



UNIVERSITÉ MOHAMED PREMIER - OUJDA

Faculté Des Sciences

Département De Mathématiques Et Informatique



Cours du module

Électromagnétisme

SMI S4

Prof. F. OUCHNI

Année Universitaire 2015/2016

ÉLECTROMAGNÉTISME MAGNÉTOSTATIQUE

F. Ouchni

11 avril 2016

Plan

Introduction

Forces magnétiques

Rappel : Courants électriques

Le champ magnétique

Champ magnétique créé par des courants

Invariances et symétries

Formulation locale et intégrale des propriétés de \vec{B}

Notion de Champ

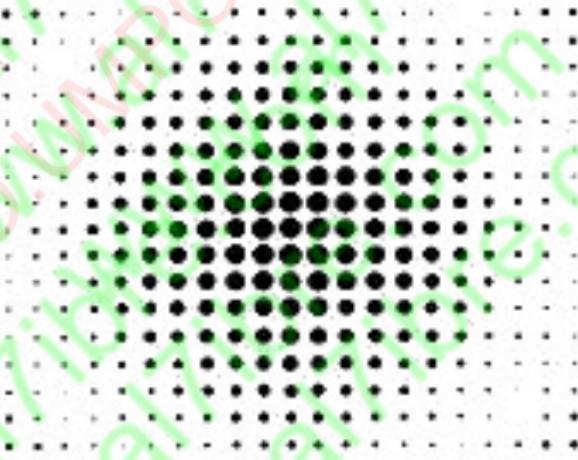
Un champ est la donnée, pour chaque point de l'espace, de la valeur d'une grandeur physique. Un champ est donc une propriété de l'espace, c'est-à-dire une grandeur physique définie en tout point d'une région de l'espace. Sa présence modifie les propriétés de l'espace qui l'entoure, et l'intensité du champ est grande à proximité de la source, et diminue rapidement lorsqu'on s'en écarte.

Notion de Champ

Champ scalaire

Un champ est dit scalaire lorsqu'il concerne une grandeur physique décrite uniquement par sa valeur. On utilise par exemple des champs scalaire en météorologie lorsque qu'on veut décrire les valeur de pression ou de température sur une certaine zone géographique (champ de température/champs de pression).

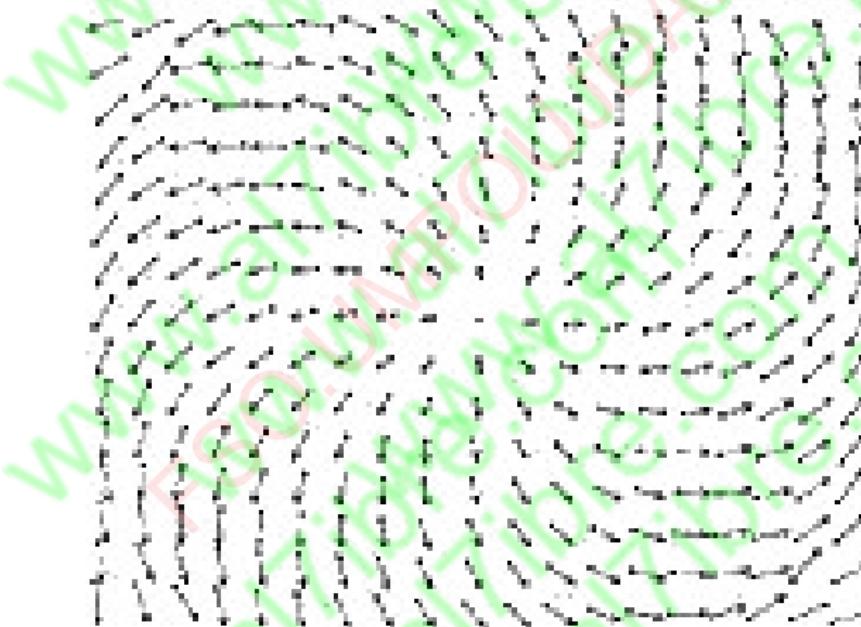
On appelle équipotentielle, une ligne (ou une surface) sur laquelle le champ a la même valeur.



