dioptre sphérique** $\mathcal{D}\,(S,C,n_1,n_2)$.

Relations de conjugaison

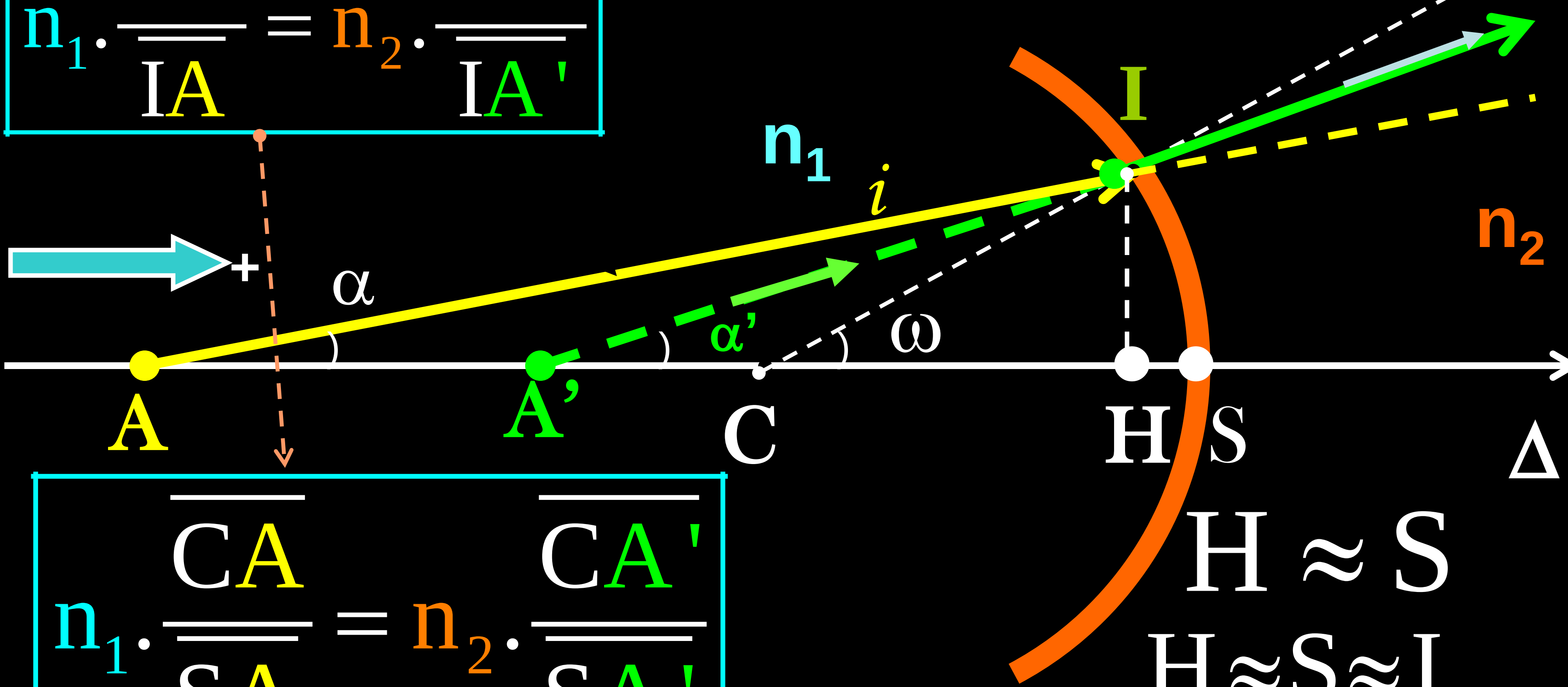
Établissons ces équations dans les conditions de **stigmatisme approché**, c'est-à-dire dans le cadre de **l'approximation de Gauss.**

Il y a **stigmatisme approché** pour tout point de l'espace qui n'envoie sur le **dioptre sphérique** qu'un pinceau lumineux dont le rayon moyen lui est **normal**, c'est-à-dire formé de **rayons paraxiaux**.

