OPTIQUE GEOMETRIQUE

SMPC SMAI -S2

Cours: Optique géométrique.

- Branche ancienne de l 'optique très utilisée en optique instrumentale.

- Formation des images à travers un système optique.

- Etude d 'instruments d'optique.

- L'étude de systèmes optiques bien connus : microscope, lunette astronomique

Nature de la Lumière.

Qu'est ce que la lumière? Pendant plusieurs siècles deux tendances se sont affrontées: onde-corpuscule.

Au 17ème siècle:

- **Corpusculaire pour expliquer la réflexion (Descartes, Newton).**

- **Ondulatoire pour expliquer la diffraction (Grimaldi, Huygens).**

Du 17ème au 19ème siècle:

- **Expériences validant l'aspect ondulatoire de la lumière (Fresnel, Maxwell)**

- **Expériences validant l'aspect corpusculaire de la lumière (Hertz, Einstein)**

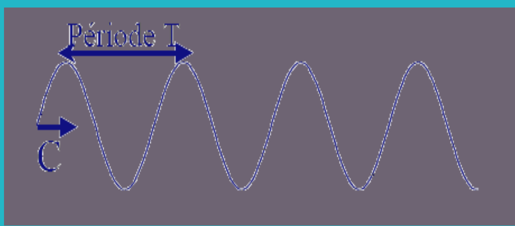
Au 20ème siècle:

- **Dualité onde-corpuscule comme les e- (De Broglie, Heisenberg, Dirac)**

Lumière = ondes et photons

Caractéristiques de l'onde lumineuse.

Ondes: Son, Houle.



Caractéristiques générales :

- Amplitude.
- Fréquence ν. [s-1]
- Vitesse C. [m.s-1]
- Longueur d'onde λ:

$$\lambda = \frac{C}{\nu} = CT \quad [\mathrm{m}]$$

Photon associé :

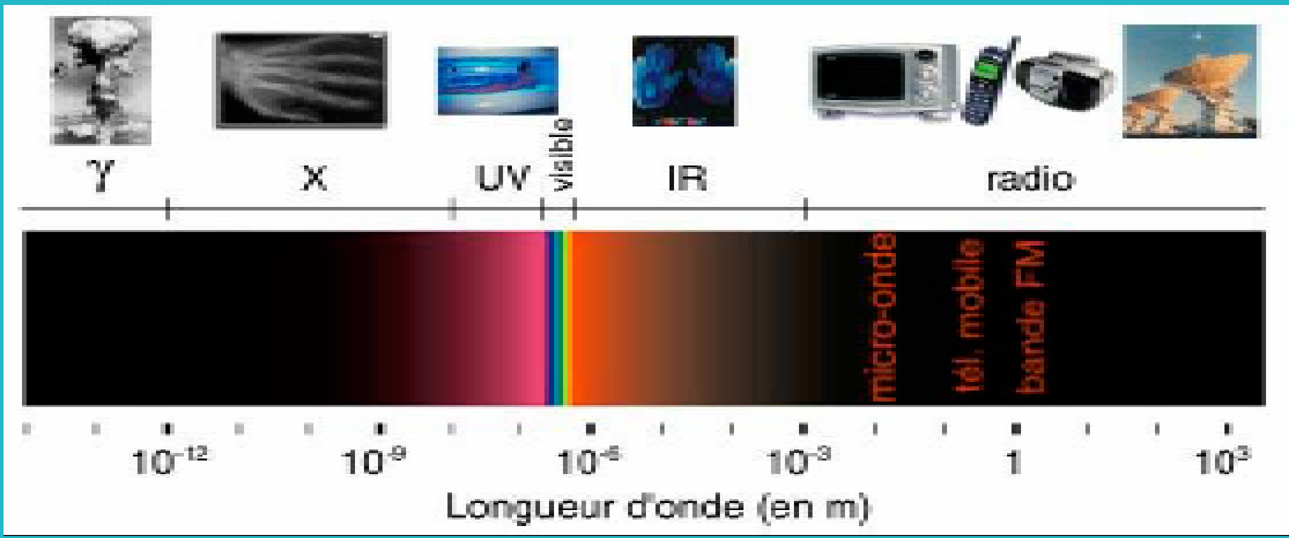
Énergie E **: E=hν [joule]** où h est la constante de Plank h=6.626 10^{-34} J.s

Caractéristiques de l'onde lumineuse:

- Onde sans support.
- Propagation dans le vide à la vitesse C.
- C = 299.792.456 m.s-1 (3 10^8 m.s-1)

Quelques repères
- 7 fois le tour de la terre en 1s.
- Distance terre-soleil en ≈8min.

Ondes électromagnétiques.

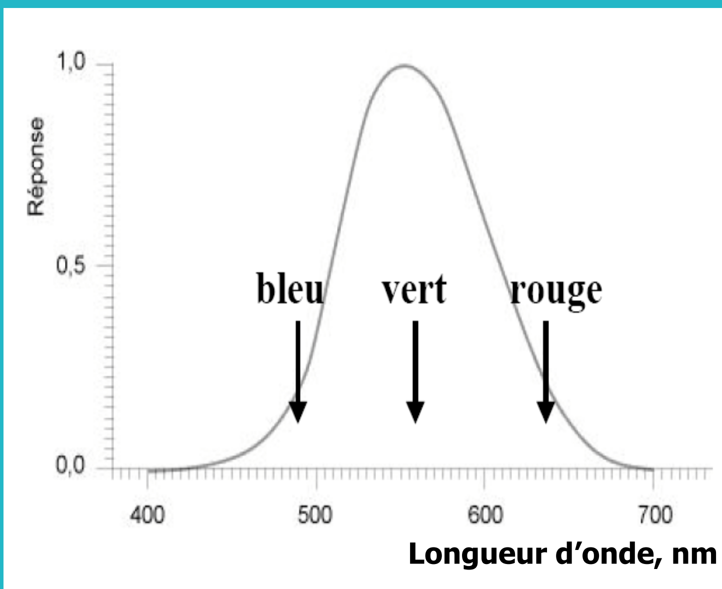


• **La lumière visible fait partie d'une grande famille de phénomènes de même nature : les ondes électromagnétiques.**

• **Variation d'un champ électrique et du champ magnétique, dans l'espace et dans le temps.**

• **La lumière naturelle est donc une superposition d'ondes électromagnétiques de différentes longueurs d'ondes (couleurs).**

Visible = Spectre de l'oeil.



Ordre de grandeur de $\lambda_{visible} \approx 1\mu m$

L'oeil est sensible aux radiations lumineuses dont la longueur d'onde est comprise entre 0.380 µm et 0.780 µm.

Oeil est un photodétecteur ayant une bande passante particulière.

Rayons lumineux

En optique géométrique on se réfère souvent à la notion de rayon lumineux

Notion intuitive :

- **Pas de signification physique mais c'est un outil très intéressant pour décrire la propagation de lumière dans des conditions bien définies.**

- **On peut les considérer comme la trajectoire de l'énergie lumineuse (milieux isotropes).**

- **Ils sont à la base du développement de l'optique géométrique.**

Description de la lumière.

Outil de description de la lumière : Ondes, Photons ou Rayons Lumineux selon le contexte considéré.

Description: elle dépend de la dimension DO des objets par rapport à λ :

	$DO>>\lambda$	$DO\approx\lambda$	$DO<<\lambda$
Description	*Rayon*	*Onde*	*Photon*
Application	*Formation des images*	*Interférence - diffraction*	*Effet photoélectrique*
Apparition	*17ème siècle*	*19ème siècle*	*20ème siècle*

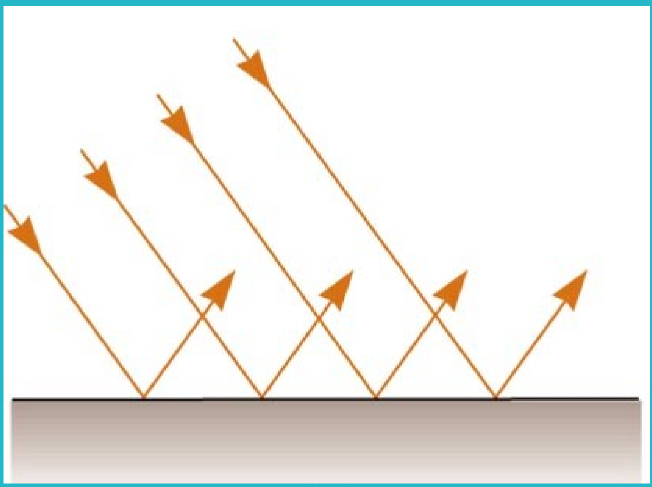
Interaction lumière-matière.

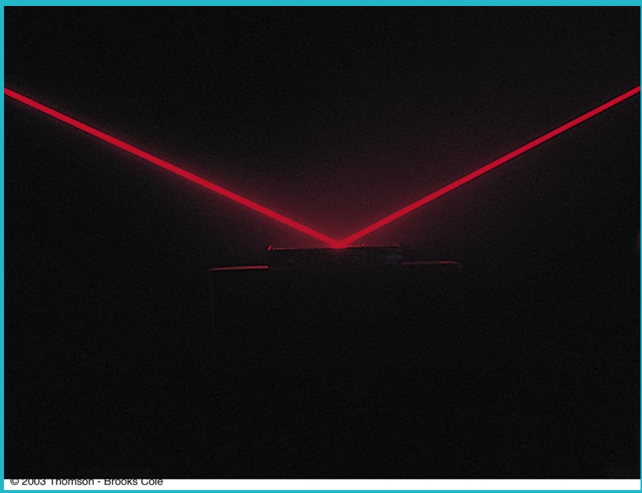
Quand la lumière rencontre un milieu homogène, isotrope et transparent on peut observer :

1. Réflexion :

C'est Une interaction lumière-matière conduisant à une déviation de la trajectoire de la lumière du même côté du corps d'où elle est venue.

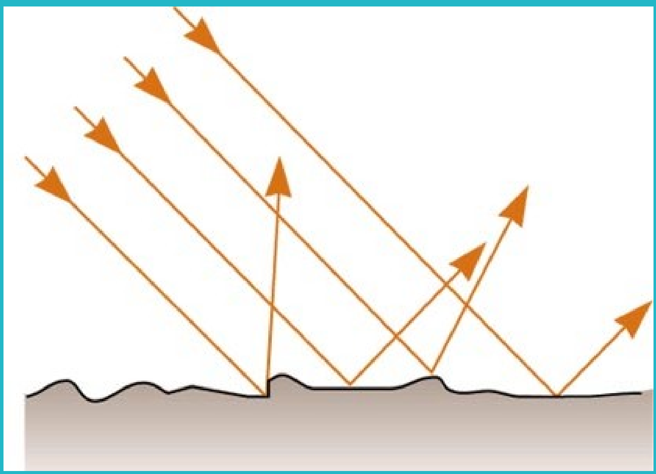
- **Réflexion spéculaire : se produit sur une surface lisse (miroir)**

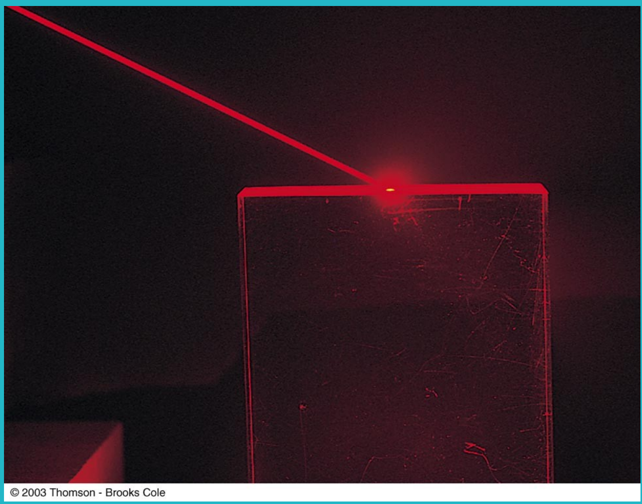




Les rayons réfléchis sont parrallèles les uns aux autres

- **Réflexion diffuse : se produit sur une surface rugueuse**





Les rayons réfléchis repartent dans des directions quelconques

Exemples de réflexion spéculaire et de réflexion diffuse

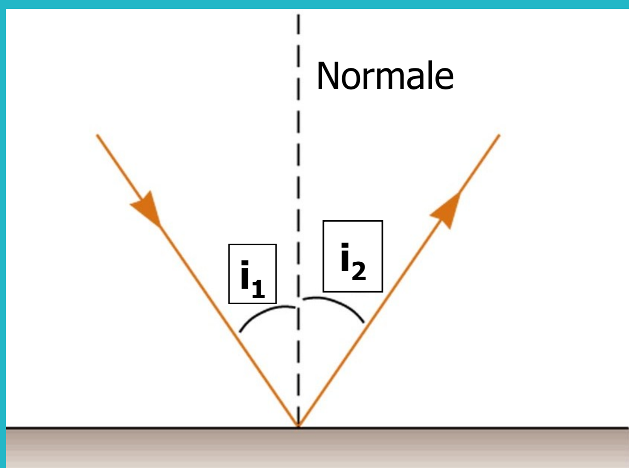
La réflexion diffuse rend la route facile à voir la nuit

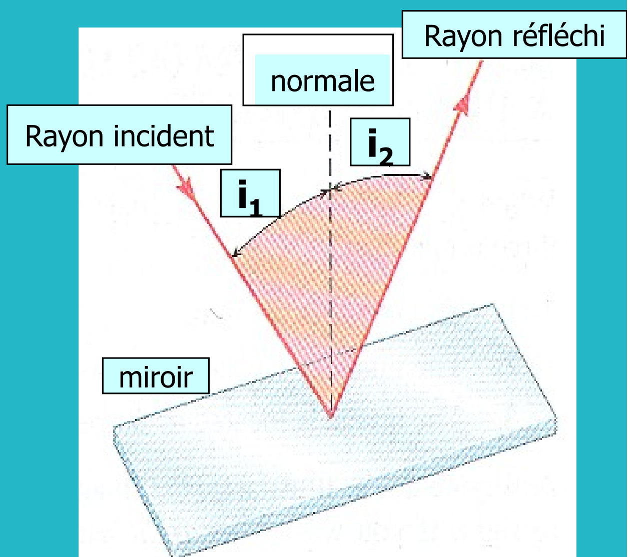
Spéculaire

Diffuse

Loi de la réflexion

- **La normale est une ligne perpendiculaire à la surface**
- **Elle est issue du point où le rayon incident touche la surface**
- **Le rayon incident fait un angle i_1 avec la normale**
- **Le rayon réfléchi fait un angle i_2 avec la surface. Il est contenu dans le plan d'incidence défini par le rayon incident et la normale.**





- **L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence : $i_1 = i_2$**

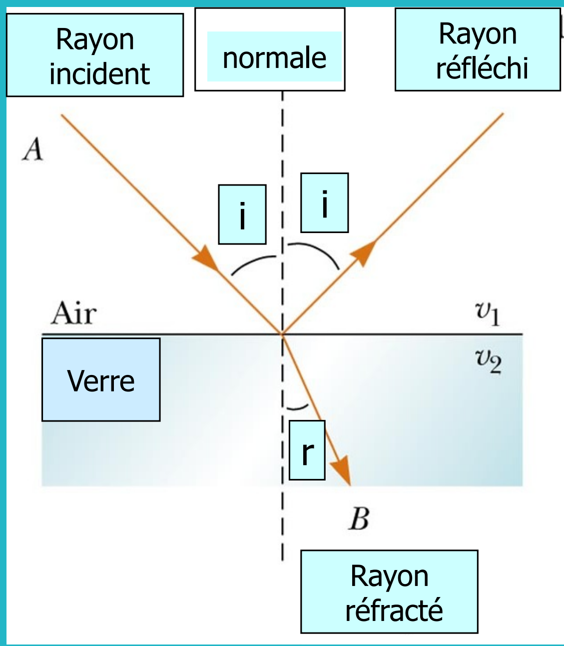
2. Réfraction :

• **Quand un rayon lumineux A se propageant dans un milieu transparent rencontre l'interface de séparation (dioptre) avec un deuxième milieu transparent, une partie de ce rayon est réfléchie et une autre partie pénètre dans le deuxième milieu.**

• **le rayon B qui pénètre dans le deuxième milieu est dévié à la traversée du dioptre.**

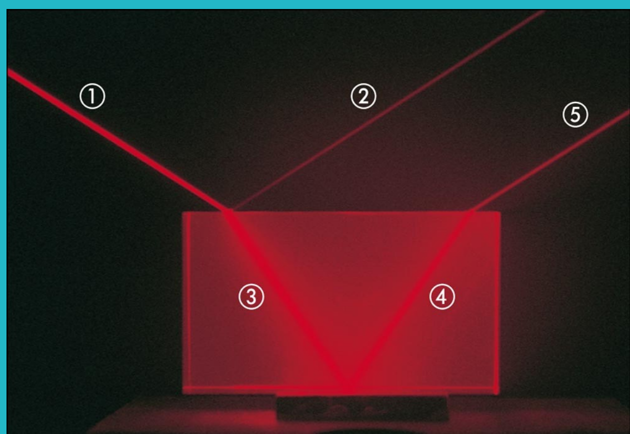
• **Ce phénomène de déviation du rayon qui pénètre dans le deuxième milieu porte le nom de *réfraction***

L'angle de réfraction r dépend des propriétés du milieu



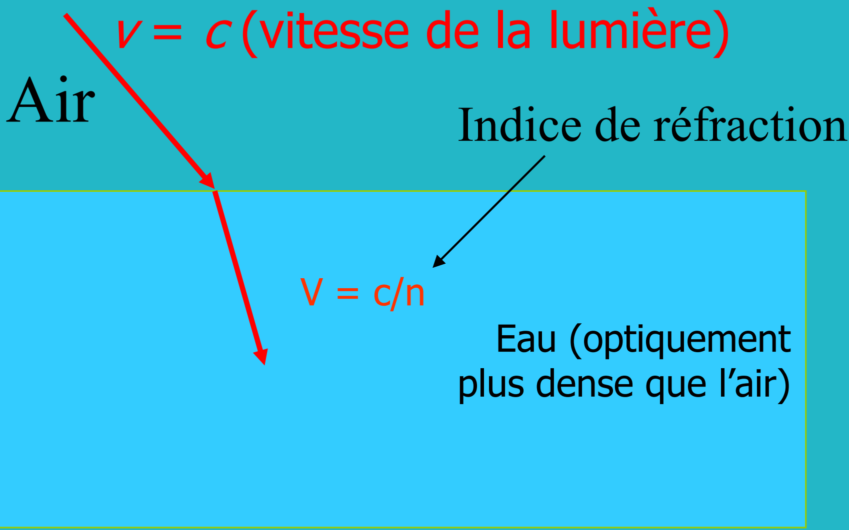
Visualisation expérimentale

- **Le rayon ① est le rayon incident**
- **Le rayon ② est le rayon réfléchi**
- **Le rayon ③ est réfracté dans le cristal (lucite)**
- **Le rayon ④ est réfléchi sur la face interne du cristal**
- **Le rayon ⑤ est réfracté dans l'air en sortant du cristal**



Origine physique de la réfraction

- **La vitesse de la lumière est une constante ??**
- **Oui mais dans UN milieu donné**



Indice de réfraction :Définit la vitesse de la lumière dans le milieu optiquement plus dense → *c/n*.

Indice de réfraction

$$n = \frac{c}{v}$$

Vitesse de la lumière dans le vide (air)

Vitesse de la lumière dans un milieu (e.g. eau)

- Pour le vide et l'air, *n* = 1
- Pour d'autres milieux, *n* > 1
- *n* est un rapport sans dimensions

▪ L'indice de réfraction d'un milieu dépend de la longueur d'onde, si le rayon lumineux est composé (comme la lumière blanche) de plusieurs couleurs, chacune de ces couleurs sera réfractée suivant son indice de réfraction. Il en résulte une **dispersion** des couleurs du rayon incident.

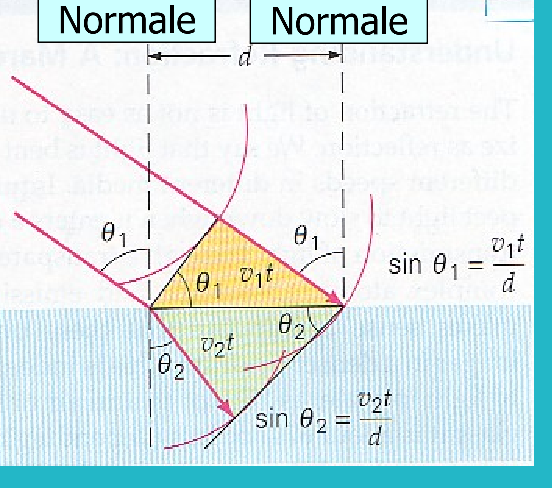
▪ n varie avec λ suivant la loi de Cauchy :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

Loi de la réfraction

$\sin\theta_1 = v_1 t/d$ (triangle jaune)

$\sin\theta_2 = v_2 t/d$ (triangle vert)



$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{c}{n_1}}{\frac{c}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Soit :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

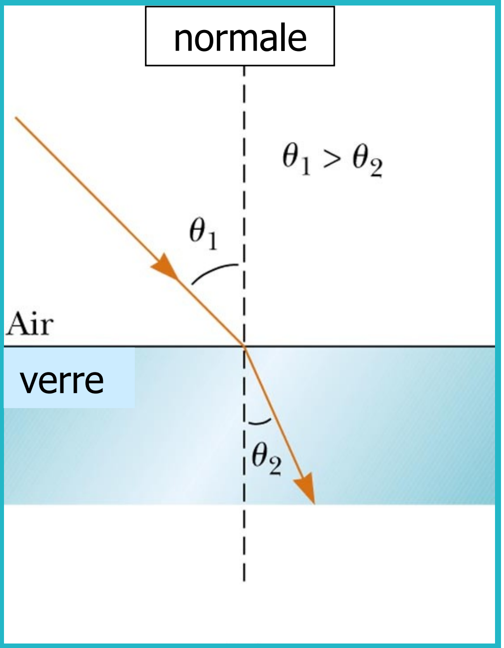
Loi de Descartes

Position du rayon réfracté

- **La lumière peut se réfracter dans un matériau où sa vitesse est plus faible (n_2>n_1)**

- **L'angle de réfraction est alors plus petit que l'angle d'incidence**

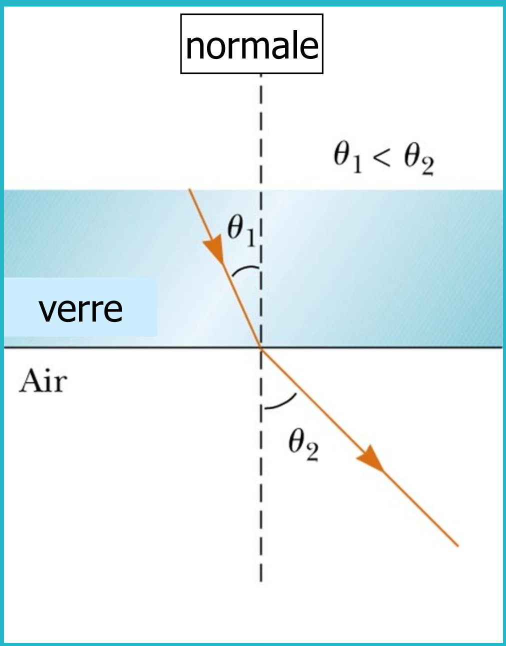
- **Le rayon se rapproche de la normale**



- **La lumière peut se réfracter dans un matériau où sa vitesse est plus élevée (n_2<n_1)**

- **L'angle de réfraction est alors plus grand que l'angle d'incidence**

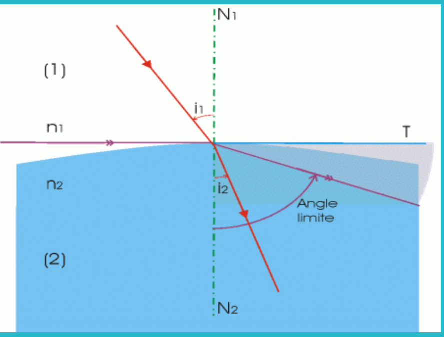
- **Le rayon s'écarte de la normale**



indices de réfraction de quelques substances à 590 nm:

Substance	indice
Air	1.00029
Eau	1.33
Ethanol	1.36
Quartz fondu	1.46
Glycérine	1.47
Verre	1.45-1.70
Huile	1.50
Zircone	1.92
Diamant	2.42

ANGLE DE RÉFRACTION LIMITE

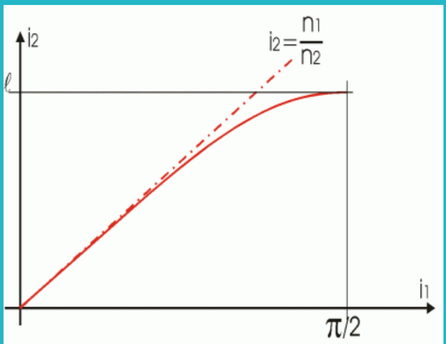


n1< n2 $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin i_1 \Rightarrow \sin i_2 < \sin i_1 \Rightarrow i_2 < i_1$