Les champs vectoriels

Champ vectoriel

- ▶ On parle de champ **vectorielle** lorsqu'à tout point de l'espace on associe un vecteur (champ électrique, magnétique, gravitationnel).



Les champs vectoriels

- ▶ Chaque vecteur a un sens et une intensité. Il va donc y avoir deux façons de procéder pour représenter les champs vectoriels :
 1. On s'interesse à l'intensité du champ et on trace les lignes **équipotentielles**
 2. On s'interesse à la direction et au sens du champ et on trace les **lignes de champ** (on part d'un point de l'espace et on suit la direction et le sens des vecteurs en traçant une ligne fléchée)

Champs statiques

Champs électrostatique et magnétostatique

- ▶ Un champ électrostatique est le champ de force créé par l'attraction et la répulsion de charges électriques immobiles (ou en mouvement infiniment lent) dans l'espace ("électricité statique").
- ▶ Un champ magnétique statique est un champ de force créé par des distributions de courants indépendantes du temps. On parle de courants continus ou stationnaire, d'où le suffixe "statique".
- ▶ Ces champs statiques sont différents des champs qui varient avec le temps, comme ceux générés par des appareils qui fonctionnent au courant alternatif (CA).

Champ magnétostatique

Régime stationnaire (ou permanent)

La **magnétostatique** est donc le régime stationnaire (ou permanent) en électromagnétisme : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. C'est aussi le régime sinusoïdal de pulsation ω et de fréquence v nulles

$$\omega = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Contrairement à l'électrostatique, en magnétostatique les courants peuvent exister : $\vec{j} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{B} \neq \vec{0}$

Le courant électrique : Définition

Un courant électrique est tout **mouvement d'ensemble** de charges électriques dans un référentiel R.

Circulation de charges → **courant électrique.**

Intensité électrique

Un courant électrique est caractérisé par son intensité.

Elle mesure la quantité de charge qui traverse en moyenne une surface quelconque d'un fil conducteur par unité de temps. C'est un flux de charge à travers une surface.

Unités : $[I] = [Q]/[t] \Leftrightarrow [Q] = [I][t] = A.s = C.$

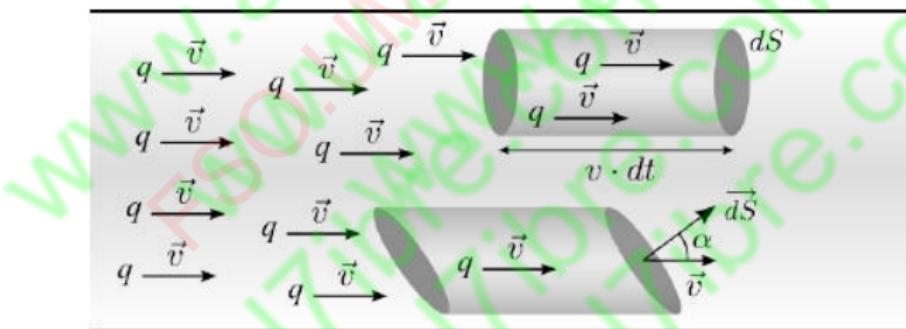
Courants volumiques

Le courant peut s'exprimer en fonction de la vitesse moyenne des charges mobiles.

Vecteur densité volumique de courant

Le vecteur densité volumique de courant électrique est défini en tout point de l'espace où s'écoule la charge (la charge est répartie dans le volume). Sa direction et son sens représentent la direction et le sens dans lequel s'écoule la charge.

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$



Courants volumiques

Le courant peut s'exprimer en fonction de la vitesse moyenne des charges mobiles.

Vecteur densité volumique de courant

Le vecteur densité volumique de courant électrique est défini en tout point de l'espace où s'écoule la charge (la charge est répartie dans le volume). Sa direction et son sens représentent la direction et le sens dans lequel s'écoule la charge.

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

Le vecteur densité volumique de courant permet de décrire la répartition du courant en tout point de l'espace.