Les **angles d'incidence** sont faibles, les longueurs **IA** et **IA'** peuvent être confondues respectivement avec **SA** et **SA'**. La relation d'invariance s'écrit :

$$n_1 \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{IA}} = n_2 \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{IA'}}$$

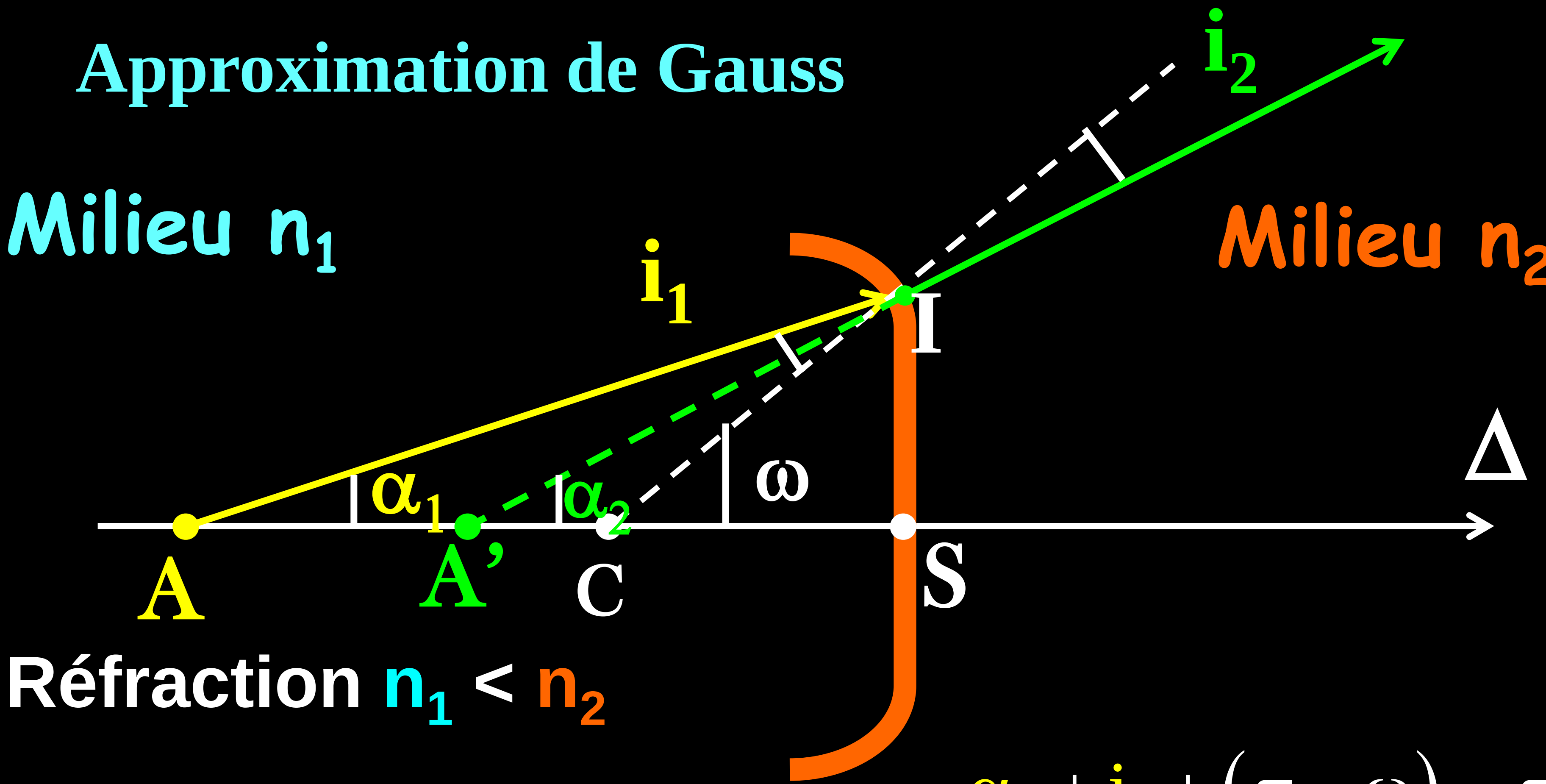
Approximation de Gauss



$$n_1 \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{SA}} = n_2 \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{SA'}}$$

$$i_1 = \omega - \alpha_1 \qquad i_2 = \omega - \alpha_2 \qquad n_1 . i_1 = n_2 . i_2$$