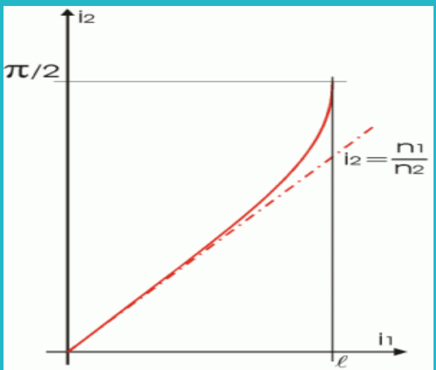
i1 varie entre 0 et π/2 $\Rightarrow n_1 \sin\frac{\pi}{2} = n_2 \sin l \Rightarrow \sin l = \frac{n_1}{n_2}$

$$n_1 \cos i_1 \; di_1 = n_2 \cos i_2 \; di_2 \Rightarrow \frac{di_2}{di_1} = \frac{n_1}{n_2}\,\frac{\cos i_1}{\cos i_2}$$

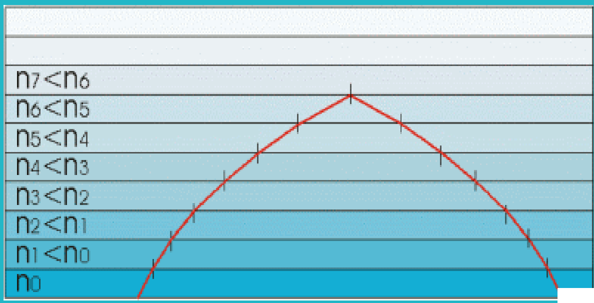
n1< n2

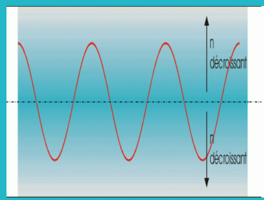


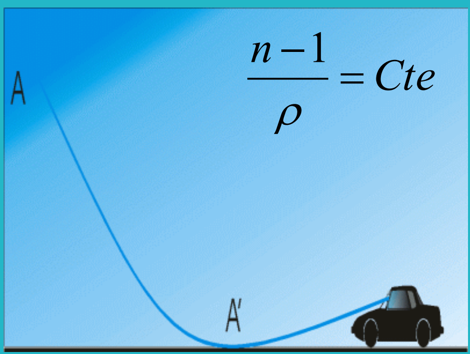
n1 > n2

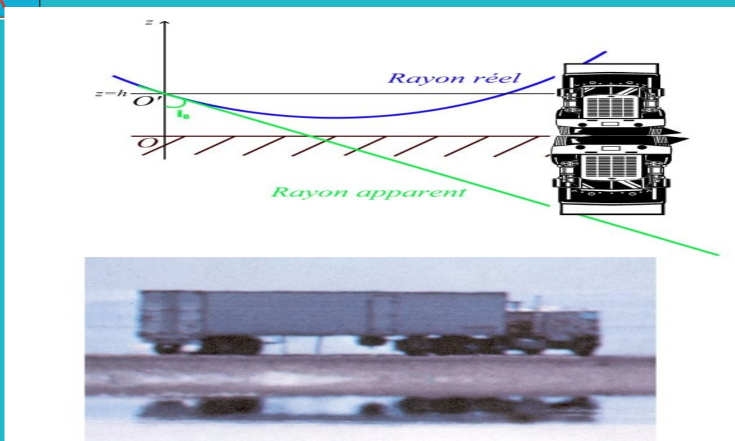


RÉFRACTION DANS UN MILIEU NON HOMOGÈNE







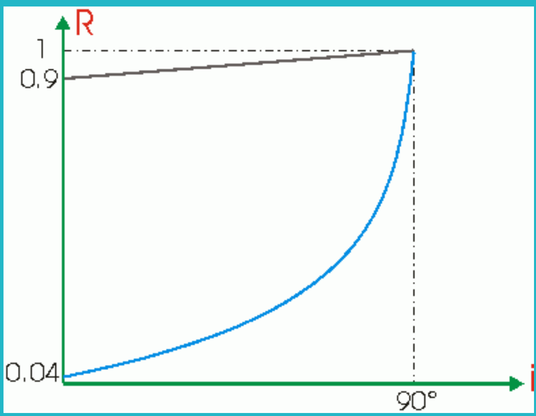


Tiré de : The Topology of Mirages dans Scientific American par **Walter Tape** (Juin 1985)

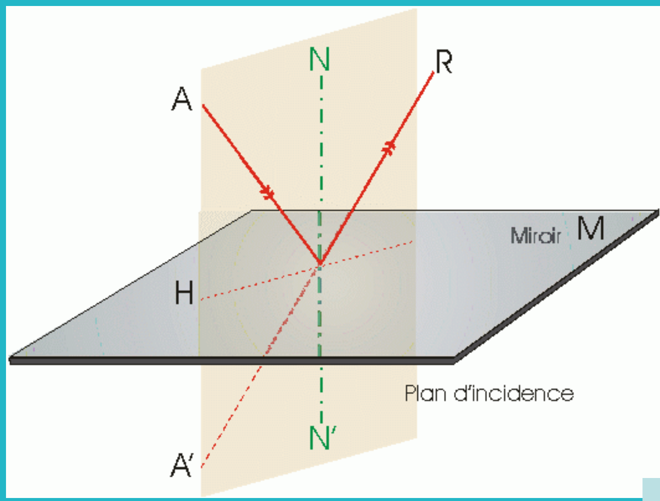
Mirage supérieur exceptionnel (cf §3.1.2.) au-dessus de la ville de Salers, dans le Cantal (cliché réalisé par l'abbé Gély, vers 1900)

D'après "Qu"est-ce que l'optique géométrique ? " de L.Dettwiller chez Dunod (1990)

MIROIRS PLANS



STIGMATISME DU MIROIR PLAN

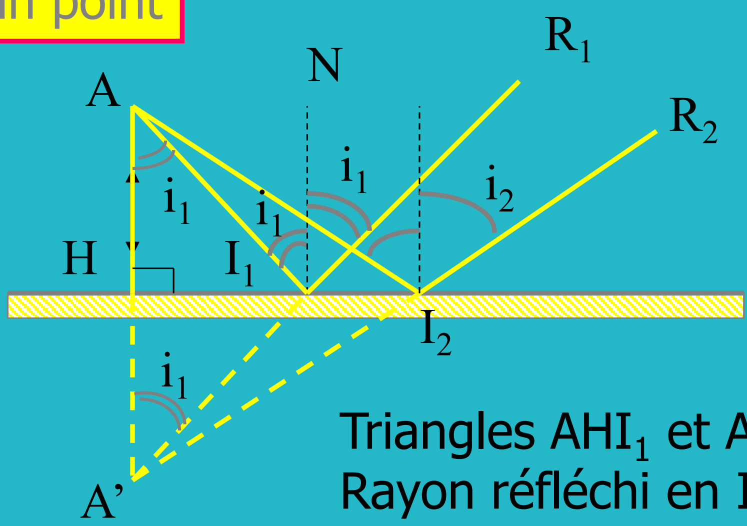


AH = HA'

L'image A' d'un point A est le symétrique de A par rapport au plan du miroir
Le miroir plan réalise le stigmatisme rigoureux pour tout point de l'espace

Un miroir plan est une surface plane réfléchissante

Image d 'un point



Triangles AHI_1 et $A'HI_1$ égaux
Rayon réfléchi en I_1 passe par A'
Rayon réfléchi en I_2 passe par A'

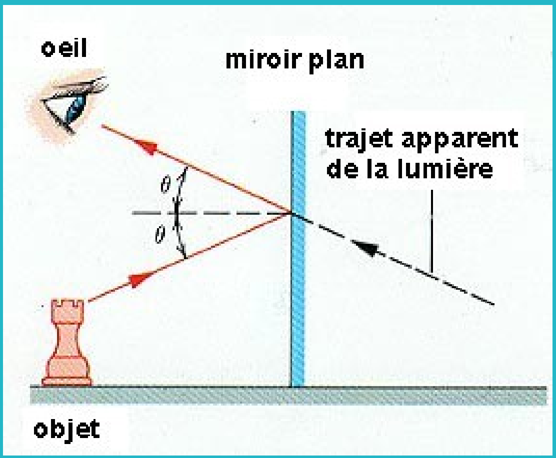
Tous les rayons issus de A et tombant sur le miroir se réfléchissent en passant par A'
Le miroir est stigmatique pour tous les points de l 'espace.

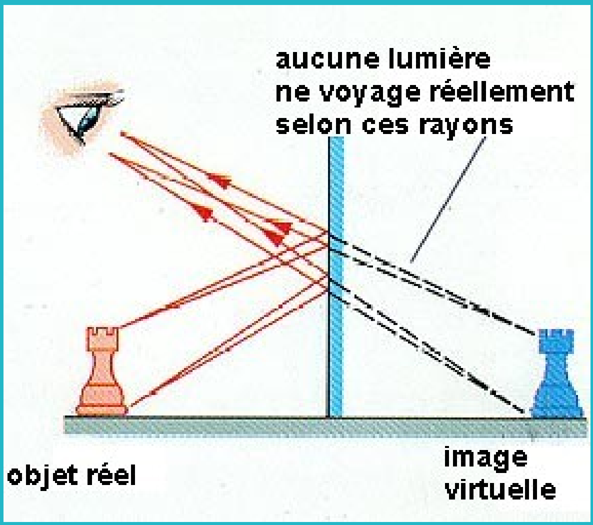
L'image A' d'un objet réel A est donc virtuelle. Le principe du retour inverse de la lumière nous montre que l'image d'un objet virtuel sera réelle.

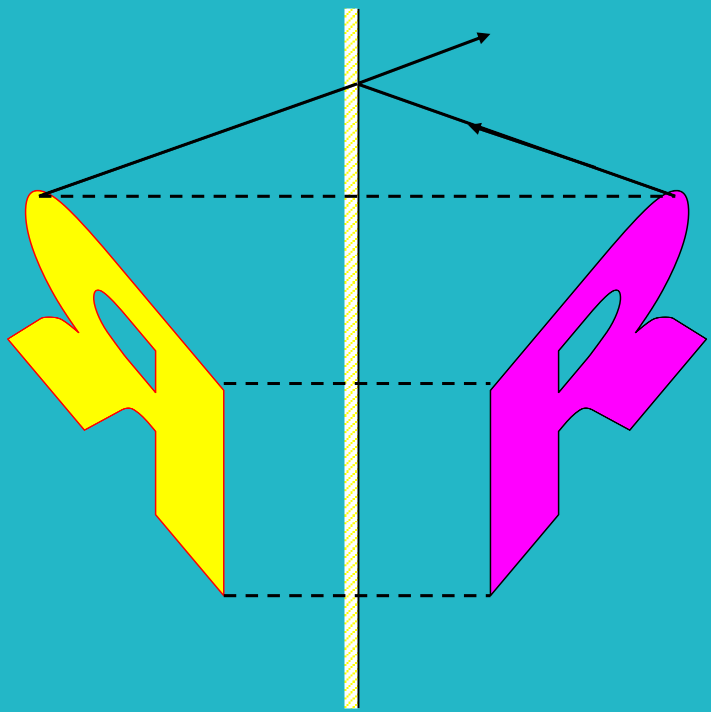
Dans un miroir plan, l'objet et l'image sont toujours de nature opposée : l'un est réel, l'autre virtuel.

A' est le symétrique de A par rapport au plan du miroir.

Pour un objet étendu (non ponctuel), l'image est le symétrique de l'objet par rapport au plan du miroir (une main droite est transformée en main gauche).

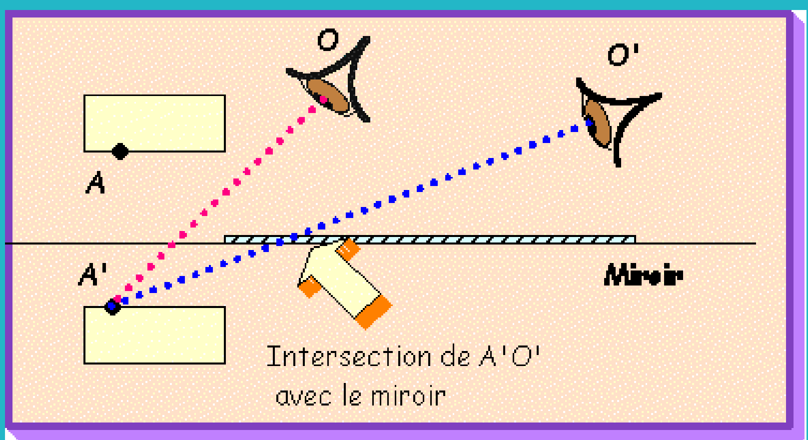






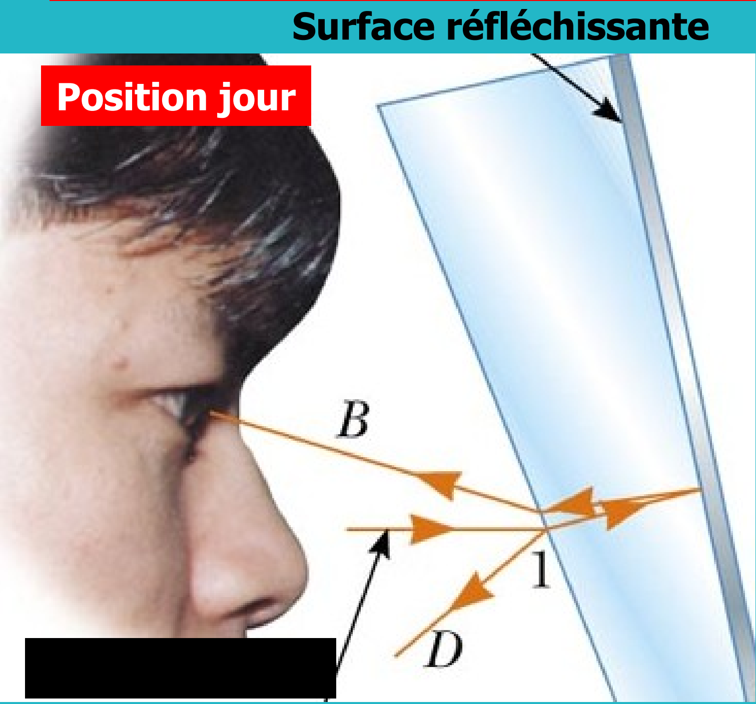
Champ d'un miroir plan

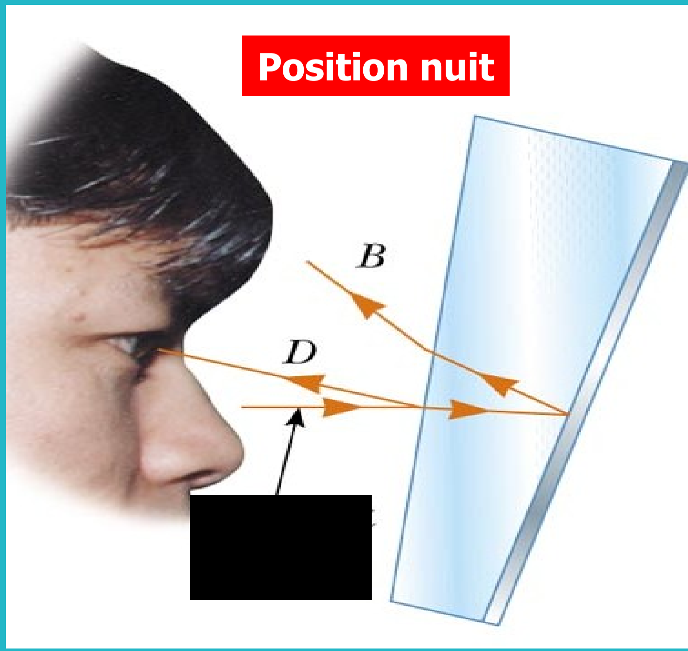
Pour qu'un observateur puisse observer l'image d'un objet dans un miroir il faut que la droite reliant l'image de l'objet à l'observateur coupe le miroir.



Sur ce schéma le point A est visible par réflexion pour l'observateur situé en O' mais pas pour celui situé en O.

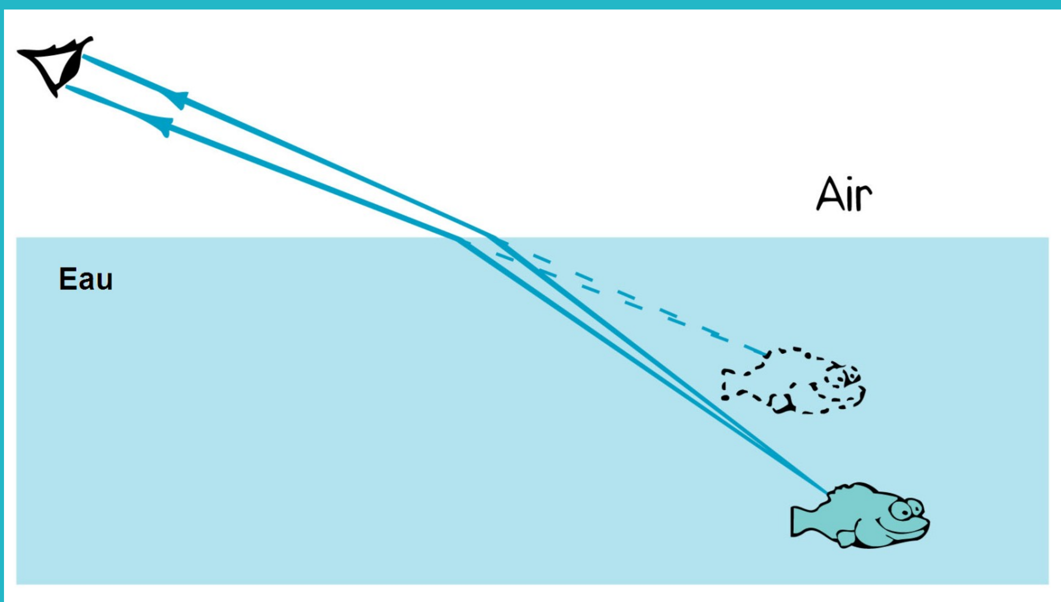
Application des miroirs : rétroviseur à position jour et nuit



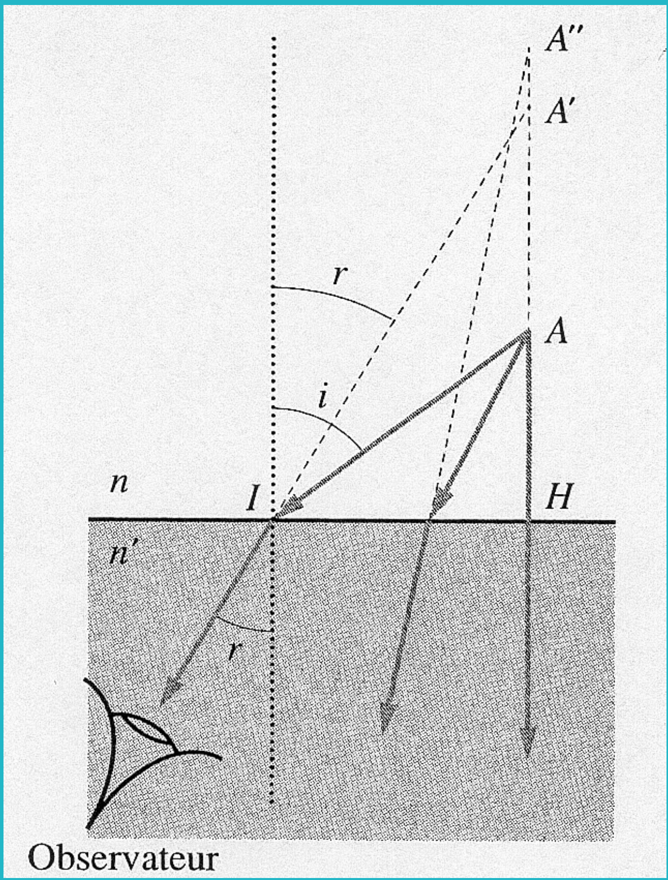


Dans la position « jour » c’est le rayon le plus intense ayant subi la réflexion sur la couche réfléchissante qui est dirigé dans l’œil du conducteur. Dans la position « nuit » c’est le rayon peu intense ayant subi la réflexion sur le verre qui est envoyé dans l’œil du conducteur.

DIOPTRE PLAN

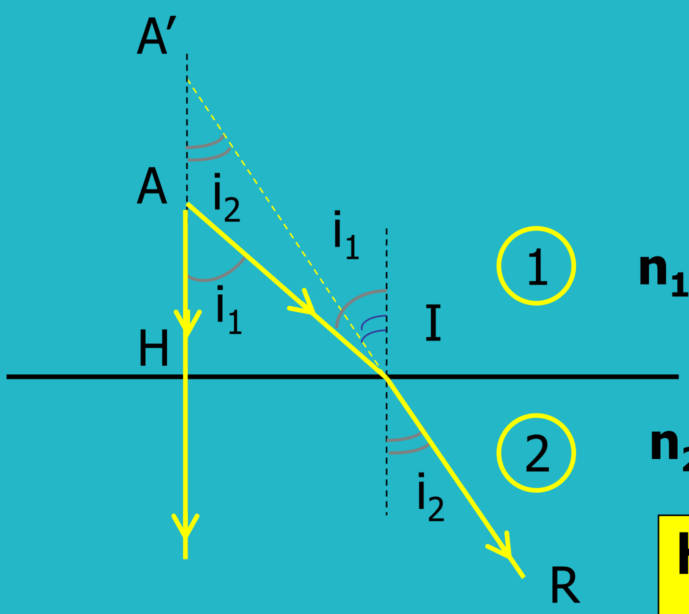


DIOPTRE PLAN



Existence de plusieurs images

Un dioptre plan est formé par l'interface plane qui sépare deux milieux transparents d'indice n_1 et n_2



$$\mathbf{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$$

$\mathbf{n_1 < n_2}$

$\mathbf{n_2}$

HI commun aux triangles HIA et HIA'

$$\boxed{\mathbf{HI = HA\ tgi_1 = HA'\ tgi_2}}$$

$$\boxed{\mathbf{HA' = HA\ \frac{tgi_1}{tgi_2}}}$$

La position de l'image dépend de l'angle d'incidence : à chaque angle d'incidence correspond une image différente.

Le dioptre plan n 'est pas stigmatique

Conditions de Gauss

- Si les angles d'incidence sont "petits"

$\Downarrow$

sin $i_1 \approx i_1$ et tg $i_1 \approx i_1$

Remarque très importante : les angles sont ici exprimés en radians.