Vecteur densité volumique de courant

La norme du vecteur densité de courant est reliée au courant élémentaire traversant une surface élémentaire centrée sur ce point :

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

L'intensité traversant la surface S est égale au flux du vecteur densité de courant :

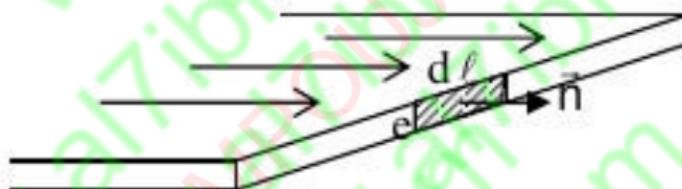
$$I = \iint_{(S)} \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}$$

Unités : $\|\vec{j}\|$ s'exprime en $A \cdot m^{-2}$

Courants surfaciques

Une distribution surfacique est une distribution volumique dont l'une des dimensions est très petite devant les deux autres. Les charges se déplacent sur une très faible épaisseur.

Soit un élément de longueur dl . On définit \vec{n} le vecteur normal à dl orienté dans le même sens que le conducteur.



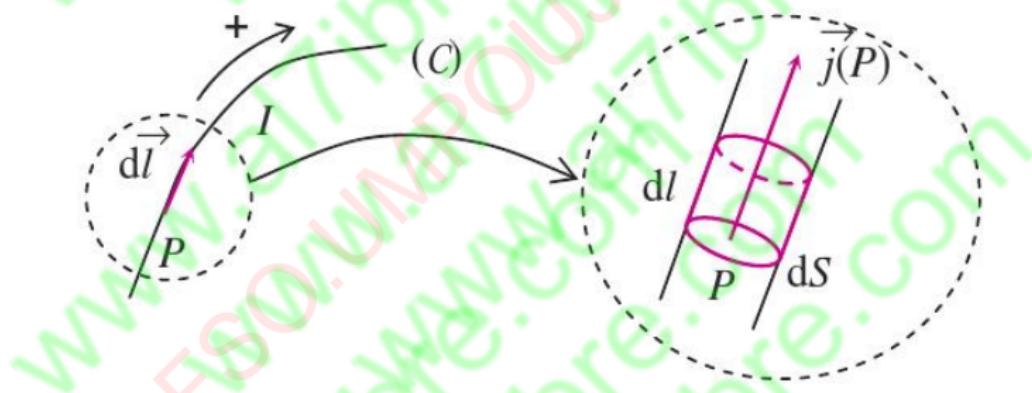
On appelle σ la densité surfacique de charges mobiles. On définit la notion de densité surfacique de courant \vec{j}_S en A.m^{-1} par l'intensité élémentaire qui traverse un segment de longueur dl

$$dI = \vec{j}_S \cdot \vec{n} dl \quad \vec{j}_S = \sigma \vec{v} \quad \vec{j}_S = \lim_{e \rightarrow 0} (\vec{j} \cdot \vec{e})$$

Densité linéique de courant

Si la zone de l'espace où s'écoule le courant possède deux dimensions très petites devant la troisième, on peut considérer que le courant s'écoule le long d'une ligne : on parle de distribution linéique de courant (conducteurs filiformes).

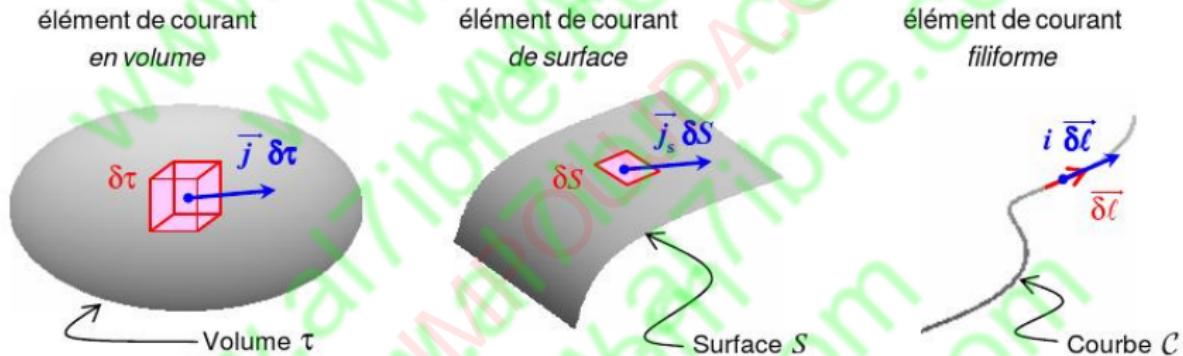
Dans cette modélisation, l'intensité est alors un flux de charge à travers un point.