Approximation de Gauss



Réfraction $n_1 < n_2$

Σ angles triangle ACI = π $\quad \alpha_1 + i_1 + (\pi - \omega) = \pi$

Σ angles triangle A'CI = π $\quad \alpha_2 + i_2 + (\pi - \omega) = \pi$

La somme des angles d'un triangle est égale à 180° (π) :

$$i_1 + \alpha_1 + (\pi - \omega) = \pi \quad \text{d'où} \quad \boxed{i_1 = \omega - \alpha_1}$$

et

$$i_2 + \alpha_2 + (\pi - \omega) = \pi \quad \text{d'où} \quad \boxed{i_2 = \omega - \alpha_2}$$

La loi de la réfraction au point I avec une incidence faible :

$$\boxed{n_1 . i_1 = n_2 . i_2}$$

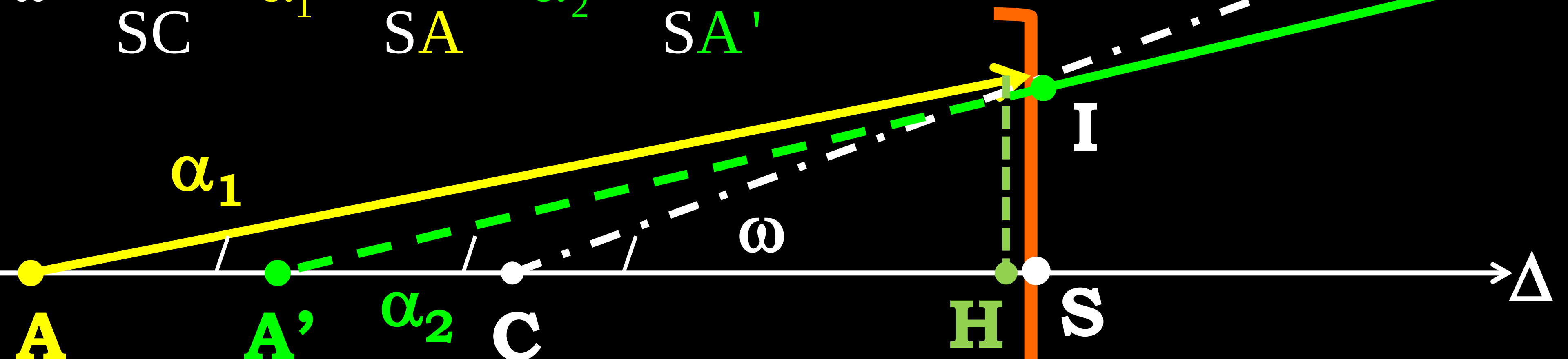
$$n_1 . (\omega - \alpha_1) = n_2 . (\omega - \alpha_2)$$

$$i_1 = \omega - \alpha_1 \quad \text{et} \quad i_2 = \omega - \alpha_2 \qquad n_1 . i_1 = n_2 . i_2$$

$$n_1 . (\omega - \alpha_1) = n_2 . (\omega - \alpha_2)$$

$$\mathrm{tg}(\omega) \simeq \omega \approx \frac{\overline{SI}}{\overline{SC}} \qquad \mathrm{tg}(\alpha_1) \simeq \alpha_1 = \frac{\overline{SI}}{\overline{SA}} \qquad \mathrm{tg}(\alpha_2) \simeq \alpha_2 = \frac{\overline{SI}}{\overline{SA'}}$$

$$\omega \approx \frac{\overline{SI}}{\overline{SC}} \qquad \alpha_1 = \frac{\overline{SI}}{\overline{SA}} \qquad \alpha_2 = \frac{\overline{SI}}{\overline{SA'}}$$