Donc Descartes $\longrightarrow$ $n_1 i_1 = n_2 i_2$

Soit $\boxed{\dfrac{n_1}{HA} = \dfrac{n_2}{HA'}}$ et $\boxed{HA' = HA\dfrac{i_1}{i_2} = HA\dfrac{n_2}{n_1}}$

Bonne manière d 'écrire en vue d 'une généralisation :

$$\boxed{\frac{n_1}{HA} - \frac{n_2}{HA'} = 0}$$

Si on choisit comme sens positif sur AH celui de la lumière

$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{n_1}{\overline{HA}} - \frac{n_2}{\overline{HA'}} = 0}$$

$\overline{HA}$ et $\overline{HA'}$ **sont orientés algébriquement et toujours de même signe.**

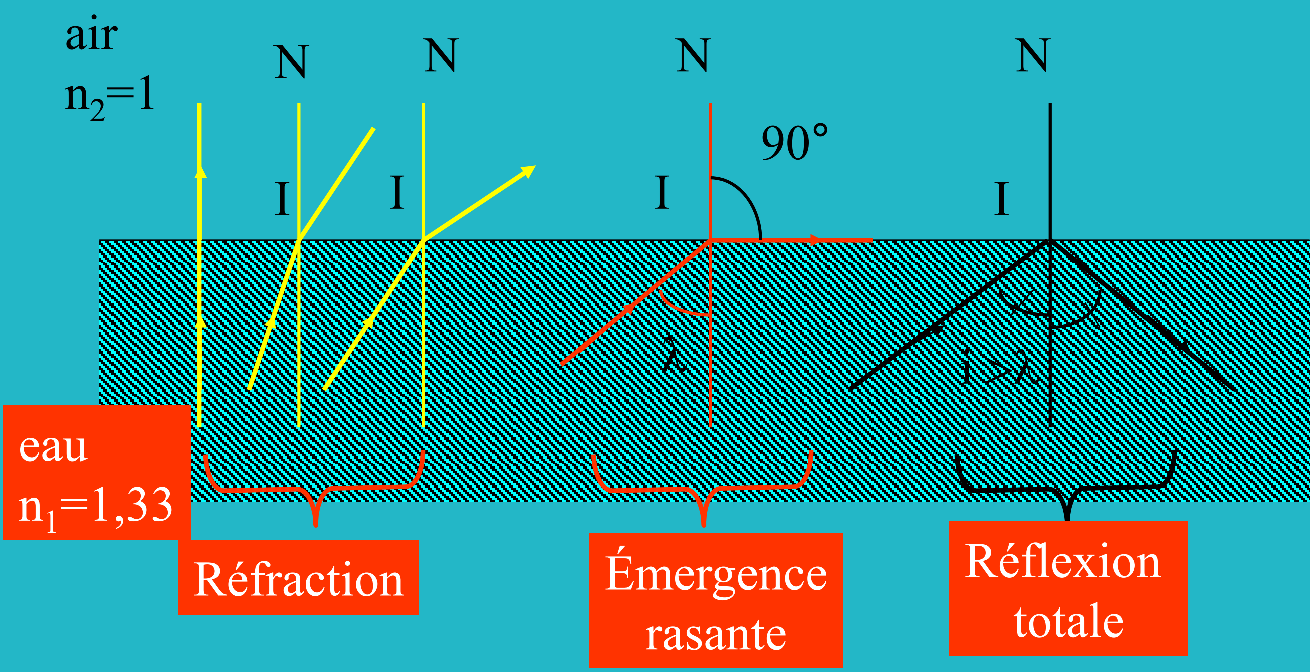
- **l'image d'un objet est toujours située du même coté que l'objet par rapport au dioptre.**
- **à un objet réel correspond une image virtuelle et vice versa.**

$$\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}} = \frac{HA'}{HA} = \frac{n_2}{n_1}$$

• Si $n_2 > n_1$ l 'image est plus loin du dioptre que l 'objet

• Si $n_2 < n_1$ l 'image est plus proche du dioptre que l 'objet

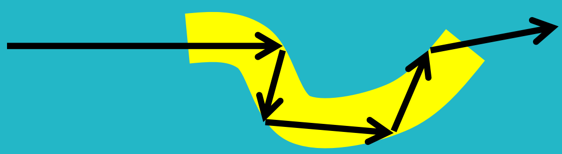
en résumé



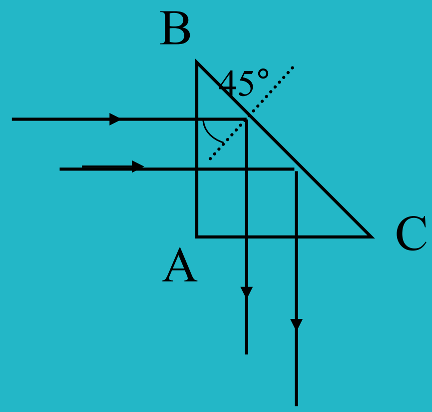
Exemple de la réfraction verre (n_1= 1,5) / air (n_2=1) :
λ=arcsin (1 / 1,5) = 42°; dans l'eau λ =49°

applications

- Fibres optiques



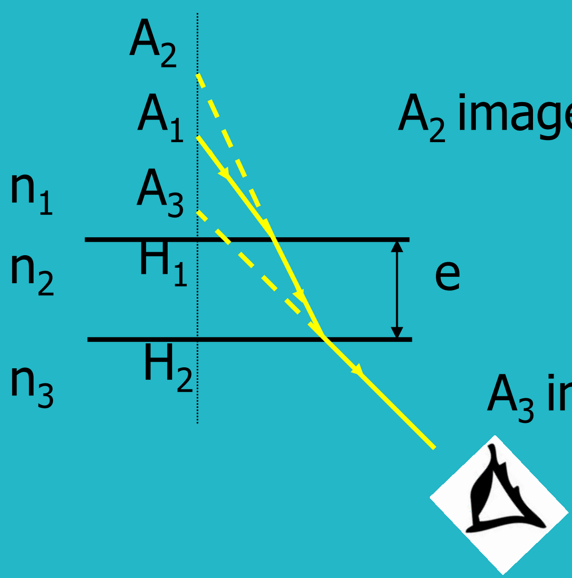
- Prisme à réflexion totale



Lame à faces parallèles

Ensemble de deux dioptres plans parallèles

A_1 point objet



A_2 image intermédiaire due au dioptre H_1

$$\frac{n_1}{H_1A_1} = \frac{n_2}{H_1A_2}$$

A_3 image de A_2 dans le dioptre H_2
= image finale

$$\frac{n_2}{H_2A_2} = \frac{n_3}{H_2A_3}$$

$$\overline{A_1A_3} = \overline{H_1A_3} - \overline{H_1A_1} = \overline{H_1H_2} + \overline{H_2A_3} - \overline{H_1A_1}$$

$$\frac{n_2}{\overline{H_2A_2}} = \frac{n_3}{\overline{H_2A_3}}$$

$$\overline{H_1H_2} = e$$

$$\overline{A_1A_3} = e + \frac{n_3}{n_2}\overline{H_2A_2} - \overline{H_1A_1}$$

$$= e + \frac{n_3}{n_2}(\overline{H_2H_1} + \overline{H_1A_2}) - \overline{H_1A_1}$$

$$\frac{n_1}{\overline{H_1A_1}} = \frac{n_2}{\overline{H_1A_2}}$$

$$\overline{A_1A_3} = e + \frac{n_3}{n_2}\left(-e + \frac{n_2}{n_1}\overline{H_1A_1}\right) - \overline{H_1A_1}$$

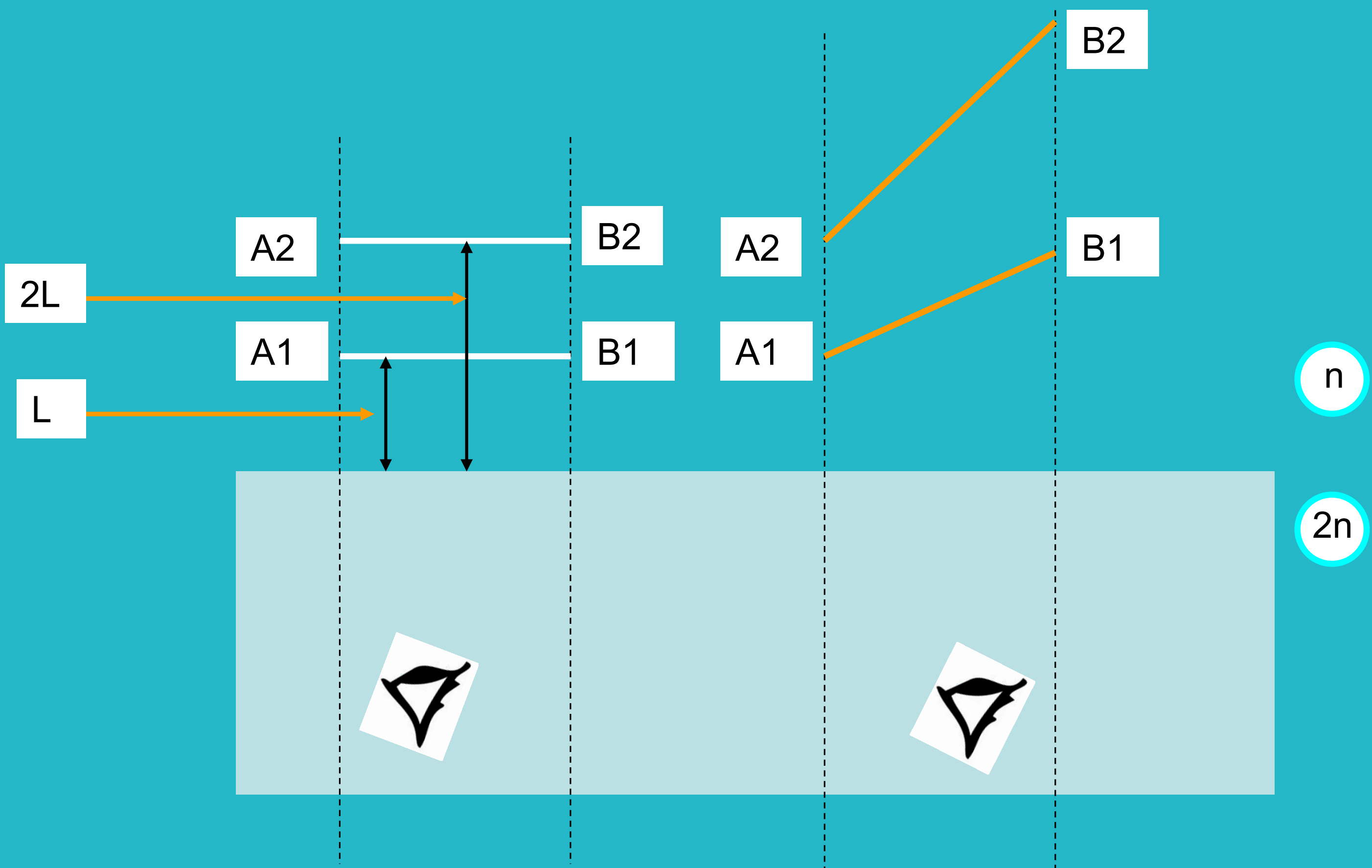
$$\overline{A_1A_3} = e\left(1 - \frac{n_3}{n_2}\right) + \overline{H_1A_1}\left(\frac{n_3}{n_1} - 1\right)$$

Pour une lame dans l 'air : $n_1 = n_3 = 1$ et $n_2 = 1,5 = n$

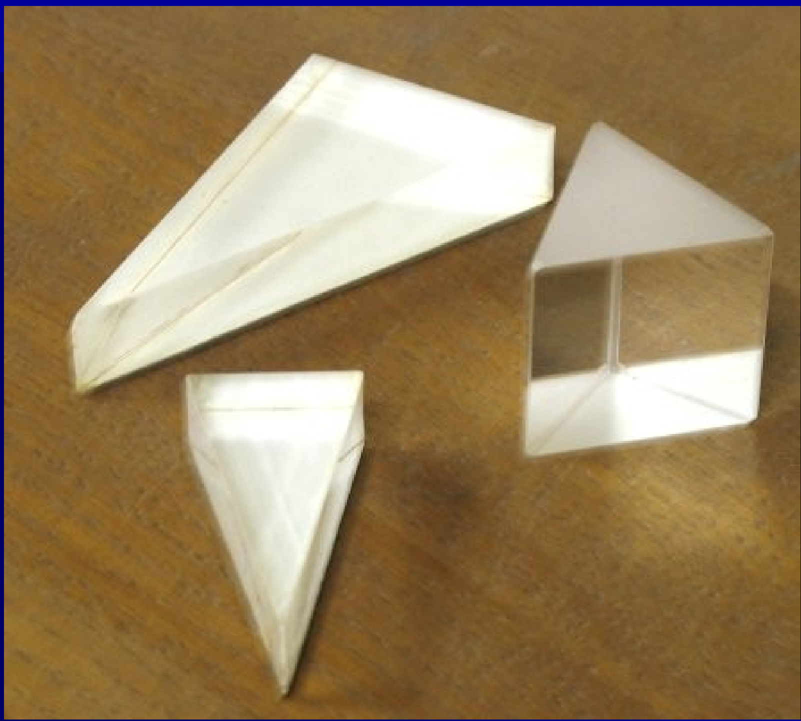
$$\overline{A_1A_3} = e\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Une lame de verre "rapproche" les objets.

Image d'un objet étendu

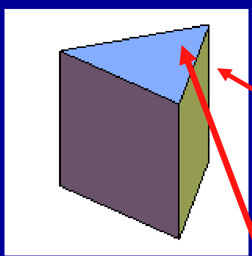


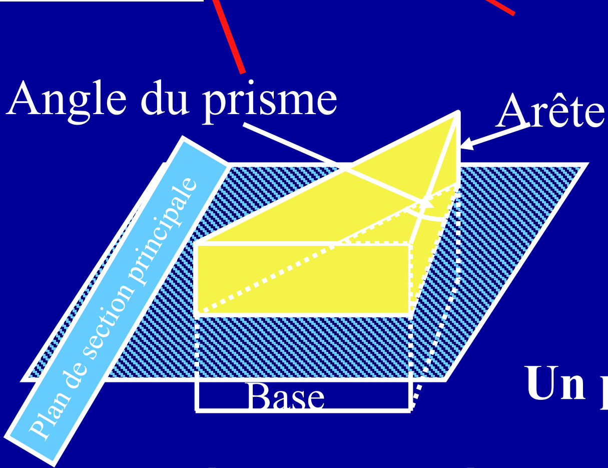
Exemples de prismes



Définitions

• milieu homogène, transparent d’indice n limité par deux dioptres plans non parallèles.



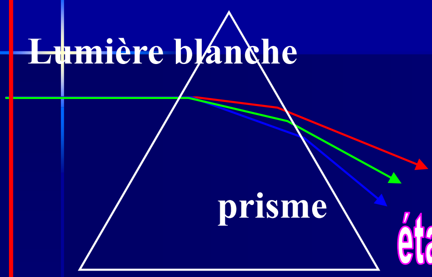


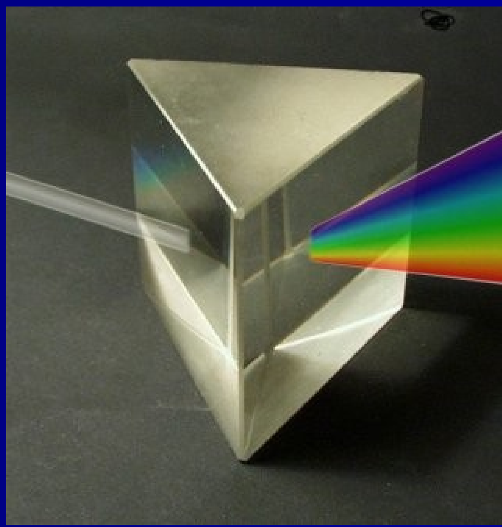
• L'intersection de ces dioptres constitue l'arête du prisme.

Un prisme réalise deux actions

- **Dévier la lumière de la même manière aux deux interfaces d’entrée et de sortie**

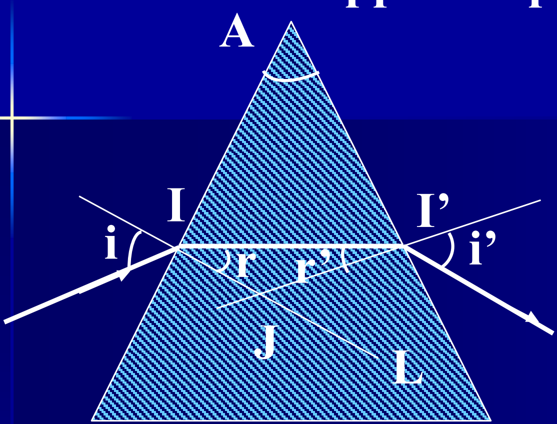
• Étaler les couleurs à cause de la dispersion.





Marche d ’un rayon lumineux. Formules du prisme

On suppose le prisme placé dans l'air d'indice 1.



Plan de section principale

Réfraction au point d’incidence

$$\sin i = n \sin r$$

Réfraction au point d’émergence

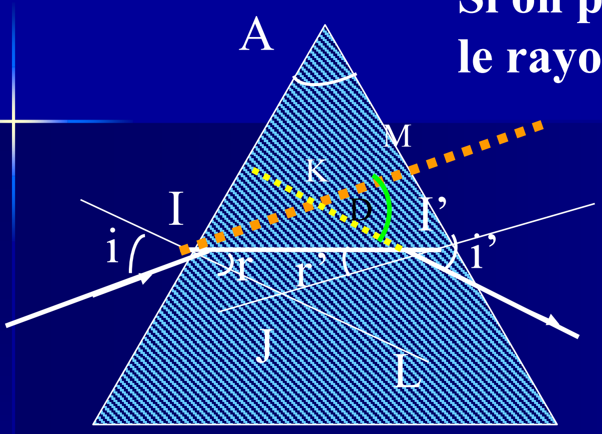
$$\sin i' = n \sin r'$$

Relation entre r, r’ et A

Dans triangle IJI’ l’angle I’JL (extérieur) = somme des angles intérieurs : r+r’

$$\boxed{A = r + r'}$$

Déviation d'un rayon



Si on prolonge le rayon incident il coupe le rayon émergent en K

Angle MKI' = déviation D du rayon incident lors de sa traversée du prisme

D est l'angle extérieur du triangle KII'

$$D = (i - r) + (i' - r') = i + i' - (r + r')$$

$$D = i + i' - A$$

- La déviation D est l'angle dont le prisme dévie les rayons lumineux. Le rayon émergent est toujours dévié vers la base du prisme (D > 0).

- Comme l'<u>indice de réfraction</u> du prisme <u>dépend de la longueur d'onde λ</u> de la lumière incidente, l'angle de déviation D dépend de la couleur de la lumière qui traverse le prisme : c'est le phénomène de <u>dispersion</u> de la lumière qui fait du prisme un élément utile en spectroscopie.

• Relations fondamentales

•Il existe quatre relations fondamentales du prisme qui permettent de calculer les quatre inconnues (i', r, r', D) en fonction des éléments connus (i, A, n).

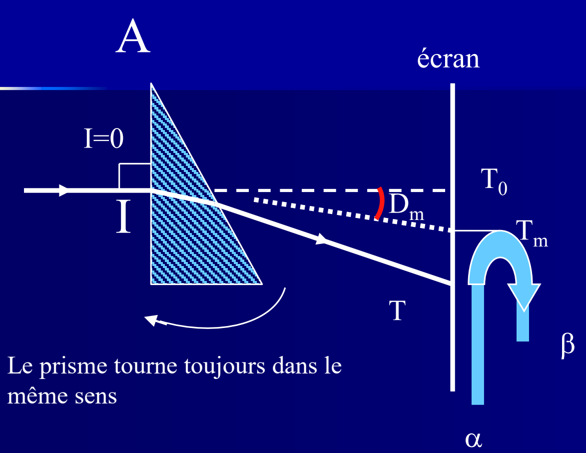
$\sin i = n \sin r$ $\quad\quad$ $\sin i' = n \sin r'$

$A = r + r'$ $\quad\quad$ $D = i + i' - A$

On en déduit par exemple la déviation D(i, A, n).

Étude de la déviation

Expérience



On fait tourner le prisme autour de son arête dans le sens de la flèche

Angle d'incidence croît régulièrement

La tache T se déplace sur l'écran suivant le trajet (α) puis reste un instant stationnaire en T_m pour se déplacer finalement en sens inverse suivant le trajet (β)

Conclusion : quand i varie, D décroît, passe par un minimum et croît ensuite

L'expérience montre qu'il existe une valeur i_m de l'angle d'incidence i qui rend la déviation D minimale.

$i_m \Longleftrightarrow D_m$ minimum de déviation

Après calculs, la seule solution acceptable est :

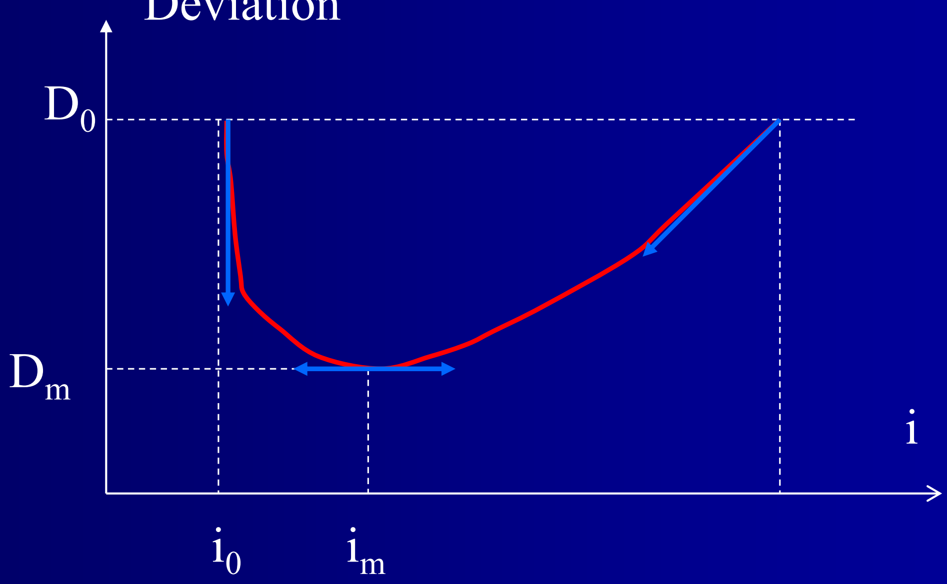
$$i = i' = i_m = \frac{A + D_m}{2} \longrightarrow r = r' = \frac{A}{2}$$

En substituant dans sin i= n sin r, on obtient la formule de Fraunhofer, utile pour mesurer l'indice du prisme :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

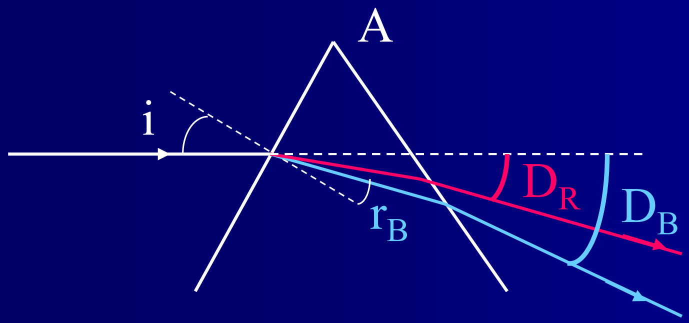
Remarque : au minimum de déviation le rayon lumineux a un parcours symétrique par rapport au plan bissecteur de l'angle du prisme (r=r' et i=i').

Variation de D en fonction de i



Influence de l'indice n

n ↘ Quand λ ↗ ⟶ $n_R < n_B$



$$\sin(r_R) = \frac{\sin i}{n_R}$$

$$\sin(r_B) = \frac{\sin i}{n_B}$$

$\mathbf{r_B < r_R}$

Comme $r' = A - r$ ⟶ $\mathbf{r'_B > r'_R}$

$\mathbf{n_B \sin r'_B > n_R \sin r'_R}$

$\mathbf{i'_B > i'_R}$

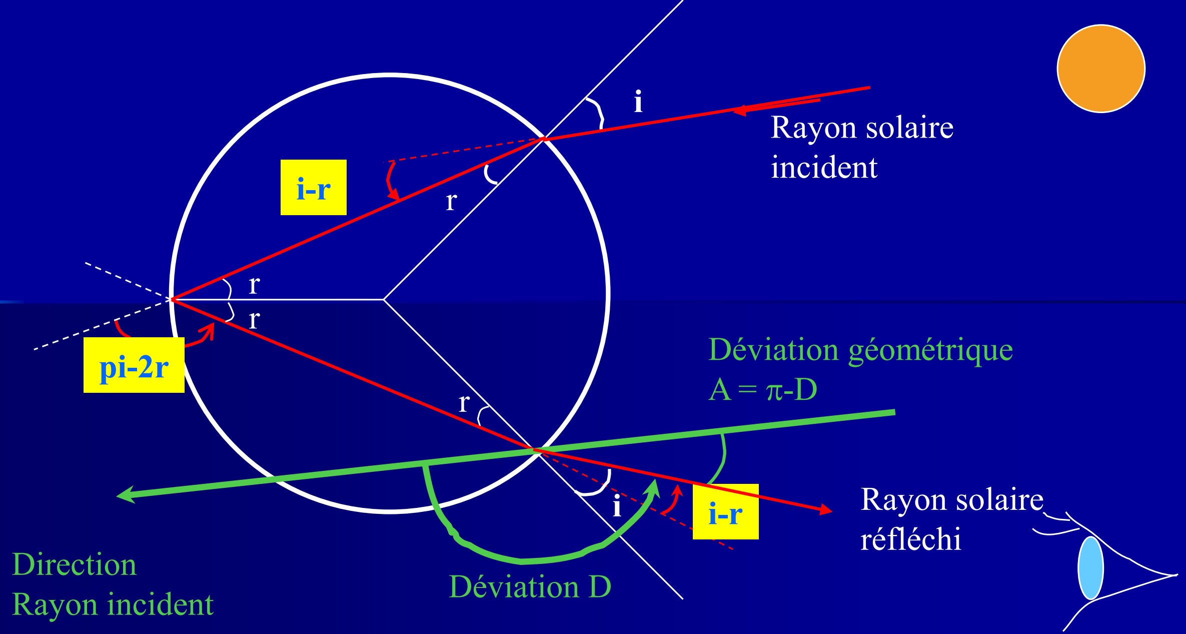
Mais : $D = i + i' - A$

$\boxed{\mathbf{D_B > D_R}}$

Pourquoi un arc en ciel ?

L'arc en ciel est un phénomène de dispersion de lumière sur un mur d'eau formé de milliers de gouttes d'eau.

Puisque la taille des gouttes d'eau est très grande devant la longueur d'onde de la lumière, on peut appliquer les règles de l'optique géométrique à une goutte d'eau sphérique d'indice n environ égal à 1.33.