Les vecteurs \vec{j} , $d\vec{S}$ et $d\vec{l}$ ont tous la même direction. On a alors :
 $\vec{v}dq = \vec{v}Idt = Id\vec{l} = j(P)dSd\vec{l} = \vec{j}(P)dSd\vec{l} = \vec{j}(P)d\tau$

Vecteur élément de courant

Les courants réels sont décrits comme assemblages d'éléments de courant élémentaires.



Élément de courant en volume $\vec{j}\delta\tau$ → Charges mobiles volumiques
Élément de courant de surface $\vec{j}_s\delta S$ → Charges mobiles surfaciques
Élément de courant linéique $I\delta\vec{l}$ → Charges mobiles linéiques.

Vecteur élément de courant

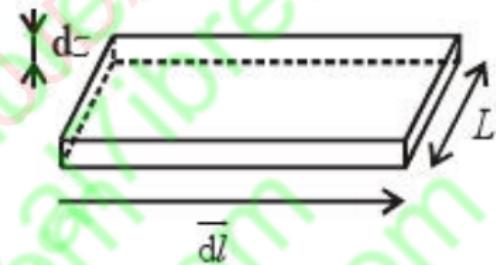
On définit le vecteur élément de courant : $d\vec{C}$

	distribution filiforme	distribution surfacique	distribution volumique
$d\vec{C}$	$I\delta\vec{l}$	$\vec{j}_s\delta S$	$\vec{j}\delta\tau$

On a :

$$Idl = (jLdz)dl = jd\tau = (jdz)(Ldl) = j_s dS.$$

$$d\vec{C} = I\delta\vec{l} = \vec{j}_s\delta S = \vec{j}\delta\tau$$



L'élément de courant $\delta q\vec{v}$ correspond à des charges élémentaires δq de densité quelconque animées d'une vitesse \vec{v} .

Dans chaque cas, l'élément de courant est homogène à une intensité électrique que multiplie une longueur :

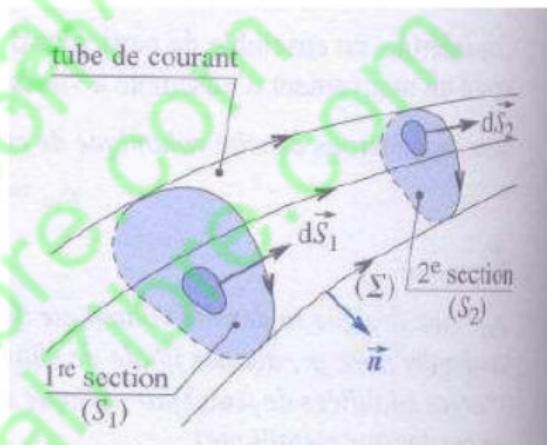
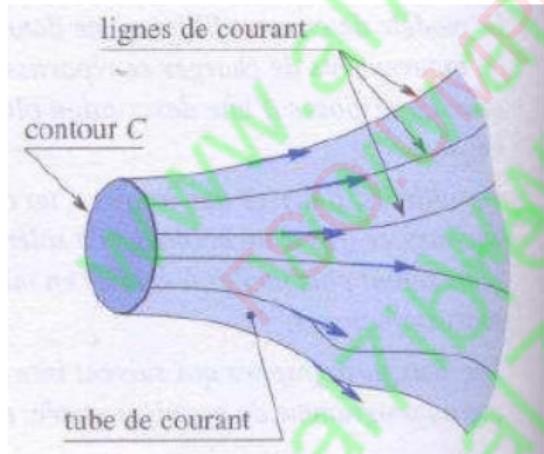
$$[q][v] = [j][L]^3 = [j_s][L]^2 = [I][L].$$