$H \simeq S$ Approximation de Gauss

$$I \neq S \Rightarrow \overline{SI} \neq 0$$

$$i_1 = \omega - \alpha_1 \quad \text{et} \quad i_2 = \omega - \alpha_2 \qquad n_1 . i_1 = n_2 . i_2$$

$$n_1 . \left(\omega - \alpha_1 \right) = n_2 . \left(\omega - \alpha_2 \right)$$

$$\omega \approx \frac{\overline{SI}}{\overline{SC}} \qquad \alpha_1 = \frac{\overline{SI}}{\overline{SA}} \qquad \alpha_2 = \frac{\overline{SI}}{\overline{SA'}}$$

$$\boxed{\text{d'où} \quad n_1 . \left(\frac{\overline{SI}}{\overline{SC}} - \frac{\overline{SI}}{\overline{SA}} \right) = n_2 . \left(\frac{\overline{SI}}{\overline{SC}} - \frac{\overline{SI}}{\overline{SA'}} \right)}$$

$H \approx S \neq I$

$$n_1 \cdot \left(\frac{\cancel{\overline{SI}}}{\overline{SC}} - \frac{\cancel{\overline{SI}}}{\overline{SA}} \right) = n_2 \cdot \left(\frac{\cancel{\overline{SI}}}{\overline{SC}} - \frac{\cancel{\overline{SI}}}{\overline{SA'}} \right)$$

Image **Objet** **Instrument optique**

$$\boxed{\frac{n_2}{\overline{SA'}} - \frac{n_1}{\overline{SA}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}}$$

Formule de Descartes : relation de conjugaison d'un dioptre sphérique (S, C, n_1, n_2) dans les conditions de l'approximation de Gauss.

Origine de Δ fixée au sommet S

Remarque

$$R = \overline{SC} \to \infty$$

$$\frac{n_2}{\overline{SA'}} - \frac{n_1}{\overline{SA}} = \underbrace{\frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}}_{0}$$

Formule de conjugaison du dioptre plan.

$$\boxed{\frac{n_1}{\overline{SA}} = \frac{n_2}{\overline{SA'}}}$$

Il peut être commode de prendre le **centre C comme origine** ; **la formule de conjugaison** peut se déduire de la **formule de Descartes** par **changement d’origine**.

Origine au centre C :

Invariant fondamental

$$n_1 . \frac{\overline{CA}}{\overline{IA}} = n_2 . \frac{\overline{CA'}}{\overline{IA'}}$$

I en S

$$n_1 . \frac{\overline{CA}}{\overline{SA}} = n_2 . \frac{\overline{CA'}}{\overline{SA'}}$$

Approximation de Gauss

Inversons les deux membres de l'égalité

$$\frac{\overline{SA}}{n_1 . \overline{CA}} = \frac{\overline{SA'}}{n_2 . \overline{CA'}}$$

$$A \xrightarrow{\mathcal{D}\ (S,C,n_1,n_2)} A'$$

Relation de Chasles

Relation de Chasles

$$\frac{\overline{SA}}{n_1.\overline{CA}} = \frac{\overline{SA'}}{n_2.\overline{CA'}}$$

$$\frac{1}{n_1}\frac{\overline{SC}+\overline{CA}}{\overline{CA}} = \frac{1}{n_2}\frac{\overline{SC}+\overline{CA'}}{\overline{CA'}}$$

En divisant les deux membres par SC

$$\frac{1}{n_1}.\left(\frac{1}{\overline{\overline{CA}}}+\frac{1}{\overline{\overline{SC}}}\right) = \frac{1}{n_2}.\left(\frac{1}{\overline{\overline{CA'}}}+\frac{1}{\overline{\overline{SC}}}\right)$$

D’où :

$$\frac{1}{n_1}\cdot\left(\frac{1}{\overline{CA}}+\frac{1}{\overline{SC}}\right)=\frac{1}{n_2}\cdot\left(\frac{1}{\overline{CA'}}+\frac{1}{\overline{SC}}\right)$$

Après tout calcul fait on obtient :

$$\boxed{\frac{n_1}{\overline{CA'}}-\frac{n_2}{\overline{CA}}=\frac{(n_1-n_2)}{\overline{CS}}}$$

Origine au centre C

Relation de conjugaison d’un **dioptre sphérique**, avec **l’origine** de l’axe **Δ** **fixée au point C**

Origine au sommet S

$$\boxed{\frac{n_2}{\overline{SA'}}-\frac{n_1}{\overline{SA}}=\frac{n_2-n_1}{\overline{SC}}}$$