L'addition des angles en jaune sur la figure donne la valeur de la déviation du rayon réfléchi par rapport au rayon solaire incident.

$$D = \pi + 2i - 4r$$

Si l'on ne travaille pas avec des angles orientés, la déviation est donnée par l'angle : $A = \pi - D$

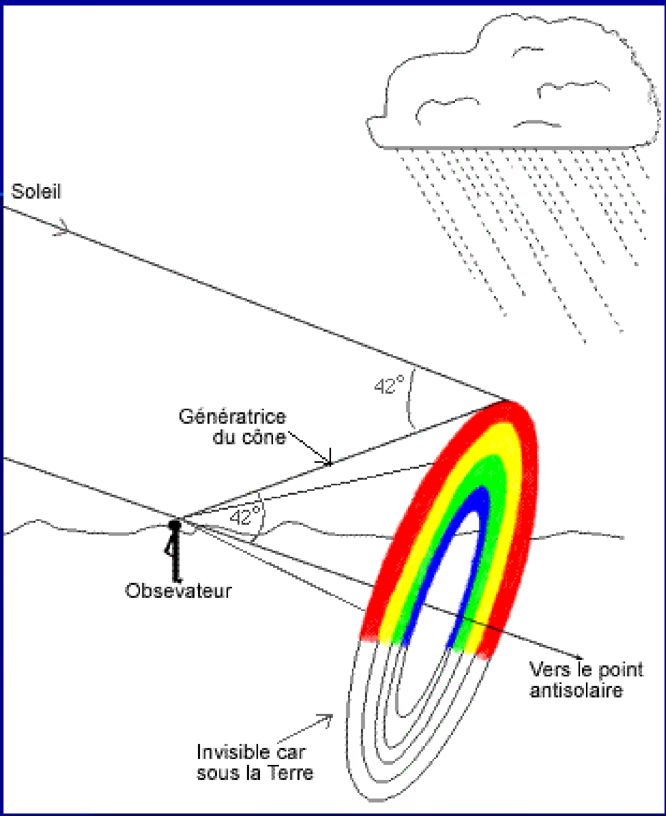
$-\frac{\pi}{2} \leq i \leq \frac{\pi}{2}$ ⇒ les rayons sont réfléchis dans toutes les directions

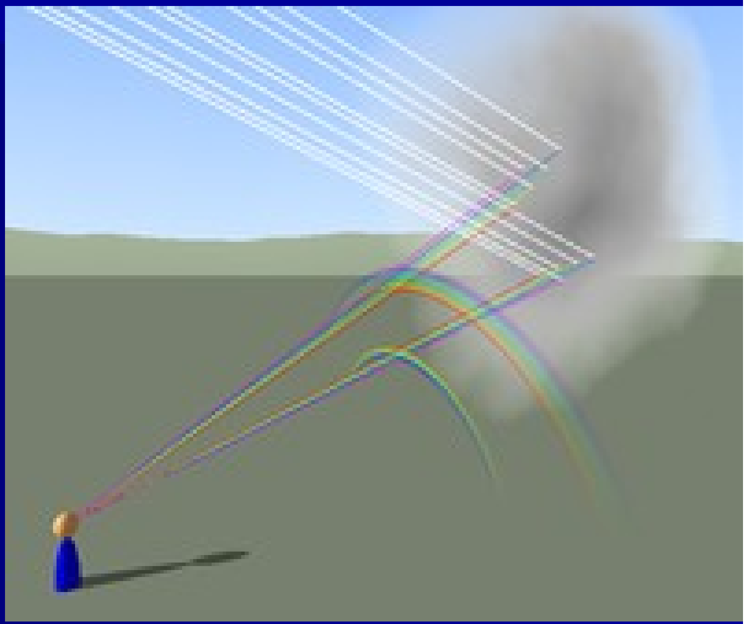
mais il existe une grande plage de valeurs de i pour laquelle A est à peu près constant (maximum de la fonction).

Comme pour le prisme, la déviation dépend de l'indice qui lui-même dépend de la longueur d'onde (couleur) du rayon lumineux.

- Les rouges seront les plus déviés donc ils apparaissent à l'extérieur de l'arc en ciel.

- Les rayons bleus sont déviés d'un angle A=40.6° et les rayons rouge d'un angle A=42.0°.

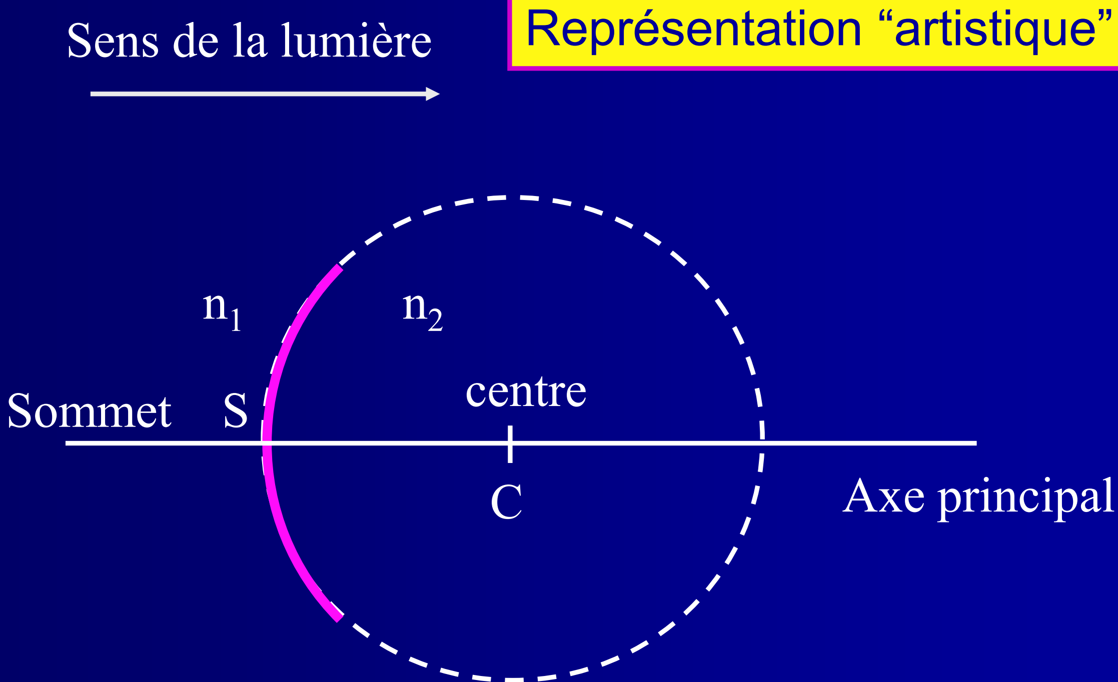




Chapitre 3: DIOPTRE ET MIROIR SPHÉRIQUE

Un dioptre sphérique est un ensemble de deux milieux transparents d'indices optiques différents, séparés par une interface sphérique mince.

Représentation "artistique"



- La valeur algébrique $\overline{SC}$ est le rayon du dioptre : c'est un nombre signé, le sens de la lumière donne le sens positif.

- Toutes les distances seront données en valeur algébrique avec l'origine au sommet S.

- Les termes "concave" et "convexe" sont utilisés mais sont imprécis.

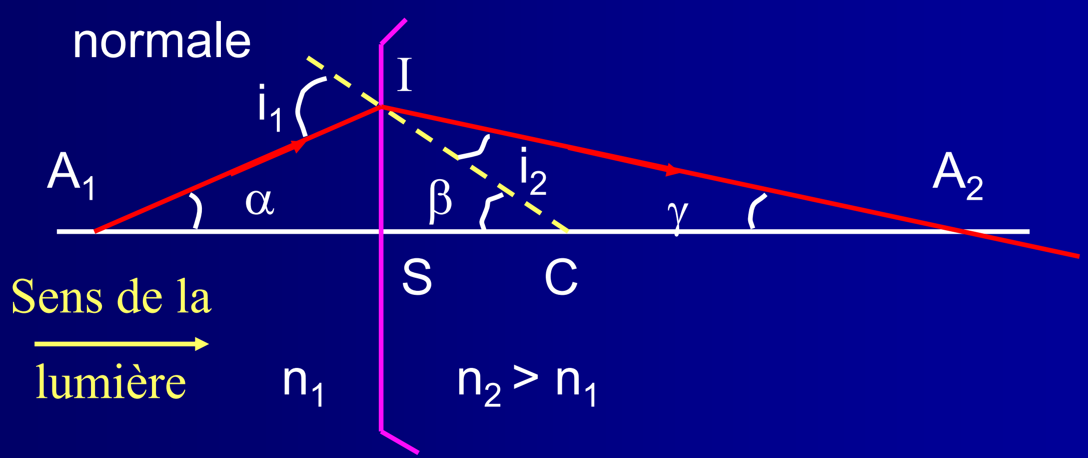
Le dioptre sphérique n'est pas stigmatique. En pratique, on se place dans les conditions de l 'approximation de Gauss :

- rayons peu inclinés sur l 'axe
- faisceau issu du point objet A étroit
- rayons voisins de l'axe

Le dioptre est alors stigmatique : l 'image d 'un point est un point

Représentation schématique correcte

Les schémas sont faux si le dioptre est représenté par un arc de cercle.



Noter que dans la représentation schématique la normale au dioptre ne fait pas un angle de $\pi/2$ avec l'interface.

Relation de conjugaison

$$\alpha \approx \frac{SI}{SA_1} = -\frac{\overline{SI}}{\overline{SA_1}}$$

$$\beta \approx \frac{SI}{SC} = \frac{\overline{SI}}{\overline{SC}}$$

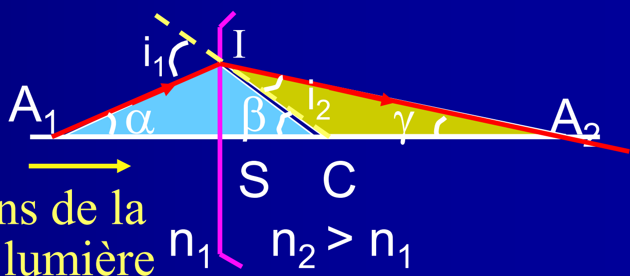
$$\gamma \approx \frac{SI}{SA_2} = \frac{\overline{SI}}{\overline{SA_2}}$$

1

Approximation de Gauss

$$n_1 i_1 = n_2 i_2$$

triangles A_1IC & IA_2C



2 $$i_1 = \alpha + \beta$$

3 $$\beta = i_2 + \gamma = \frac{n_1}{n_2} i_1 + \gamma$$

$$\beta = \frac{n_1}{n_2}(\alpha + \beta) + \gamma$$

Soit d 'après les relations 1 :

$$\frac{\overline{SI}}{\overline{SC}} = \frac{n_1}{n_2}\left(-\frac{\overline{SI}}{\overline{SA_1}} + \frac{\overline{SI}}{\overline{SC}}\right) + \frac{\overline{SI}}{\overline{SA_2}}$$

$$\frac{n_1}{\overline{SA_1}} - \frac{n_2}{\overline{SA_2}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}}$$

1

$$\alpha \approx \frac{SI}{SA_1} = -\frac{\overline{SI}}{\overline{SA_1}}$$

$$\beta \approx \frac{SI}{SC} = \frac{\overline{SI}}{\overline{SC}}$$

$$\gamma \approx \frac{SI}{SA_2} = \frac{\overline{SI}}{\overline{SA_2}}$$

Remarques sur la relation de conjugaison

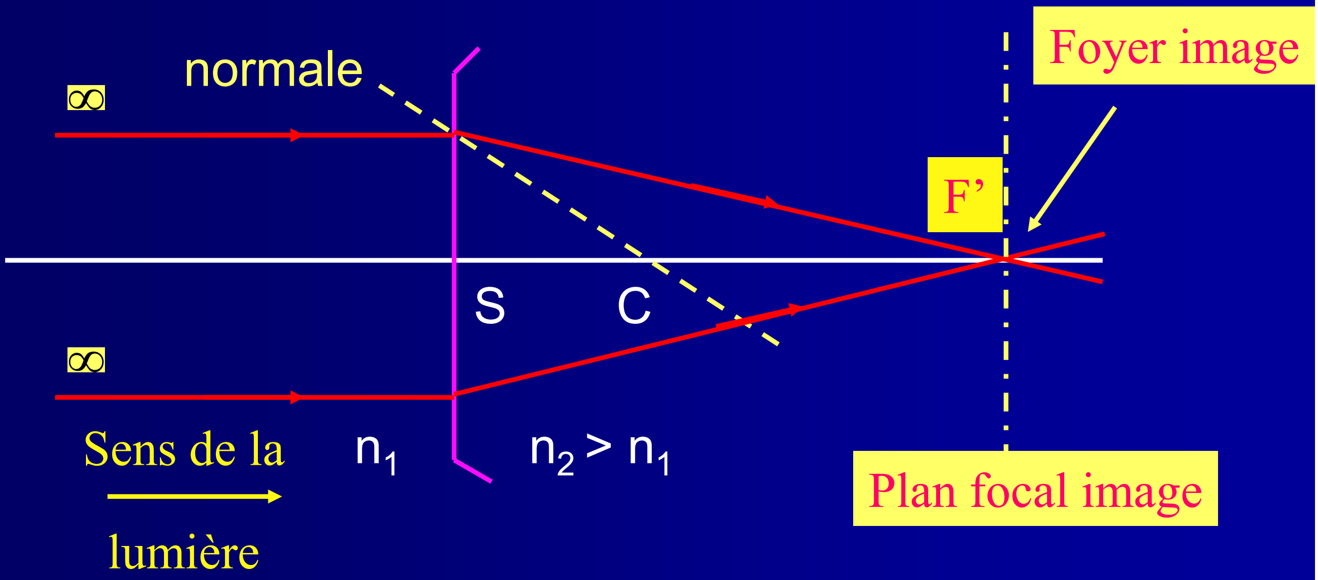
- Valable uniquement dans l'approximation de Gauss
- Cas particulier : dioptre plan pour

$$\overline{SC} = \infty \quad \rightarrow \quad \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{n_1}{\overline{SA_1}} - \frac{n_2}{\overline{SA_2}} = 0$$

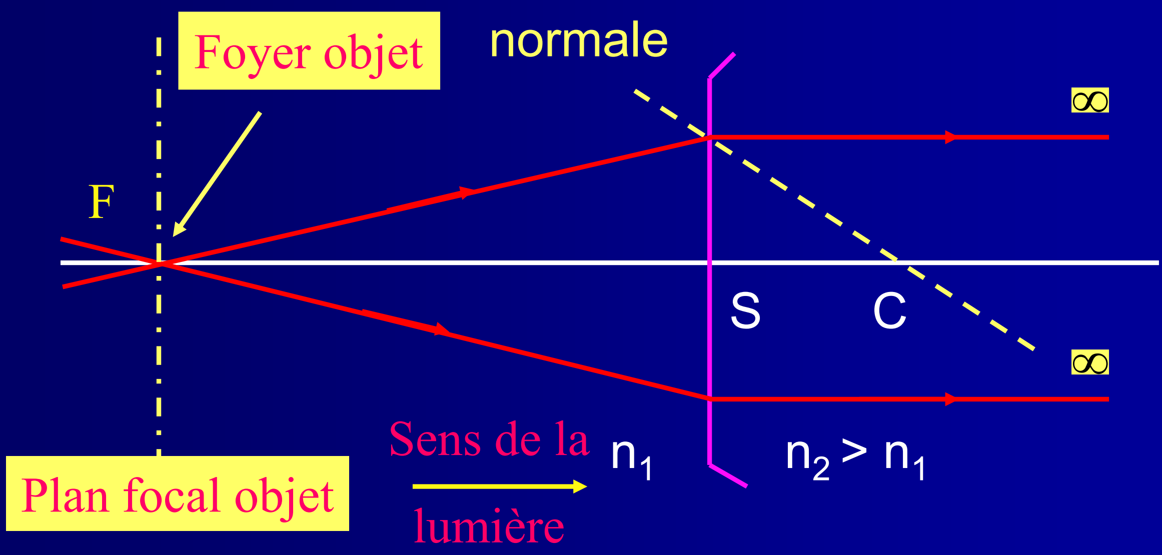
- Ne pas employer les notations p, p', R, sources de confusion, mais les valeurs algébriques $\overline{SA}$, $\overline{SC}$ etc.

Points remarquables du dioptre sphérique

• L'image d'un objet à l'infini sur l'axe principal se forme en un point F' de cet axe nommé le foyer image. La valeur de $\overline{SF'}$ est la distance focale image.



• L'objet qui donne une image à l'infini sur l'axe principal est positionné en un point **F** de cet axe nommé le foyer objet. La valeur de $\overline{SF}$ est la distance focale objet.



• La position des foyers détermine, dans les conditions de Gauss, les plans focaux objet et image. (voir figures)

Calcul de la distance focale image

Le foyer-image est l'image dans le milieu n_2 d'un objet à l'infini dans le milieu n_1.

$$\frac{n_1}{\overline{SA_1}} - \frac{n_2}{\overline{SA_2}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}}$$

$$\frac{n_1}{-\infty} - \frac{n_2}{\overline{SF'}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}}$$

$$\boxed{\overline{SF'} = -\overline{SC}\frac{n_2}{n_1 - n_2}}$$

Calcul de la distance focale objet

le foyer-objet est le point de l'axe principal dans le milieu-objet n_1 qui donne une image à l'infini dans le milieu-image n_2.

$$\frac{n_1}{\overline{SA_1}} - \frac{n_2}{\overline{SA_2}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}}$$

$$\frac{n_1}{\overline{SF}} - \frac{n_2}{\infty} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}}$$

$$\boxed{\overline{SF} = +\overline{SC}\frac{n_1}{n_1 - n_2}}$$

Relations remarquables

La position respective des 4 points : S, C, Fet F ’ n’est pas quelconque.

$$\overline{SF} = +\overline{SC}\frac{n_1}{n_1 - n_2}$$

$$\overline{SF'} = -\overline{SC}\frac{n_2}{n_1 - n_2}$$

$$\overline{SF} + \overline{SF'} = \overline{SC}\left(\frac{n_1}{n_1 - n_2} - \frac{n_2}{n_1 - n_2}\right) = \overline{SC}$$

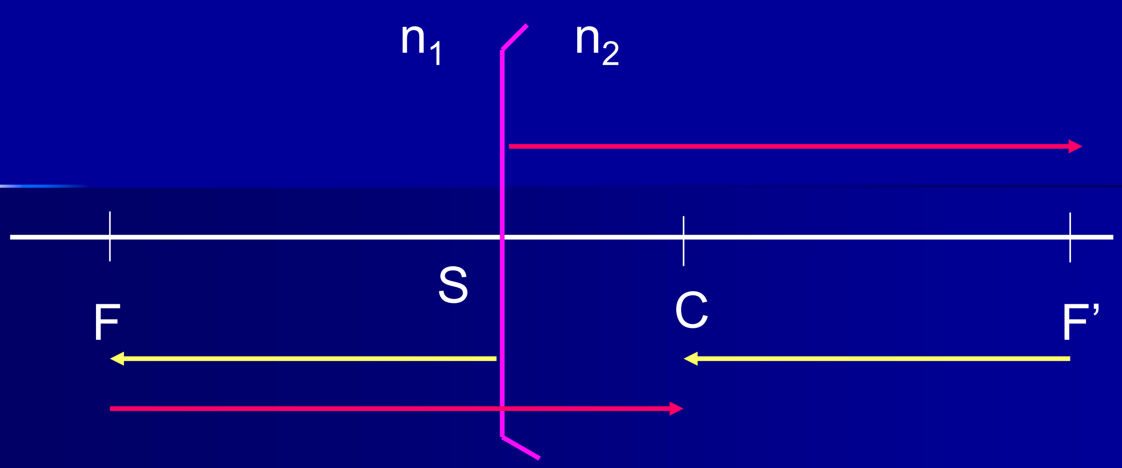
$$\boxed{\overline{SF} + \overline{SF'} = \overline{SC}}$$

- $\overline{SF} = \overline{SC} - \overline{SF'} = \overline{SC} + \overline{F'S} = \overline{F'S} + \overline{SC} = \overline{F'C}$

$$\boxed{\overline{SF} = \overline{F'C}}$$

- $\overline{SF'} = \overline{SC} - \overline{SF} = \overline{SC} + \overline{FS} = \overline{FS} + \overline{SC} = \overline{FC}$

$$\boxed{\overline{SF'} = \overline{FC}}$$



A utiliser pour la cohérence du tracé des images.

Les foyers objet et image sont toujours symétriques par rapport au milieu du segment SC

Pour tracer l 'image d 'un point dans le système optique, on utilise 2 rayons de trajet connu.

On a 3 possibilités simples à sa disposition :

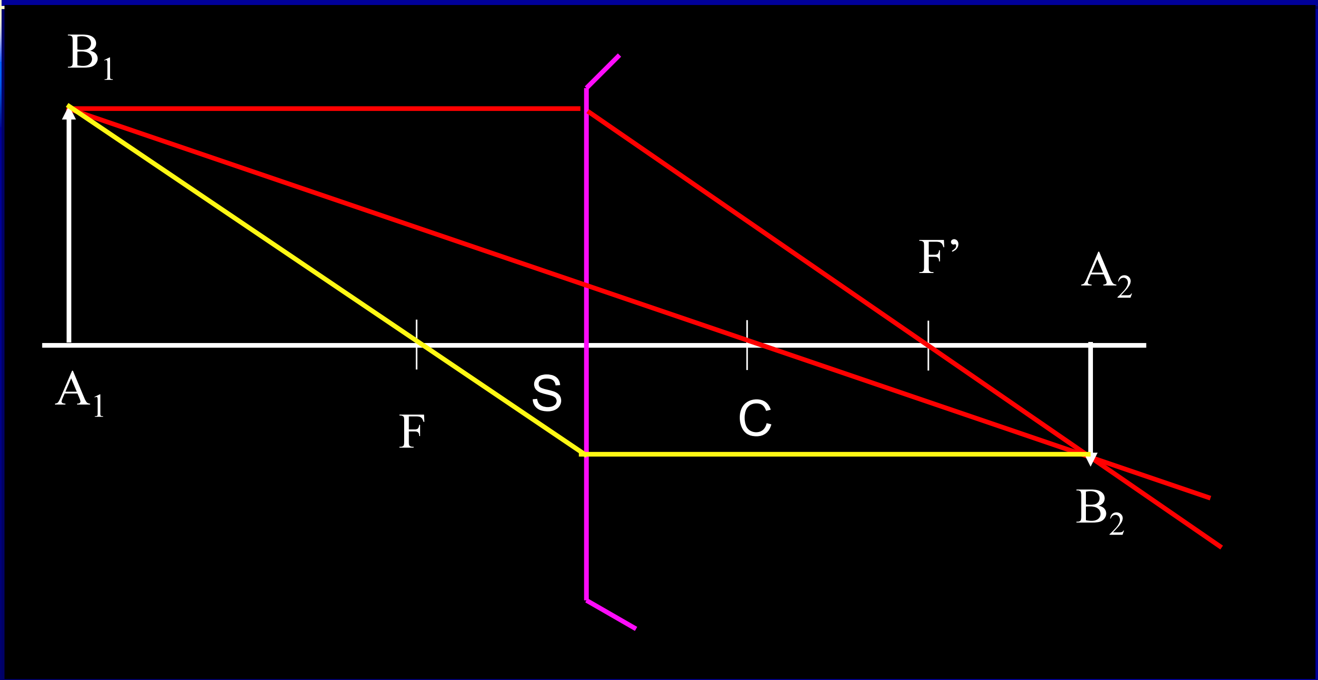
– 1 rayon qui passe par C : il n'est pas dévié.

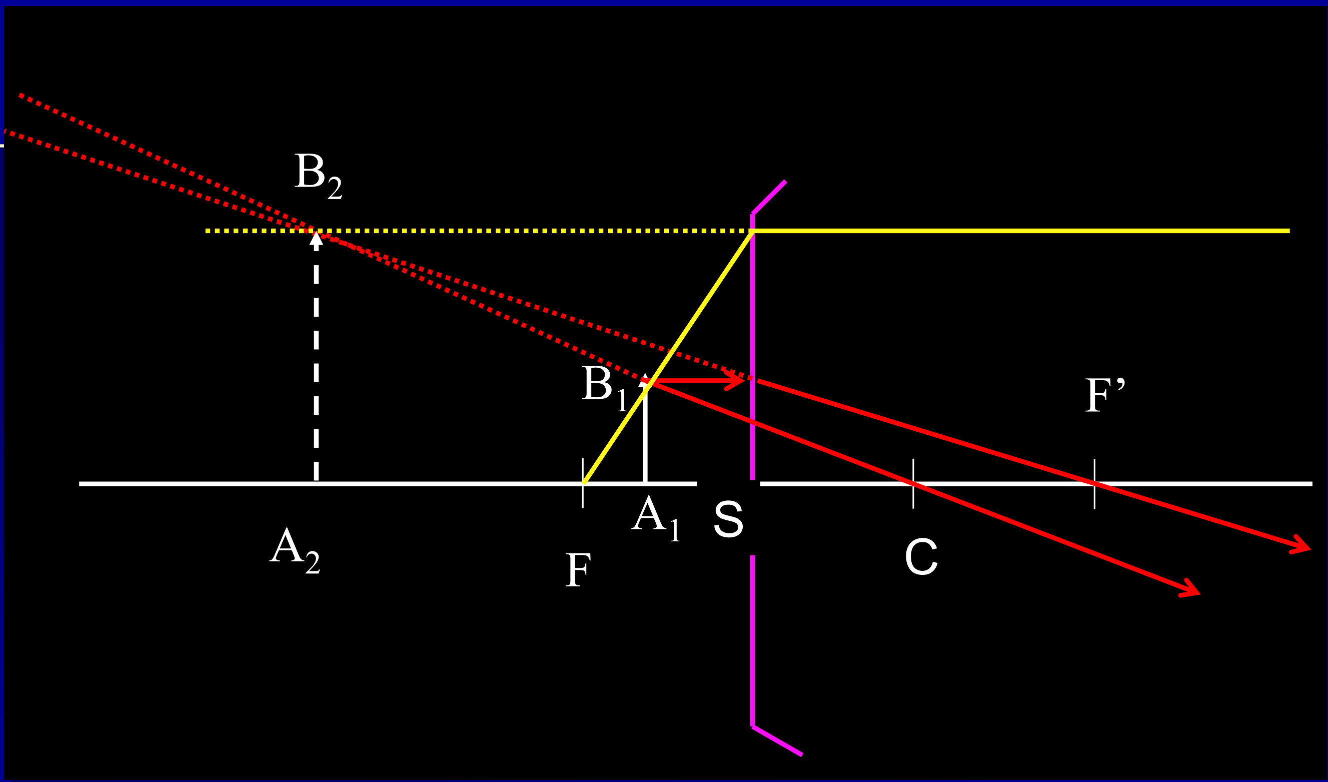
– 1 rayon parallèle à l'axe principal dans le milieu objet n_1 ressort en passant par le foyer-image F '.