Lignes et tubes de courant

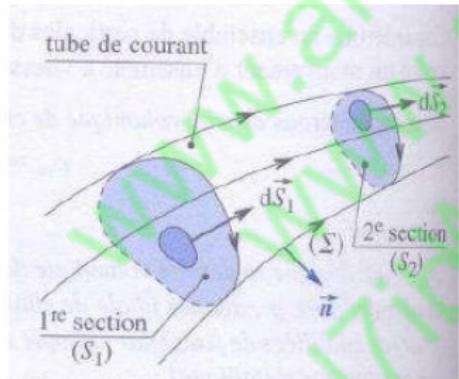
Définition :

On définit :

- ▶ une ligne de courant comme une courbe en tout point tangente au vecteur densité de courant \vec{j} ,
- ▶ Un tube de courant comme l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée.



Régime permanent



En régime permanent **statique** (indépendant du temps), le vecteur \vec{j} est nécessairement à flux conservatif

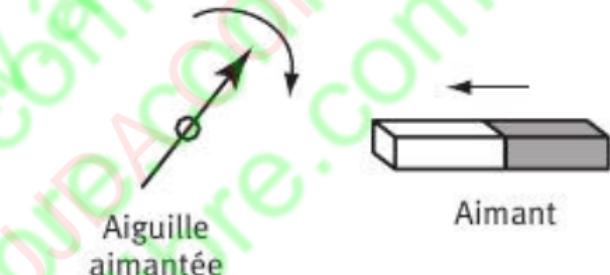
$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad \text{équation locale}$$

le courant électrique est le même à travers toutes les sections d'un même tube de courant. Cela impose à l'intensité d'être la même à travers toute section d'un même tube de courant (pas d'accumulation de charge, courant continu).

Champ magnétique : actions exercées par un aimant ou un courant

Action d'un aimant sur une aiguille aimantée

Approchons un aimant d'une petite aiguille aimantée placée sur un pivot ; celle-ci se met en rotation.

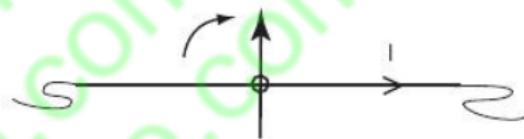


>>

Action d'un courant électrique sur une aiguille aimantée

De même un fil de cuivre parcouru par un courant agit sur une petite aiguille aimantée placée en-dessous du fil et à proximité.

>>



Détection du champ magnétique

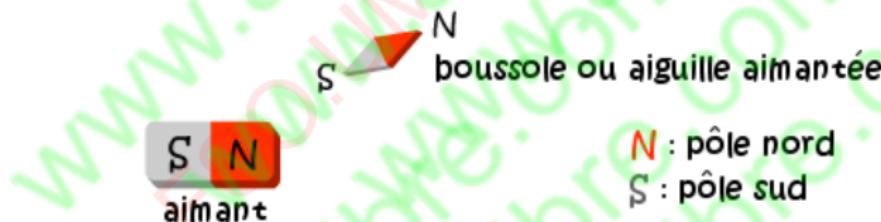
L'aimant et le fil agissent à distance sur l'aiguille aimantée ; il y a interaction à distance entre l'aimant (ou le fil) et l'aiguille.

Définition :

Un champ magnétique règne dans une région de l'espace si dans cette région une aiguille aimantée est soumise à des forces magnétiques.

Une petite aiguille aimantée permet :

- ▶ de mettre en évidence l'action à distance du champ magnétique.
- ▶ d'obtenir la direction du champ magnétique dans une petite région de l'espace.