– 1 rayon qui passe par le foyer-objet F ressort dans le milieu image n_2 parallèlement à l'axe principal.

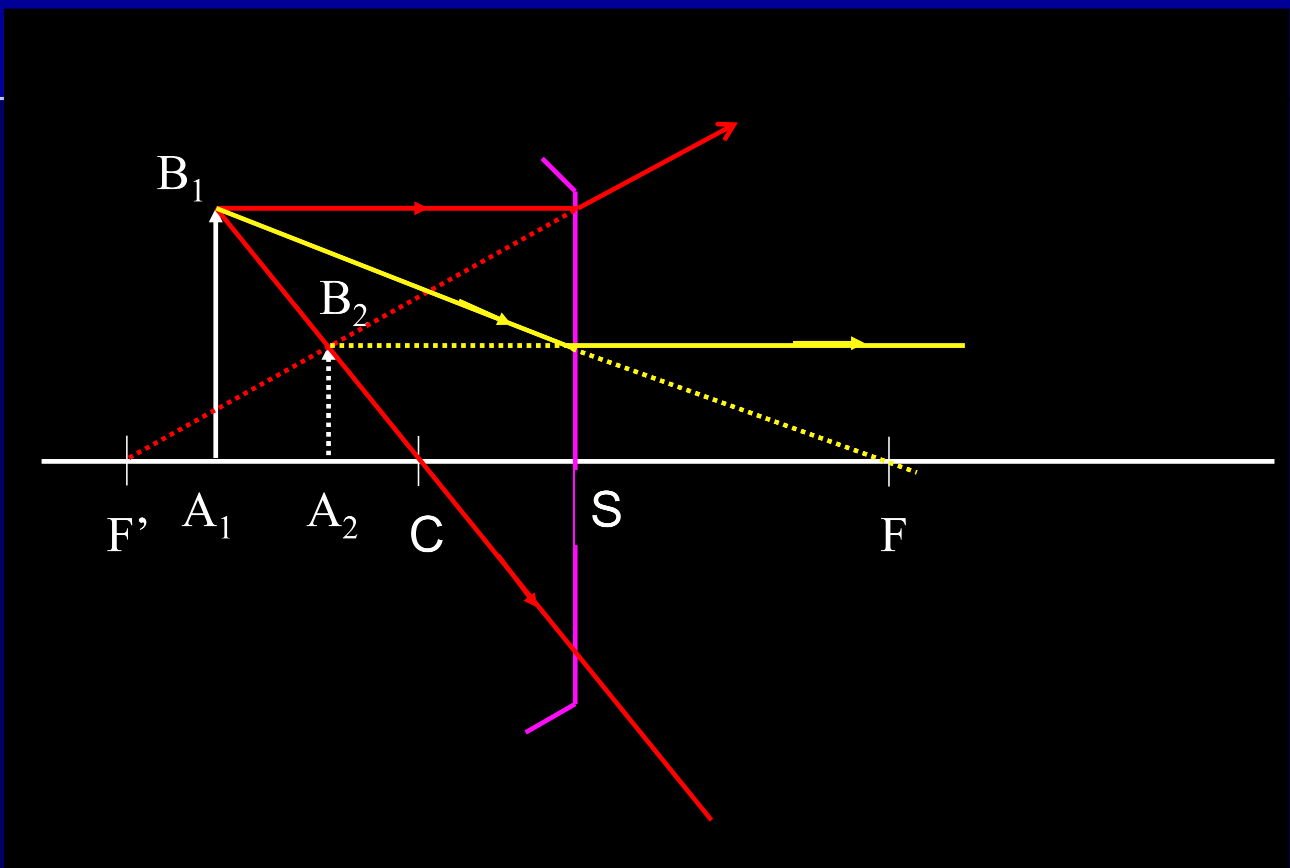
Exemples de tracés : dioptre “convexe”

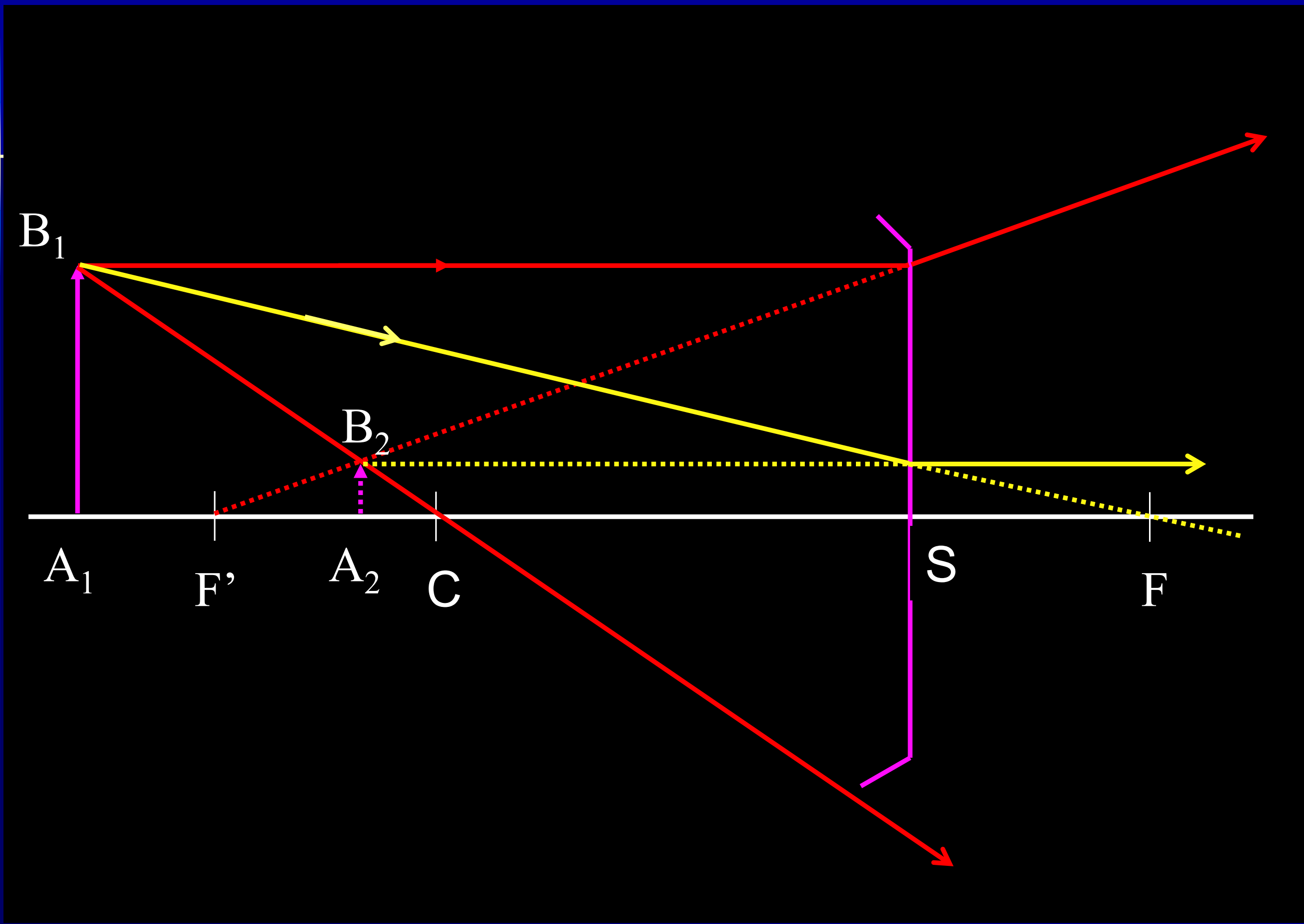
$n_2 > n_1$ dans toutes les figures.





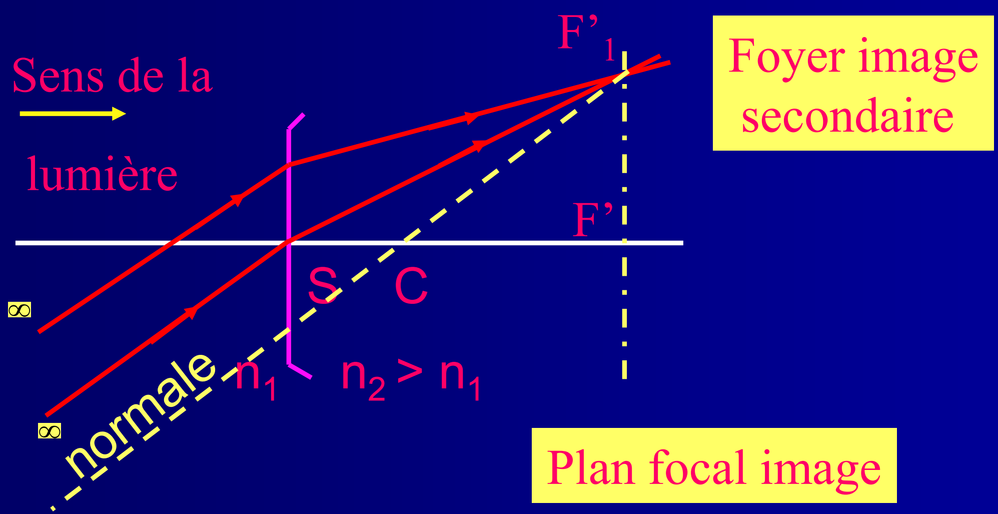
Exemples de tracés : dioptre “concave”



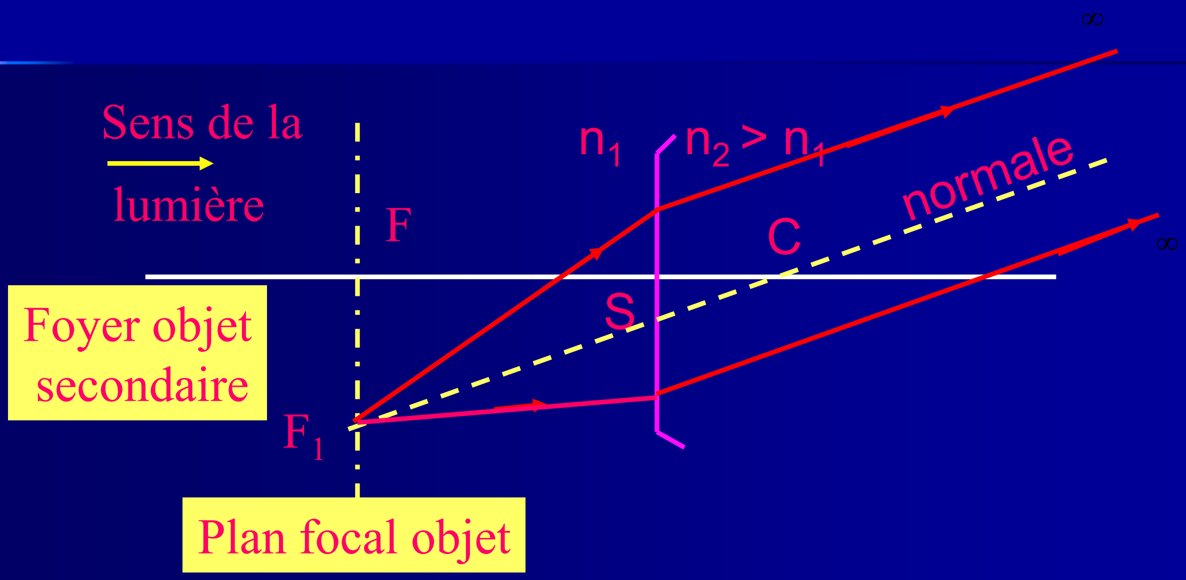


•Chaque point du plan focal image correspond à une direction particulière des rayons incidents parallèles, dans le milieu objet.

•Le rayon qui passe par le centre C est incident sur le dioptre avec i = 0 et n'est donc pas dévié. Noter que ce rayon particulier qui indique la direction d'incidence détermine la position du foyer secondaire F'_1



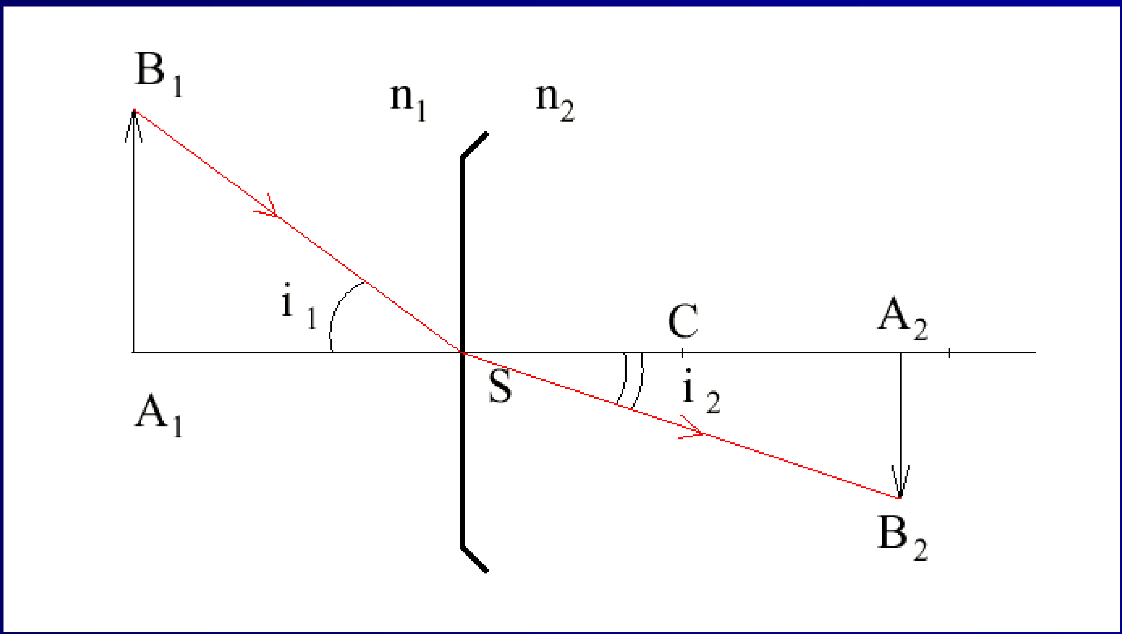
Même remarque pour le plan focal objet.



Calcul du grandissement γ

C 'est le rapport $\gamma = \dfrac{\overline{A_2 B_2}}{\overline{A_1 B_1}}$

Il mesure la taille de l'image par rapport à l'objet.



Dans le triangle : SA_1B_1

$$\overline{A_1B_1} = \overline{SA_1}\, tg i_1 \approx \overline{SA_1}\, i_1$$

$$n_1 \overline{A_1B_1} \approx n_1 \overline{SA_1}\, i_1$$

$$n_1 i_1 = \overline{A_1B_1} \frac{n_1}{\overline{SA_1}}$$

Dans le triangle : SA_2B_2

$$\overline{A_2B_2} = \overline{SA_2}\, tg i_2 \approx \overline{SA_2}\, i_2$$

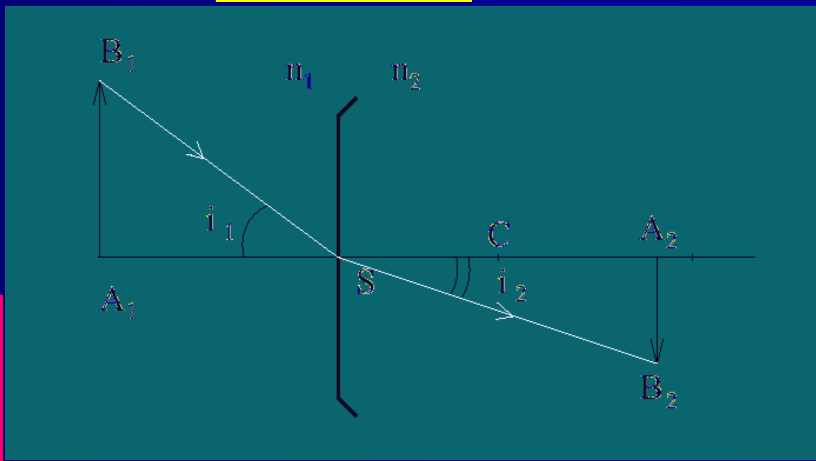
$$n_2 \overline{A_2B_2} \approx n_2 \overline{SA_2}\, i_2$$

$$n_2 i_2 = \overline{A_2B_2} \frac{n_2}{\overline{SA_2}}$$

Conditions de Gauss

$$n_1 i_1 = n_2 i_2$$

$$\overline{A_1B_1} \frac{n_1}{\overline{SA_1}} = \overline{A_2B_2} \frac{n_2}{\overline{SA_2}}$$

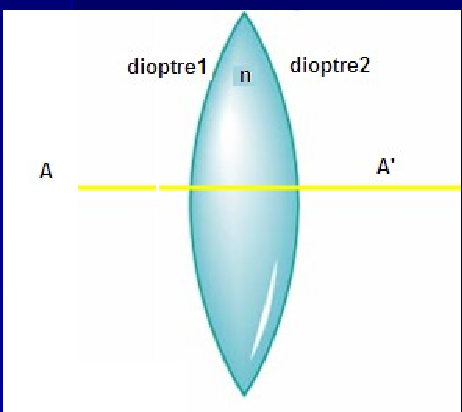


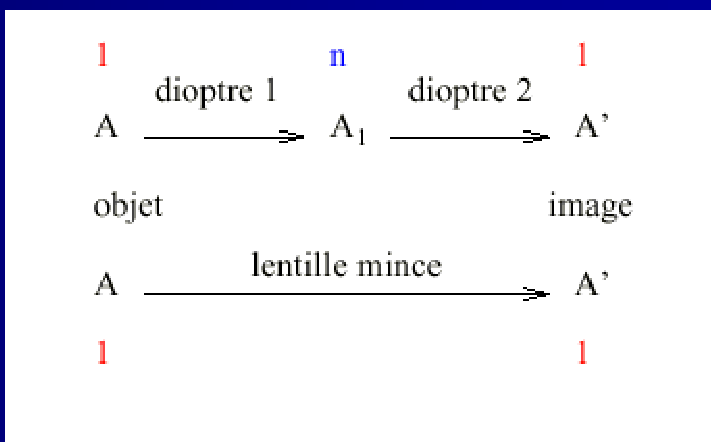
D 'où le grandissement

$$\gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{n_1 \overline{SA_2}}{n_2 \overline{SA_1}}$$

Application : la relation de conjugaison des lentilles minces

- Combinaison de deux dioptres sphériques :
  - Le premier séparant l'air (indice 1) du verre (indice n)
  - Le deuxième séparant le verre (indice n) de l'air (indice 1)





dioptre 1 $$\frac{1}{\overline{S_1A}} - \frac{n}{\overline{S_1A_1}} = \frac{1-n}{\overline{S_1C_1}}$$ (A_1 est un point du milieu n)

dioptre 2 $$\frac{n}{\overline{S_2A_1}} - \frac{1}{\overline{S_2A'}} = \frac{n-1}{\overline{S_2C_2}}$$

lentilles minces → S1 ~ S2 → centre optique O

$$\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{n}{\overline{OA_1}} = \frac{1-n}{\overline{OC_1}}$$
$$\frac{n}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{n-1}{\overline{OC_2}}$$

en ajoutant les 2 équations

$$\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = (1-n)\left(\frac{1}{\overline{OC_1}} - \frac{1}{\overline{OC_2}}\right)$$

distances focales

$\overline{OA} = \infty \quad \rightarrow \overline{OF'}$

$$\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\overline{OF'}} = (1-n)\left(\frac{1}{\overline{OC_1}} - \frac{1}{\overline{OC_2}}\right)$$

$\overline{OA'} = \infty \quad \rightarrow \overline{OF}$

$$\frac{1}{\overline{OF}} - \frac{1}{\infty} = (1-n)\left(\frac{1}{\overline{OC_1}} - \frac{1}{\overline{OC_2}}\right)$$

$$\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF}} = -\frac{1}{\overline{OF'}}$$

Remarques

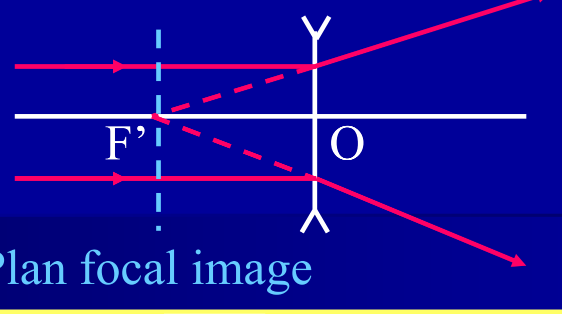
• Définition de la vergence V d 'une lentille

$$(1-n)\left(\frac{1}{\overline{OC_1}}-\frac{1}{\overline{OC_2}}\right)=\boxed{-V=-\frac{1}{\overline{OF'}}=\frac{1}{\overline{OF}}}$$

Unité : dioptrie (homogène à des m^{-1})

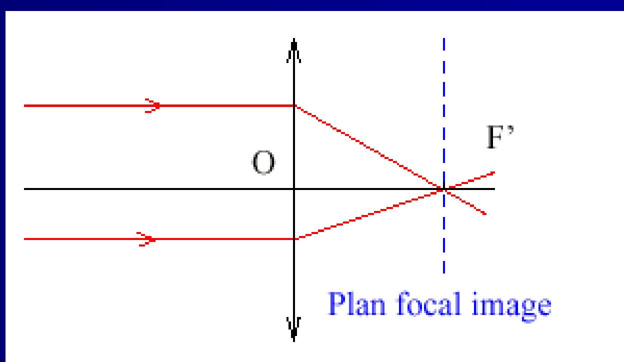
Attention : les distances doivent être exprimées en m.

• ⟶ V < 0



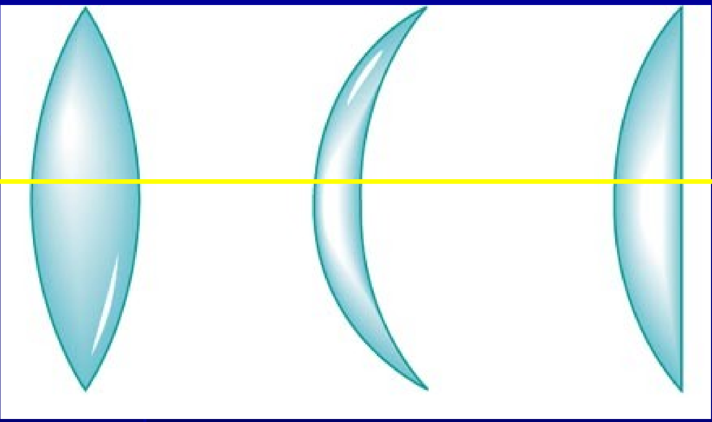
⟶ lentille divergente $\overline{OF'}<0$ et $\overline{OF}>0$

• ⟶ V > 0



⟶ lentille convergente $\overline{OF'}>0$ et $\overline{OF}<0$

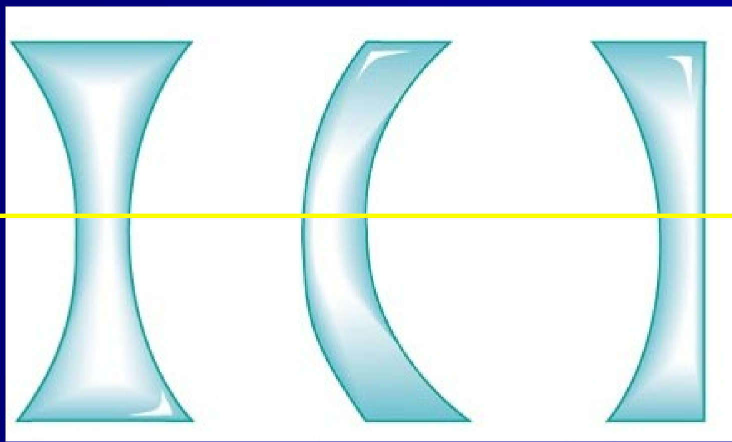
lentille biconvexe | Ménisque convergent | Lentille plan-convexe



Axe principal

Ménisque divergent | lentille plan-concave

lentille biconcave

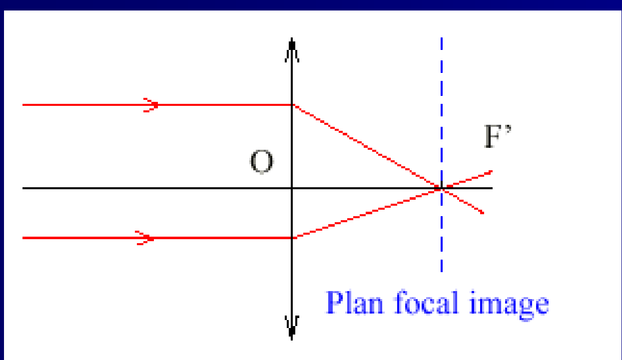


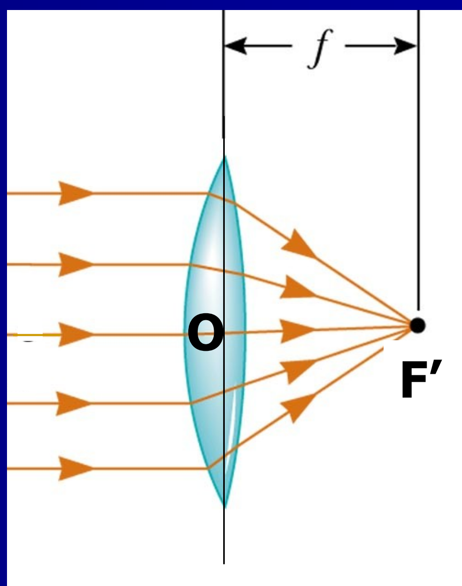
Axe principal

Foyer image

Lentille convergente

- **L'image d'un objet à l'infini sur l'axe principal se forme en un point F' de cet axe nommé le foyer image. La valeur de $\overline{OF'}$ est la distance focale image.**

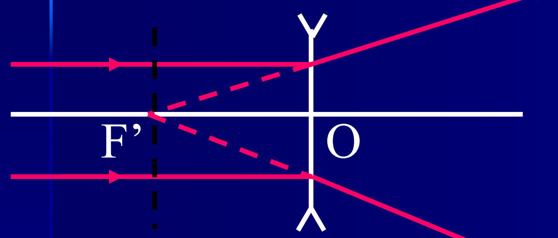




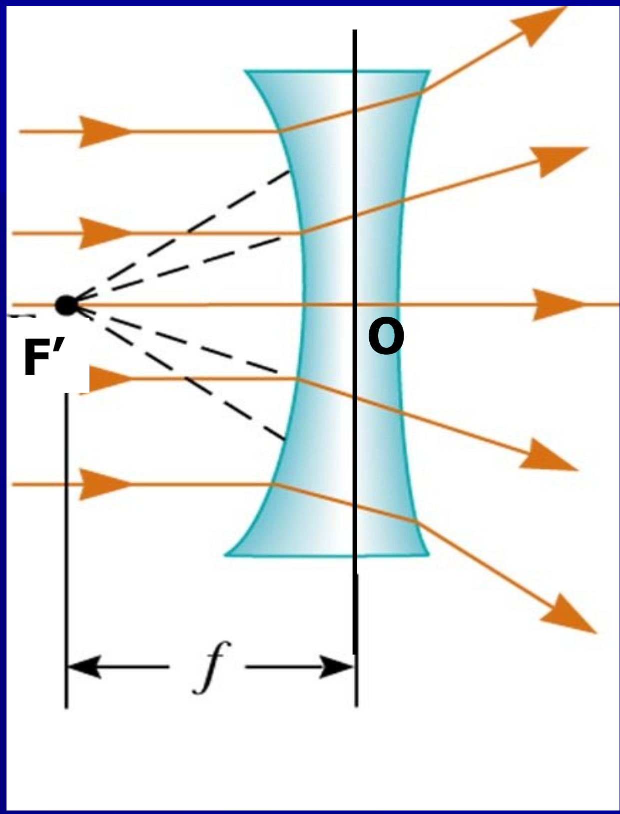
→ lentille convergente $\overline{OF}$ ' > 0

O se nomme le centre optique de la lentille

Lentille divergente



Plan focal image

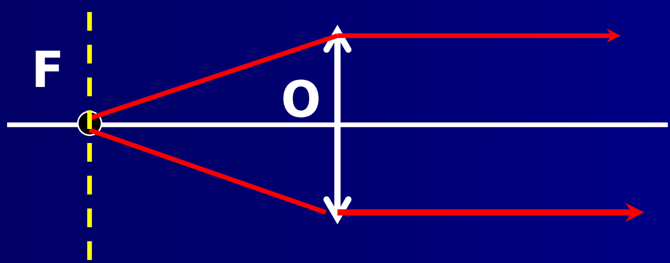


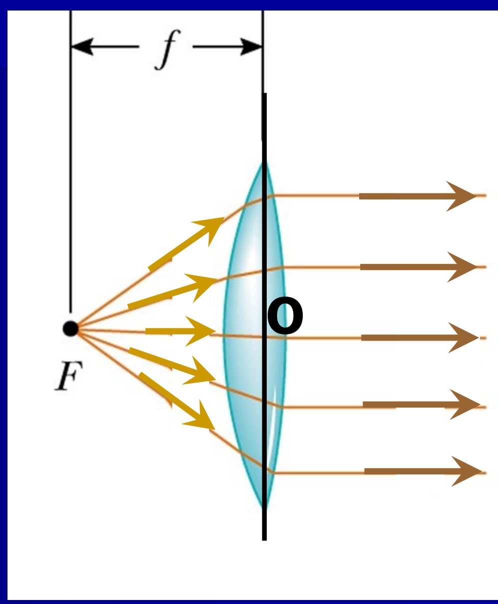
→ lentille divergente $\overline{OF'} < 0$

Foyer objet

Lentille convergente

- **L'objet qui donne une image à l'infini sur l'axe principal est positionné en un point F de cet axe nommé le foyer objet. La valeur de $\overline{OF}$ est la distance focale objet.**

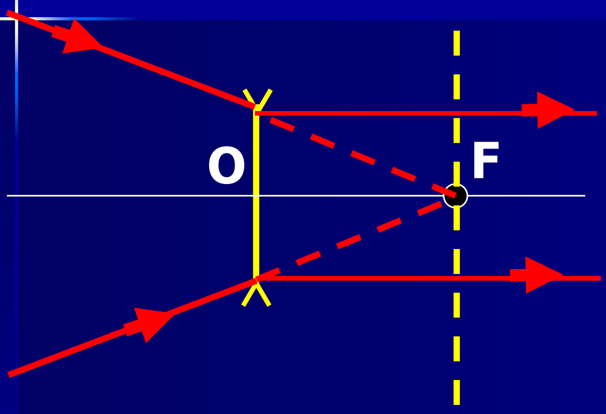




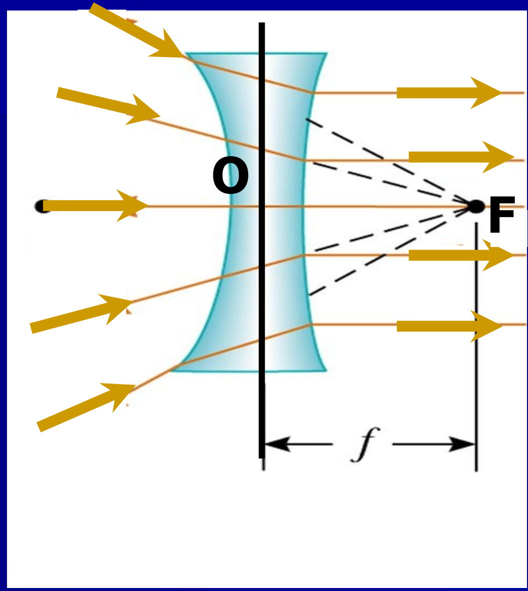
Plan focal objet

→ lentille convergente $\overline{OF} < 0$

Lentille divergente



Plan focal objet



→ lentille divergente $\overline{OF} > 0$

❑ **Pour les deux types de lentilles, la position des foyers est symétrique par rapport au centre optique O de la lentille:**

$$\left| \overline{OF'} \right| = \left| \overline{OF} \right|$$

❑ → lentille convergente $\overline{OF} < 0$ et $\overline{OF'} > 0$

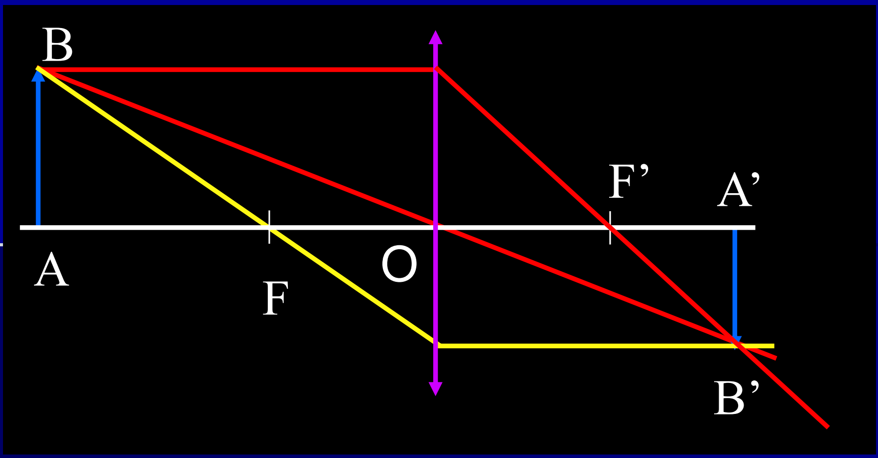
❑ → lentille divergente $\overline{OF} > 0$ et $\overline{OF'} < 0$

Tout rayon passant par le centre optique O ne subit aucune déviation

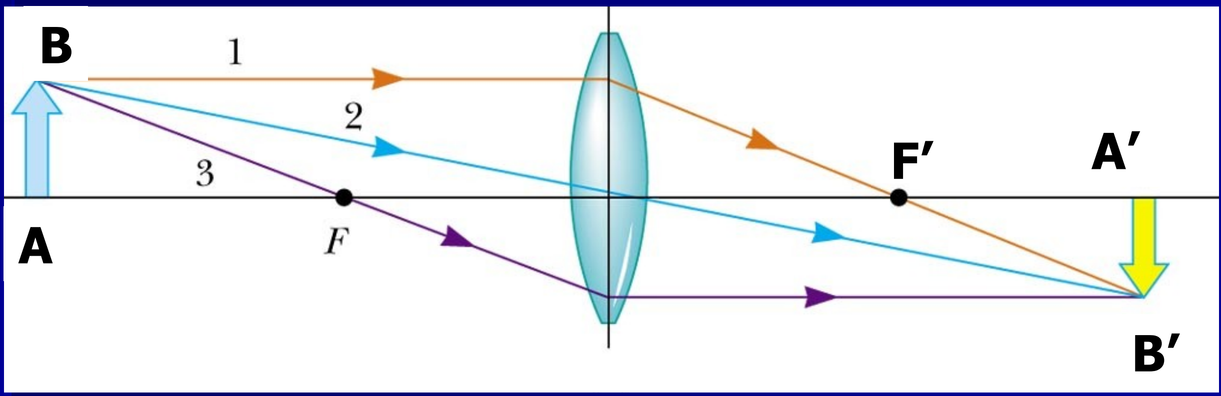
Construction des images

• Utilisation de 2 rayons particuliers simples (sur 3 possibles)

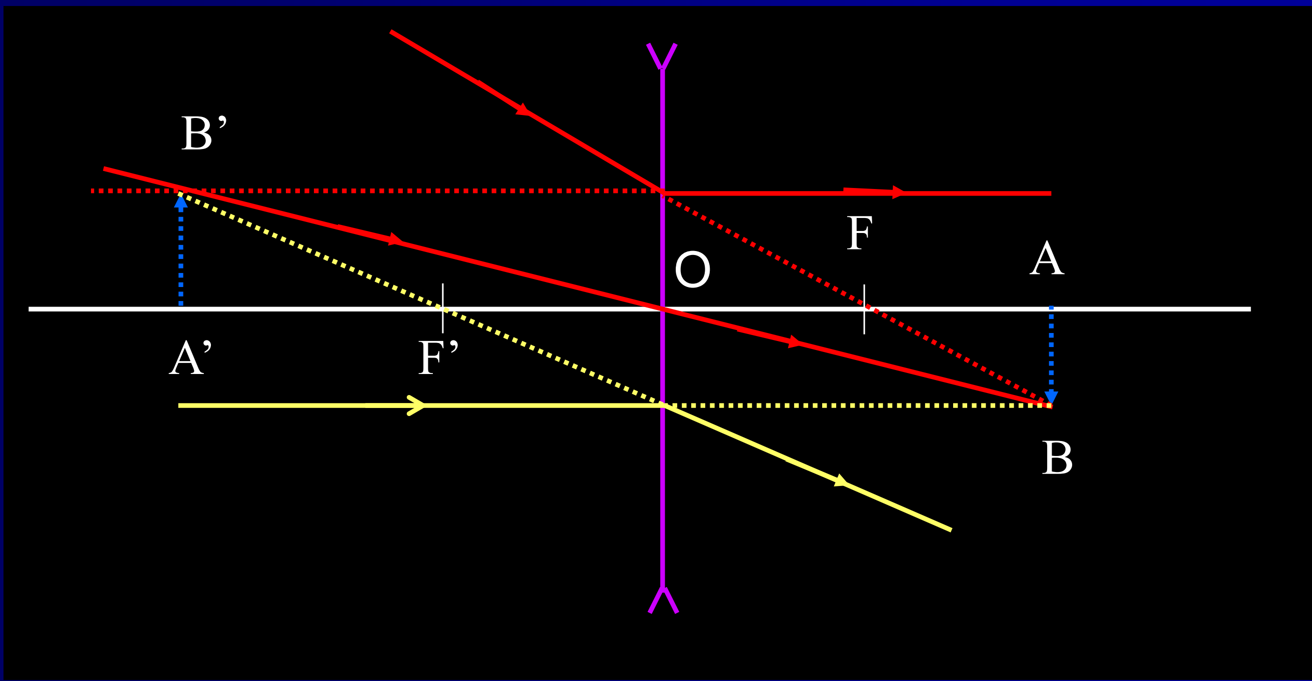
- **Un rayon parallèle à l'axe principal passe par (ou semble venir de) un des foyers.**
- **Un rayon qui passe par le centre optique O de la lentille n'est pas dévié**
- **Un rayon qui passe par le foyer objet de la lentille émerge de la lentille parallèlement à l'axe principal**



L'image est réelle et renversée



• Une lentille divergente et un objet virtuel



Zones conjuguées

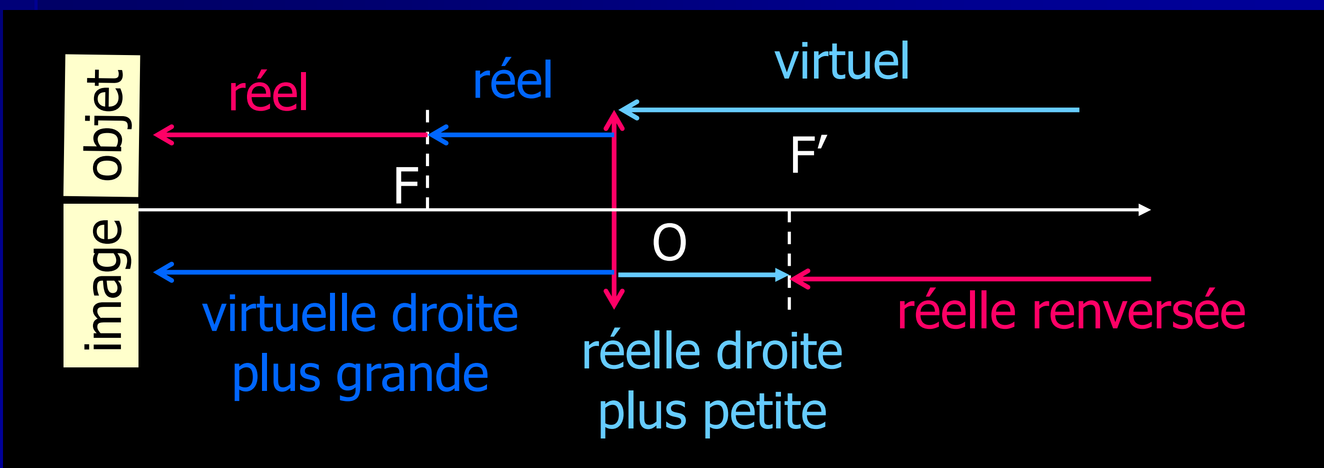
Position de l ’objet

Position de l’image
et grandissement

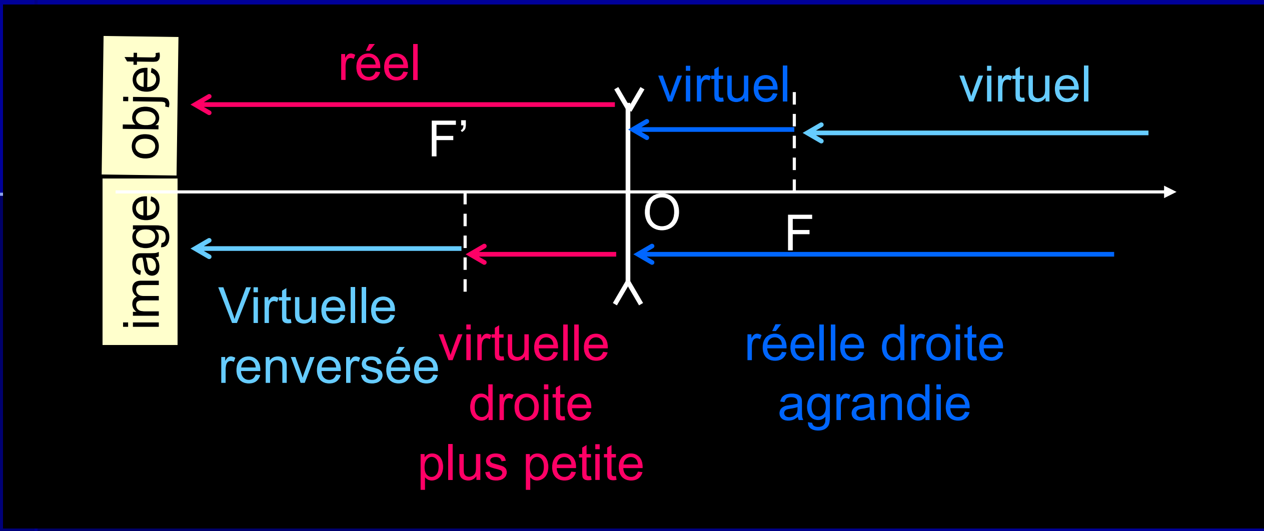
Formules de conjugaison

On peut donc établir des correspondances entre les zones d'espace objet et image. ⟶ Zones conjuguées

Lentille convergente



Lentille divergente



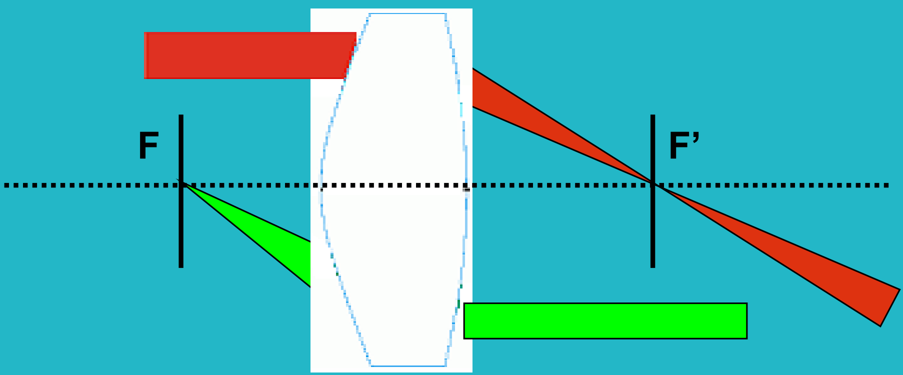
Les représentations précédentes démontrent les propriétés suivantes :

- L'image d'un objet virtuel donnée par une lentille convergente est toujours réelle (et plus petite).

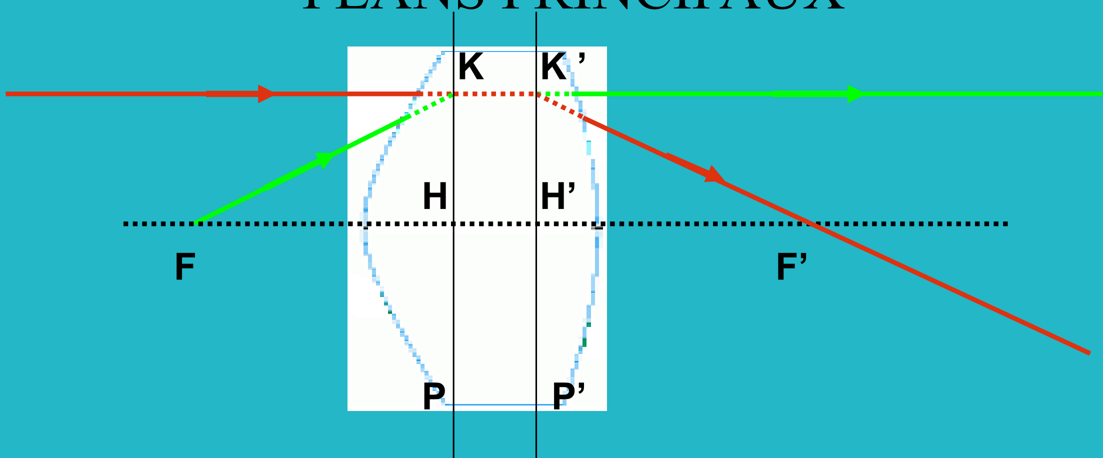
- L'image d'un objet réel par une lentille divergente est toujours virtuelle.

SYSTÈMES CENTRÉS

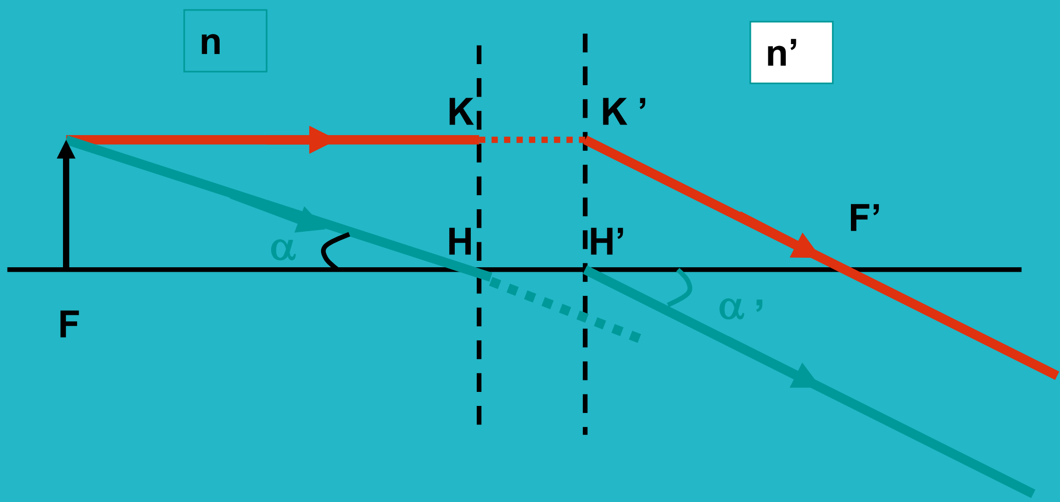
FOYERS ET PLANS FOCAUX



PLANS PRINCIPAUX



DISTANCES FOCALES ET VERGENCE



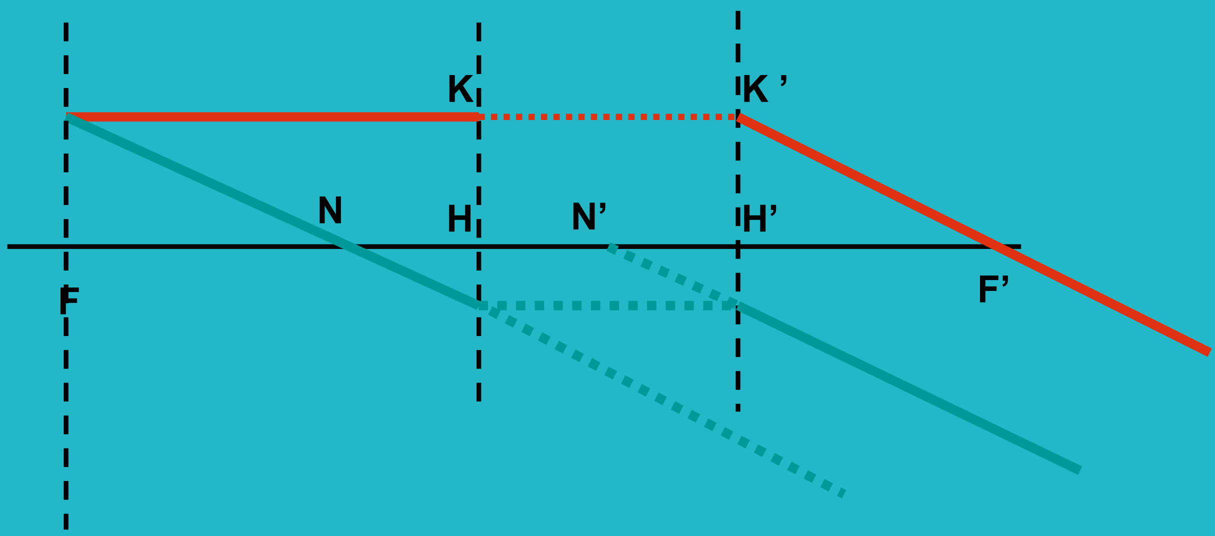
n.HK .α = n'.H'K'.α' *α = HK/HF* α‘ = *H'K‘*/H’F’

α /α' = n’/n = H’F’/HF

$$\frac{\overline{H'F'}}{\overline{HF}} = -\frac{n'}{n}$$

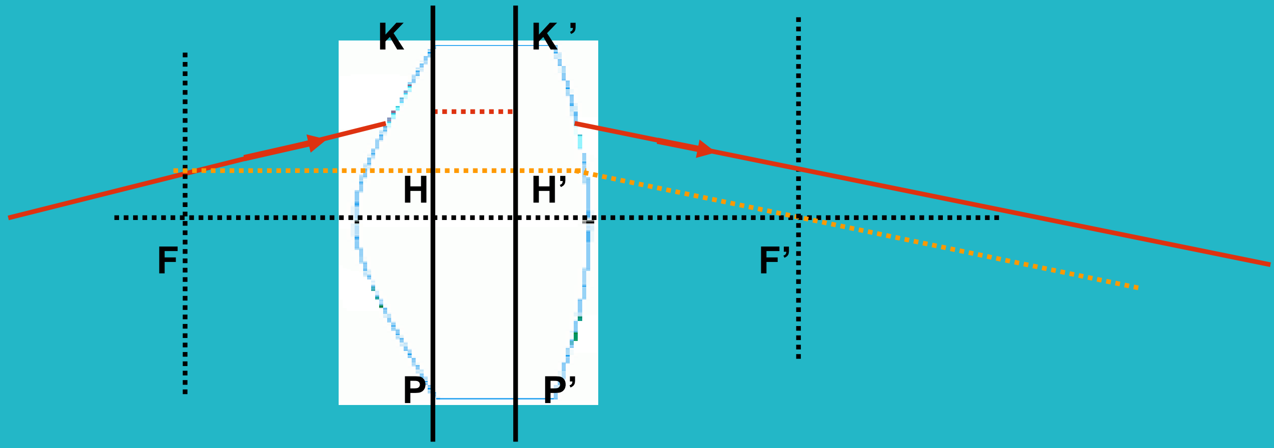
$$V = -\frac{n}{\overline{HF}} = \frac{n'}{\overline{H'F'}}$$

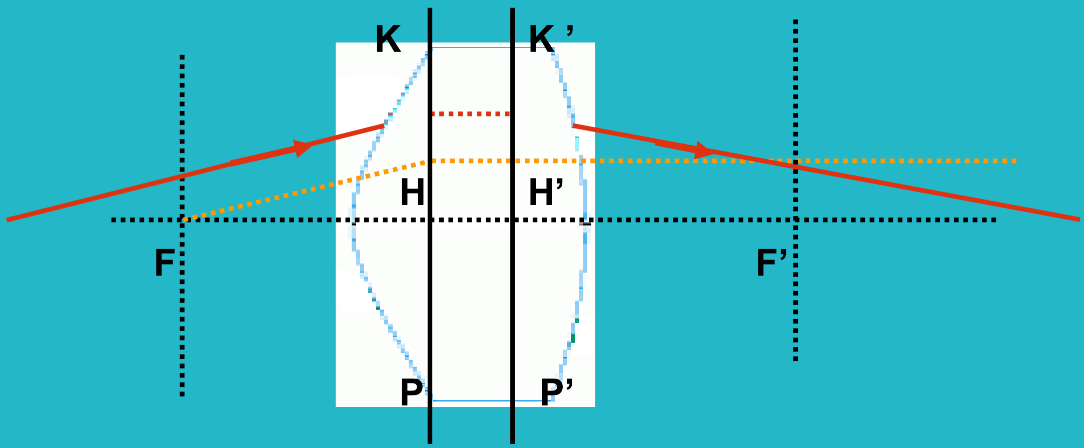
POINTS NODAUX



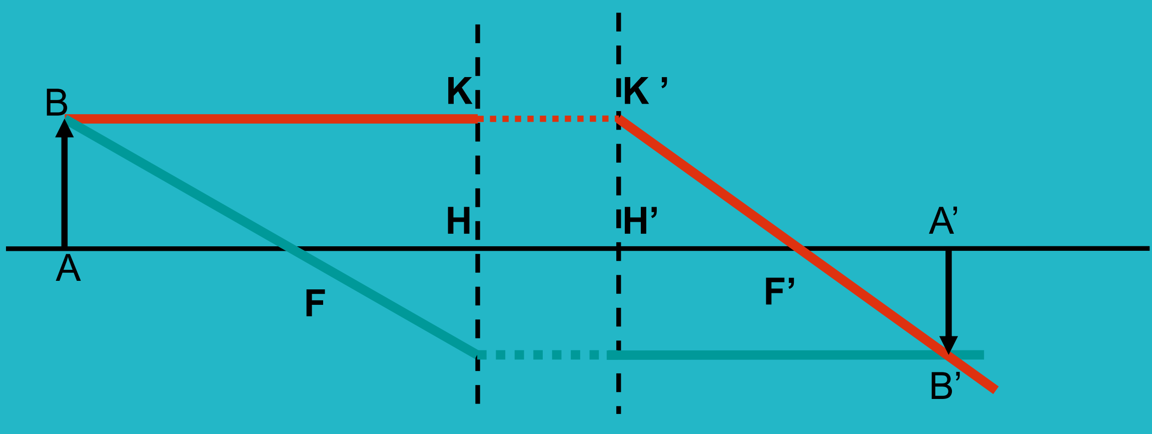
$$\overline{FN} = \overline{H'F'}$$ $$\overline{F'N'} = \overline{HF}$$

$$\overline{HN} = \overline{H'N'} = \overline{HF} + \overline{FN} = \overline{HF} + \overline{H'F'} = f + f'$$

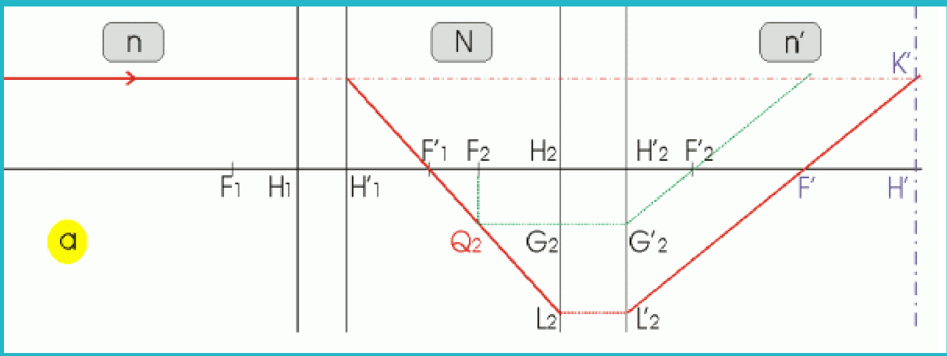


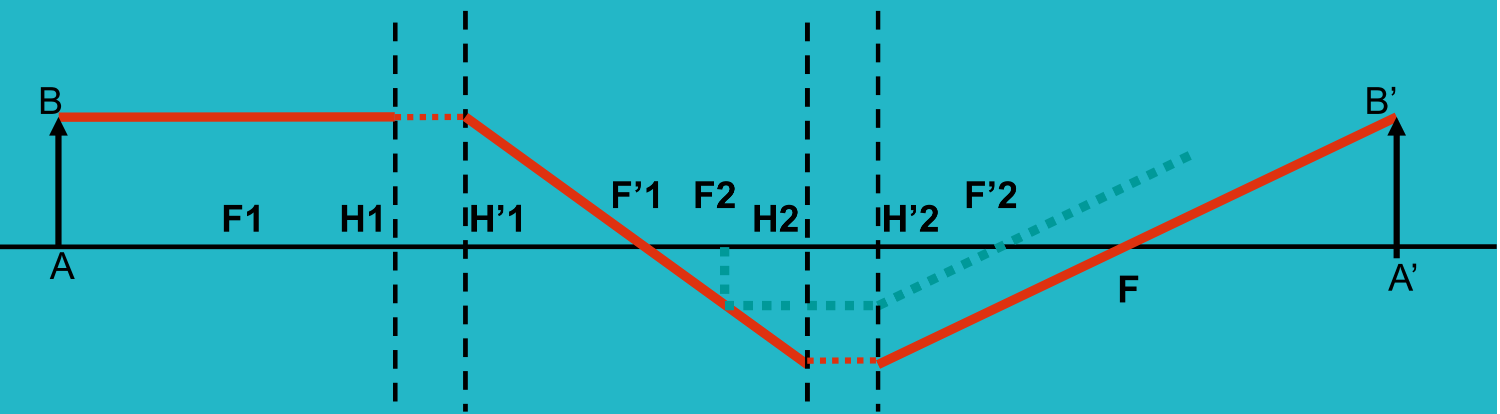


FORMULES DES SYSTÈMES CENTRÉS



ASSOCIATION DE DEUX SYSTEMES CENTRES



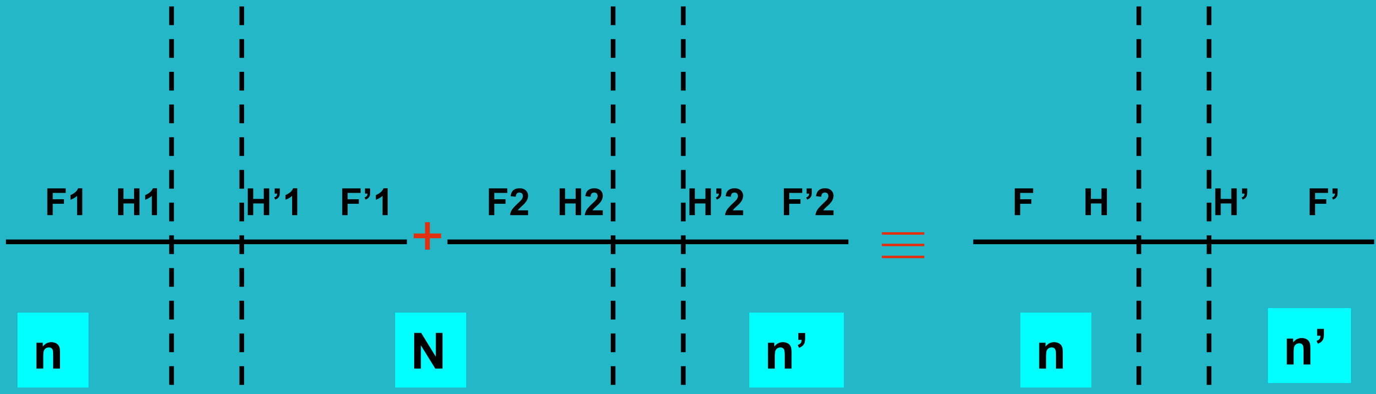


Deux systèmes centrés S_1 et S_2 de même axe principal constituent un nouveau système centré S.

Problème : on veut déterminer les éléments cardinaux de ce nouveau système centré.

- on affectera de l'indice 1 à tous les éléments cardinaux du système S1 (F1, F'1, H1...)
- on affectera de l'indice 2 à ceux du système S2(F2, F'2, H2...)

- les indices de réfraction des milieux extrêmes sont n et n'
- l'indice du milieu compris entre S1 et S2 est N.



e EPAISSEUR DU SYSTEME : H'_1H_2

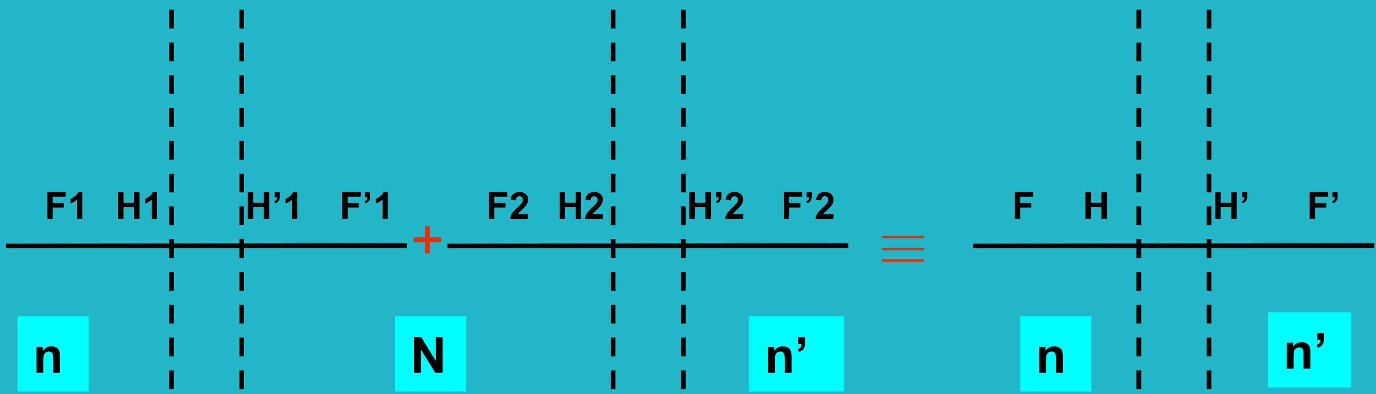
Δ L'INTERVAL OPTIQUE : $\Delta = \overline{F_1'F_2} = \overline{F_1'H'_1} + \overline{H_1'H_2} + \overline{H_2'F_2} = -f'_1 + e + f_2$

DISTANCES FOCALES

$$\overline{HF} = f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}$$

$$\overline{H'F'} = f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta}$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{\overline{H'F'}}{\overline{HF}} = -\frac{n'}{n}$$



e EPAISSEUR DU SYSTEME : $\overline{H'_1H_2}$

Δ L'INTERVAL OPTIQUE : $\Delta = \overline{F_1'F_2} = \overline{F_1'H'_1} + \overline{H_1'H_2} + \overline{H_2'F_2} = -f'_1 + e + f_2$

DISTANCES FOCALES

$$\overline{HF} = f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}$$

$$\overline{H'F'} = f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta}$$

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$$

$$V = -\frac{n'(-f'_1 + e + f_2)}{f'_1 f'_2}$$

$$V_2 = \frac{n'}{f'_2} = -\frac{N}{f_2}$$

$$V = V_1 + V_2 - e\frac{V_1 V_2}{N}$$

OPTIQUE MATRICIEL

TRANSFORMATIONS LINEAIRES ET OPERATIONS SUR LES MATRICES

$$y = b_{11} y' + b_{12} \alpha',$$

$$\alpha = b_{21} y' + b_{22} \alpha',$$

b11, ***b12***, ***b21***, et ***b22*** **sont des constantes (caracteristiques d'un système)**

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'' \\ \alpha'' \end{bmatrix}.$$

$$y = (b_{11} c_{11} + b_{12} c_{21}) y + (b_{11} c_{12} + b_{12} c_{22}) \alpha,$$

$$\alpha = (b_{21} c_{11} + b_{22} c_{21}) y + (b_{21} c_{12} + b_{22} c_{22}) \alpha,$$

$$y = a_{11} y'' + a_{12} \alpha'',$$

$$\alpha = a_{21} y'' + a_{22} \alpha''.$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'' \\ \alpha'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'' \\ \alpha'' \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

$$a_{11} = b_{11} c_{11} + b_{12} c_{21}$$

$$a_{21} = b_{21} c_{11} + b_{22} c_{21}$$

$$a_{12} = b_{11} c_{12} + b_{12} c_{22}$$

$$a_{22} = b_{21} c_{12} + b_{22} c_{22}$$

[A] = [B] [C]

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{2} b_{ij} c_{jk}.$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 27 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 22 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}.$$

DETERMINANT D'UNE MATRICE

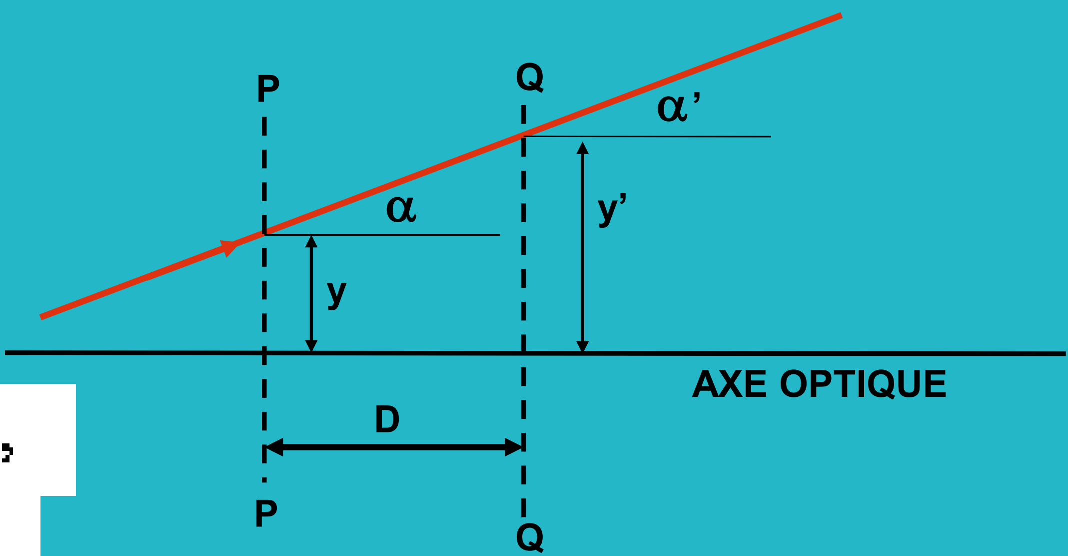
$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & 27 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -126.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 29 & 22 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = -126.$$

DETERMINANT DU PRODUIT DE N MATRICES = PRODUIT DES DETERMINANTS

MATRICE DE TRANSLATION

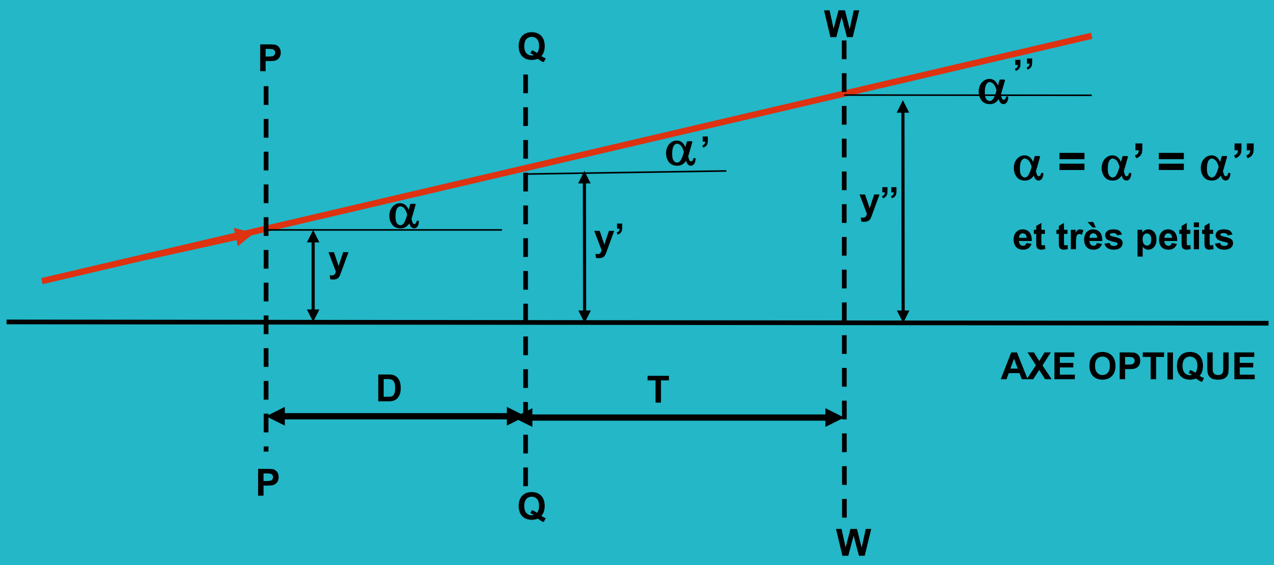


$$y = y' - D\alpha',$$
$$\alpha = 0y' + \alpha'.$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -D \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -D \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ EST LA MATRICE DE TRANSLATION

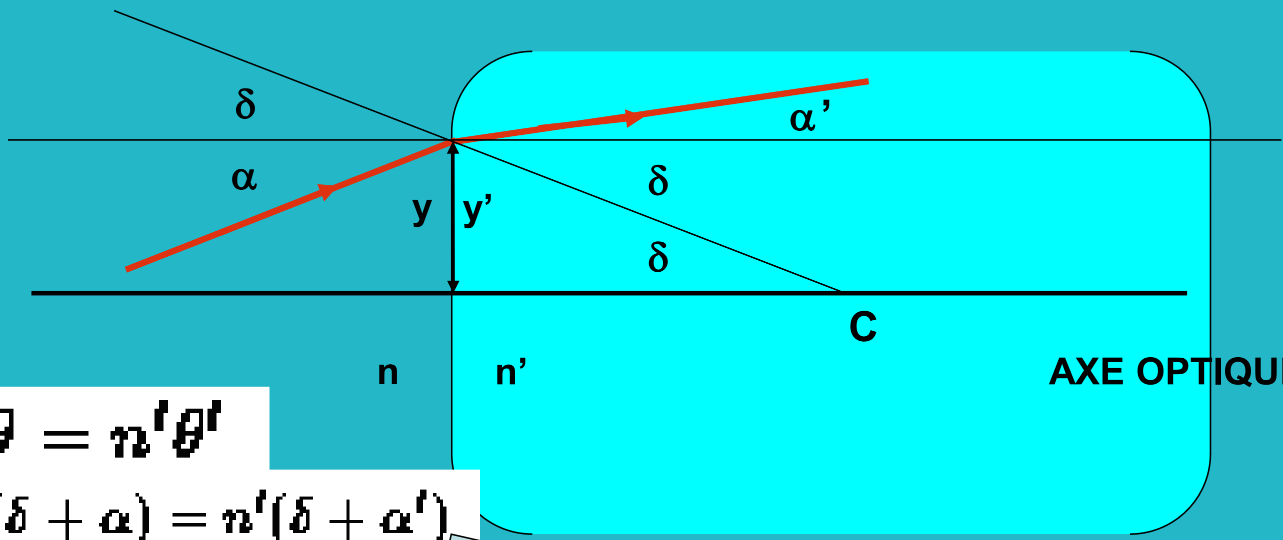
$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -D \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'' \\ \alpha'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -(D+T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'' \\ \alpha'' \end{bmatrix}.$$



$$y = y'' - (T + D)\alpha'',$$

$$\alpha = 0 + \alpha''$$

MATRICE DE REFRACTION



$$n\theta = n'\theta'$$

$$n(\delta + \alpha) = n'(\delta + \alpha')$$

$$\delta = y'/R.$$

$$n'\alpha' = n\alpha + (n - n')\delta$$

$$n\alpha = n'\alpha' + (n - n')y'/R.$$

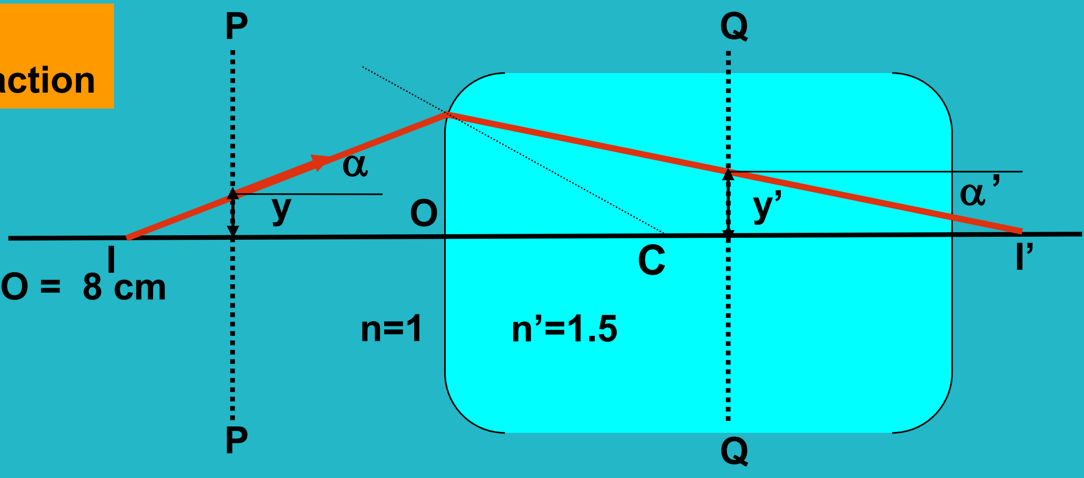
$$y = y' + 0\alpha'.$$

$$\alpha = (\frac{n' - n}{nR})y' + (\frac{n'}{n})\alpha',$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n' - n}{nR} & \dfrac{n'}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix}$$

Exemple: Translation et Refraction

OC=R=6 cm
α =0.01 radiant
y= 1.6 cm
QQ,O = 9 cm   PP,O = 8 cm
Calculer y' et α'



$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1.5-1}{6} & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix}$$

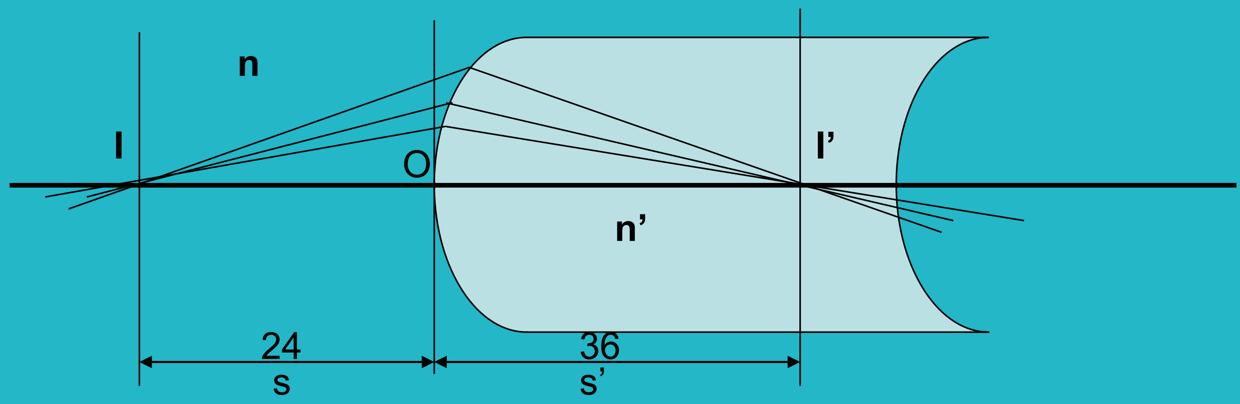
$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -15 \\ 1/12 & 3/4 \end{bmatrix}_{PQ} \begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1.6 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -15 \\ 1/12 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1/3 & -15 \\ 1/12 & 3/4 \end{vmatrix}_{PQ} = \begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/12 & 3/2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}.$$

$$1.6 = (1/3)y' - 15\alpha'$$
$$0.1 = (1/12)y' + (3/4)\alpha'.$$

y' = 1.8 cm and
α' = - 0.0667 radians



R=6   n=1   n'=1.5

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix}_I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1/12 & -3/2 \end{bmatrix}_{II'} \begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix}_{I'}$$

s = OI   s' = OI'   r le rayon de courbure

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (n'-n)/nr & n'/n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -s' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix}.$$

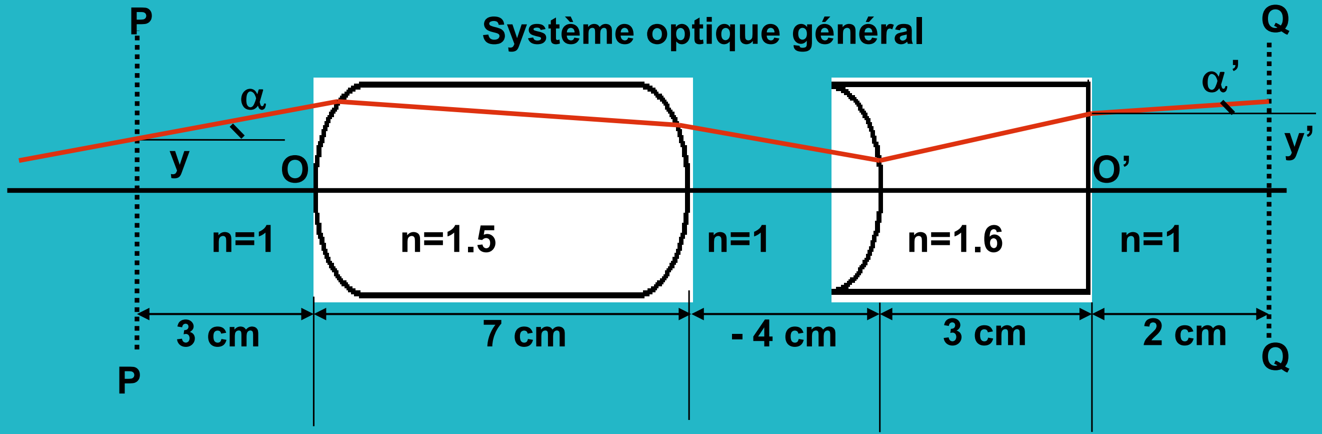
On montre que :

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r}$$

Convention de signe

Objet à gauche de O s est positif
Image à droite de O s' est positif

Système optique général



$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ .1 & 1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ .0667 & .667 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -.15 & 1.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & .625 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix}$$

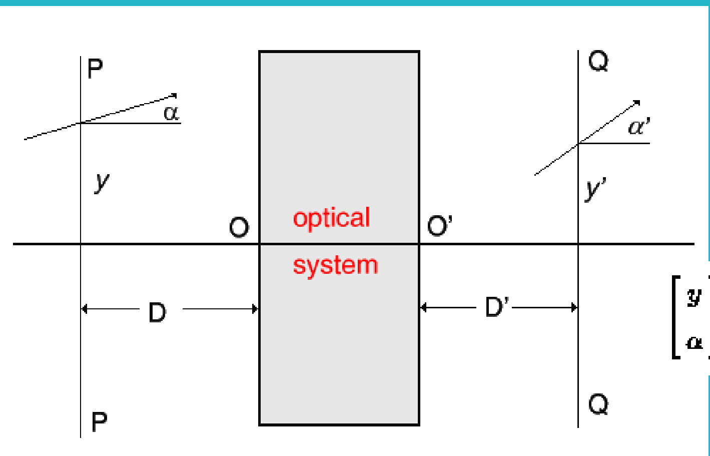
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ .1 & 1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ .0667 & .667 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -.15 & 1.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & .625 \end{bmatrix}}$$

Matrice du système optique entre O et O’

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{OO'} = \begin{bmatrix} 1.554 & -9.713 \\ 0.1654 & -0.390 \end{bmatrix}$$

Matrice du système optique entre PP et QQ

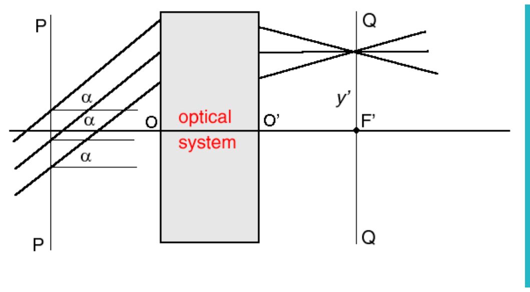
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.554 & -9.713 \\ 0.1654 & -0.390 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$[\mathbf{A}]_{OO'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{OO'}.$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} 1 & -D \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{OO'}\begin{bmatrix} 1 & -D' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix}_Q$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} a_{11} - Da_{21} & D'(-a_{11} + Da_{21}) + a_{12} - Da_{22} \\ a_{21} & a_{22} - D'a_{21} \end{bmatrix}_{PQ}\begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix}_Q.$$

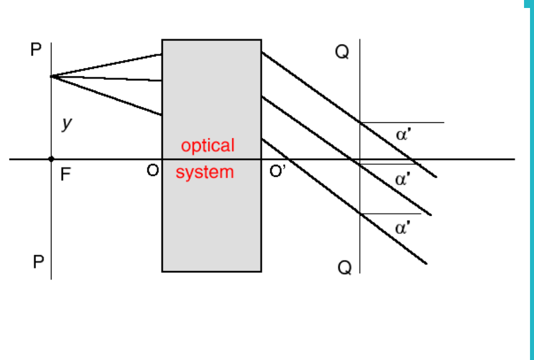


y’ ne dépend que de α   y = Cte* α

$$D' = O'F' = a_{22}/a_{21} \qquad \alpha = a_{21}y'.$$

D’ EST POSITIF : F’ EST A DROITE DE O’

D’ EST NEGATIF: F’ EST A GAUCHE DE O’



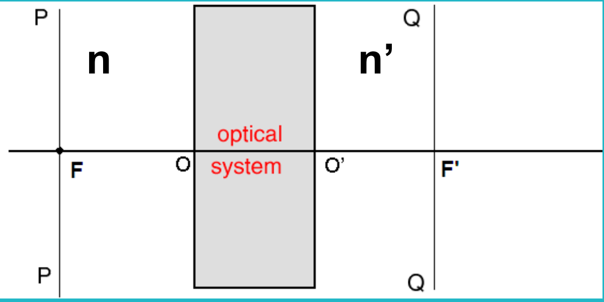
y ne dépend que de α’   y = A* α’

$$D = OF = a_{11}/a_{21}. \qquad y = (a_{12} - Da_{22})\alpha'.$$

D EST POSITIF : F EST A GAUCHE DE O

D EST NEGATIF: F EST A DROITE DE O

LA MATRICE DES PLANS FOCAUX PASSANT PAR F ET F’



$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix}_F = \begin{bmatrix} 0 & (a_{12} - Da_{22}) \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}_{FF'} \begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix}_{F'}$$

$$\Rightarrow \quad a_{21} = 1/f$$

$$(a_{12} - Da_{22}) = -f'.$$

Relation Générale entre f et f’ en utilisant le théorème des déterminants

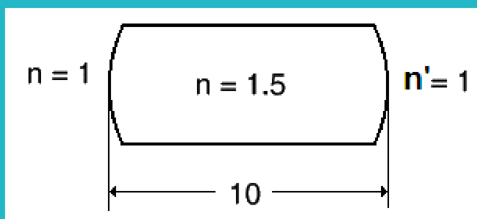
Det $\begin{bmatrix} 1 & -D \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ = 1 , Det $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (n_2 - n_1)/n_1 R & n_2/n_1 \end{bmatrix} = n_2/n_1.$

Det $\begin{vmatrix} 0 & a_{12} - Da_{22} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -f \\ 1/f & 0 \end{vmatrix} = f'/f = n'/n$

si n = n’ = 1 $\Rightarrow$ f = f’ f et f’ doivent avoir le même signe

Exemple:

Soit une lentille biconvexe ayant un rayon de courbure égale à 10 cm pour chaque face Calculer les distances focales et points focaux De la lentille si son indice est 1.5



Solution:

$$[A]_{OO'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (1.5-1)/10 & 1.5/1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (1-1.5)/1.5(-10) & 1/1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -20/3 \\ 5/60 & 2/3 \end{bmatrix}$$

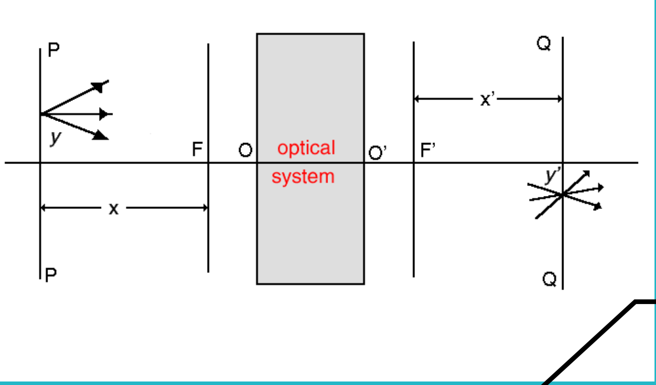
f = a_{21} = 60/5 = 12 cm = f' puisque $n = n' = 1$.

$$D = OF = a_{11}/a_{21}. \qquad D' = O'F' = a_{22}/a_{21}$$

OF = (2/3)×(12)= 8 cm. **O 'F ' = (2/3)×(12)= 8 cm.**

F est à 8 cm à gauche de O **F’ est à 8cm à droite de O’**

Formation de l'image : EQUATION DE NEWTON



$$\begin{bmatrix}0 & -f'\\ 1/f & 0\end{bmatrix}_{FF'}.$$

$$\begin{bmatrix}y\\ \alpha\end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix}1 & -x\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{PF}\begin{bmatrix}0 & -f'\\ 1/f & 0\end{bmatrix}_{FF'}\begin{bmatrix}1 & -x'\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{F'Q}\begin{bmatrix}y'\\ \alpha'\end{bmatrix}_Q$$

=0 car y ne dépend pas de α'

$$\begin{bmatrix}y\\ \alpha\end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix}-x/f & x'x/f - f'\\ 1/f & -x'/f\end{bmatrix}_{PQ}\begin{bmatrix}y'\\ \alpha'\end{bmatrix}_Q.$$

$$xx' = ff'$$

Equations de NEWTON

$y = -(x/f)y'$ (indépendant de α')

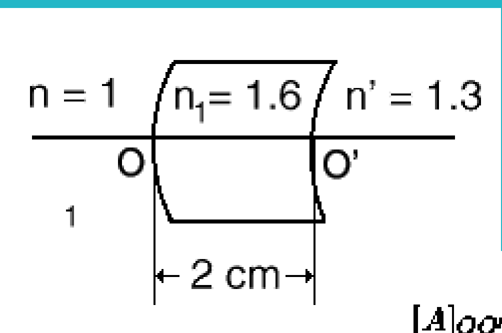
$$\gamma = y'/y = -f/x = -x'/f'.$$

Un objet de 2cm est placé à 40cm de O
Quelle est la position de l'image et sa grandeur

Puisque F est à 8cm de O x =40-8=32cm **32 *x* ' = (12)(12) x'=4.5cm** **à droite de F'**

L'image est à 8 + 4.5 =12.5 cm donc à droite de O ' et γ = -12/32 = -3/8

l'image est inversée et sa taille est: y'= γ y = 3/8 x 2 = 3/4 cm.



Un objet A est placé à 10.467 cm à gauche de O.
Ou est l' image A', Et quelle est sa taille. r =1.5 cm

$$[A]_{OO'} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0.4 & 1.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ .125 & .8125\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1.25 & -1.625\\ 0.3 & 0.65\end{bmatrix}.$$

f **= 1/.3 = 3.33 cm**

$$a_{21} = 1/f$$

f **' = 1.3 * f = 4.333 cm**

$$f'/f = n'/n$$

O'F ' = 0.65/0.3 = 2.167 cm

$$D' = O'F' = a_{22}/a_{21}$$

OF = 1.25/0.3 = 4.167 cm

$$D = OF = a_{11}/a_{21}.$$

f = 3.33 cm

$f\,'$ = 4.333 cm

O'F ' = 2.167 cm

OF = 4.167 cm

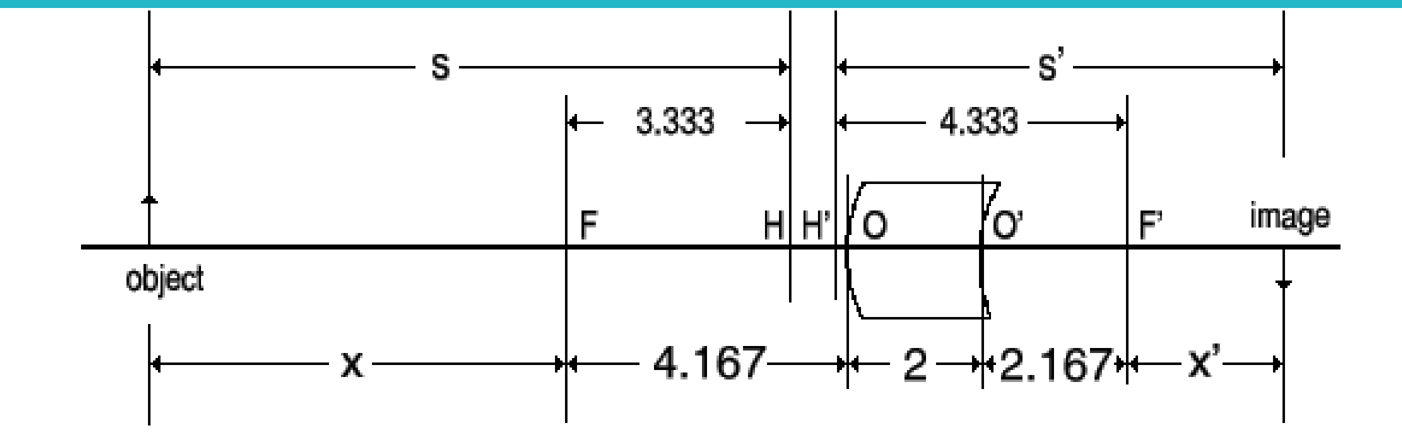
x =AF= OA- OF =10.467 - 4.167 = 6.3 cm.

x '= F'A'=$ff\,'/x$=(4.333)*(3.333)/6.3 = 2.293

Donc O'A'=O'F' + F'A' = 2.167 + 2.293 = 4.460 cm

$\gamma = -f/x = -3.333/6.3 = -0.529$

$$\gamma = y'/y = -f/z = -z'/f'.$$



LES POINTS CARDINAUX

LES POINTS CARDINAUX SONT DEFINIT PAR RAPPORT A F et F'

Soit un point cardinal Z distant de z de F à gauche

Et un point cardinal Z' distant de z' de F' à droite

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix}_Z = \begin{bmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -f' \\ 1/f & 0 \end{bmatrix}_{FF'} \begin{bmatrix} 1 & -z' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix}_{Z'}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix}_Z = \begin{bmatrix} -z/f & z'z/f - f' \\ 1/f & -z'/f \end{bmatrix}_{ZZ'} \begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix}_{Z'}.$$

Les plans passants par H et H' sont définis par y' = y

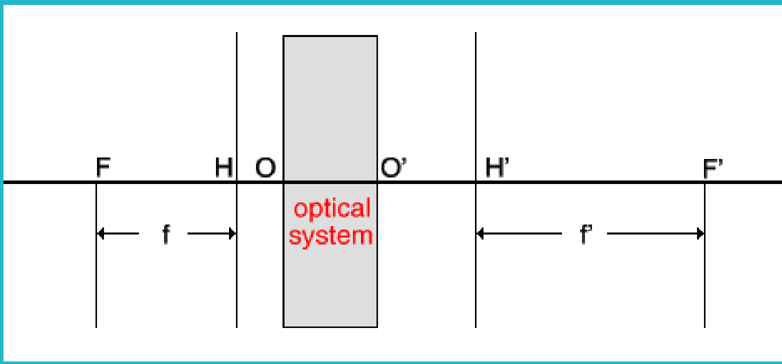
γ = + 1 plan positif $\qquad$ γ = -1 plan négatif

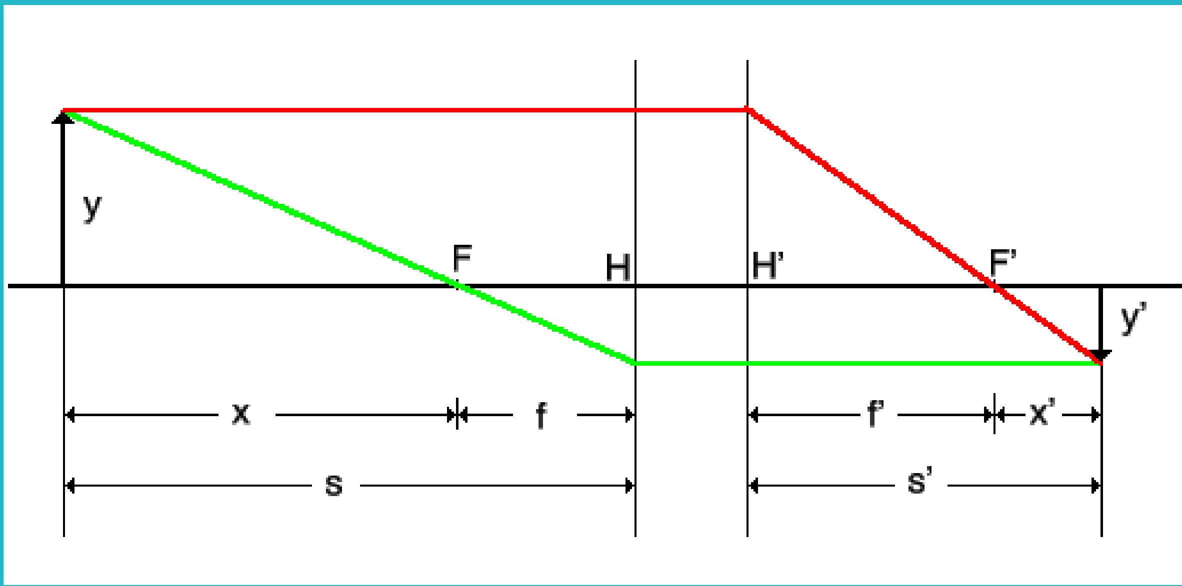
$y = -(z/f)y' + (zz'/f - f')\,\alpha'$ $\qquad$ $zz'/f - f' = 0$ et $-z/f = 1$

$$z = FH = -f,$$

$$z' = F'H' = -f',$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix}_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/f & f'/f \end{bmatrix}_{HH'} \begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix}_{H'}.$$



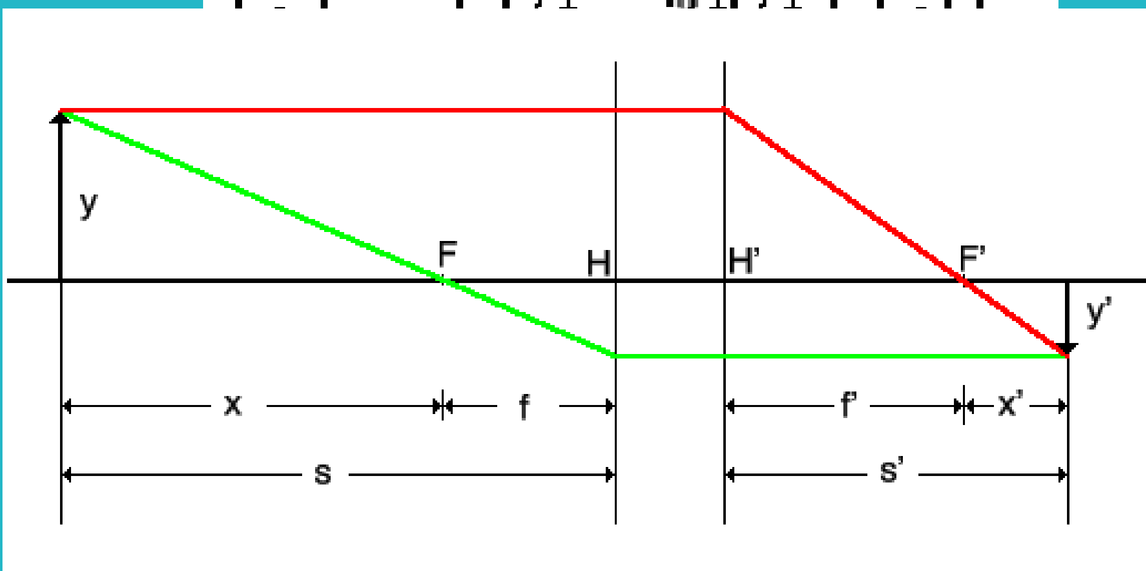


$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/f & f'/f \end{bmatrix}_{HH'} \begin{bmatrix} 1 & -s' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix}_{S'}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} 1 - s/f & -s' + ss'/f - sf'/-f \\ 1/f & (-s' + f')/f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix}_{S'}$$

=0 car y' image de y

$$\begin{bmatrix} y \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\gamma & 0 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ \cdot \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}1 & -D\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{n'-n}{nR} & \frac{n'}{n}\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 0\\ -2/R & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}_{OO'},$$

$$\begin{bmatrix}0 & -f'\\ 1/f & 0\end{bmatrix}_{FF'}. \quad \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/f & f'/f\end{bmatrix}_{HH'}$$

$$\left\{\begin{array}{l} FH = f = 1/a_{21}\\ (a_{12} - Da_{22}) = -f'.\\ D' = O'F' = a_{22}/a_{21}\\ D = OF = a_{11}/a_{21}.\\ f'/f = n'/n\\ xx' = ff' \end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix}1/\gamma & 0\\ 1/f & \gamma f'/f\end{bmatrix}_{SS'}$$