Sources de champ magnétique

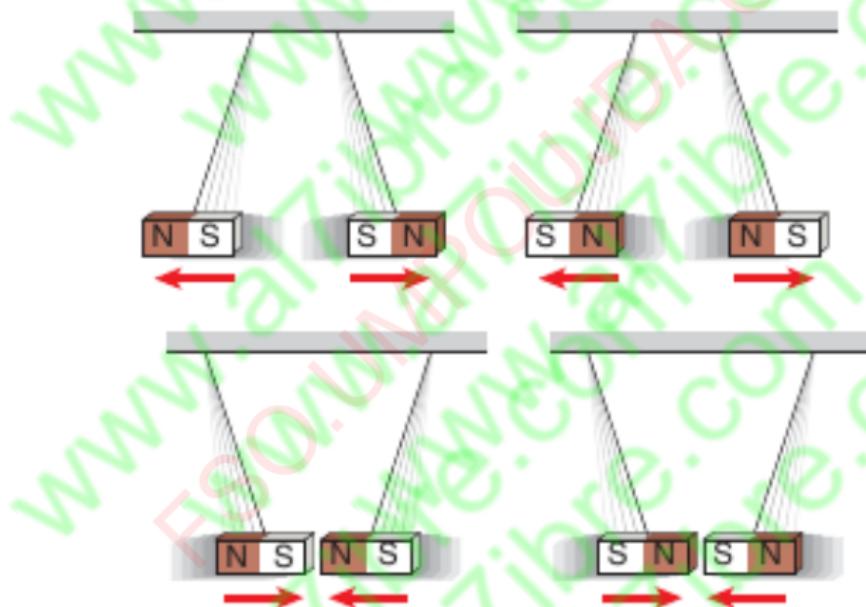
Sources

- ▶ Le champ magnétique terrestre généré par les mouvements du magma du noyau externe.
- ▶ Les aimants. Deux pôles de même nom se repoussent ; deux pôles de noms différents s'attirent.
- ▶ Les courants électriques

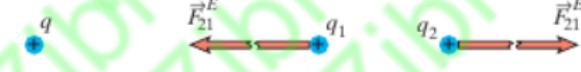
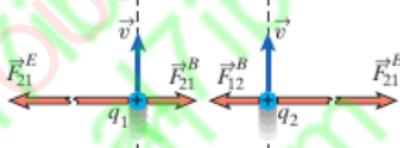
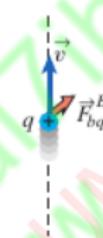
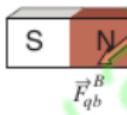
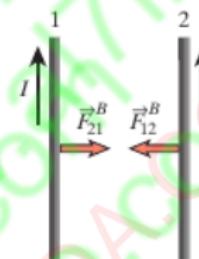
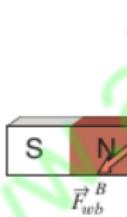
Les charges en mouvement sont sources de champ magnétique

Exemples d'Interactions magnétiques

Interactions magnétiques entre aimants droits



Exemples d'Interactions magnétiques

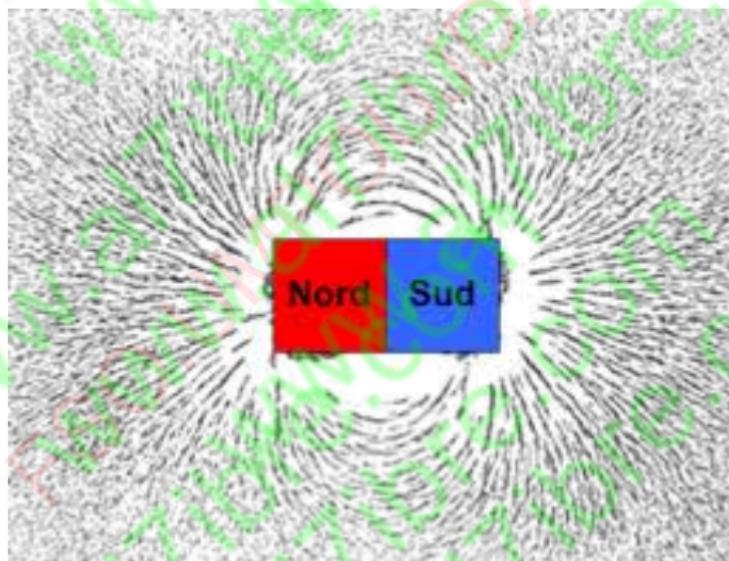


Les caractéristiques du champ magnétique

Lignes de champ (spectre magnétique)

Définition

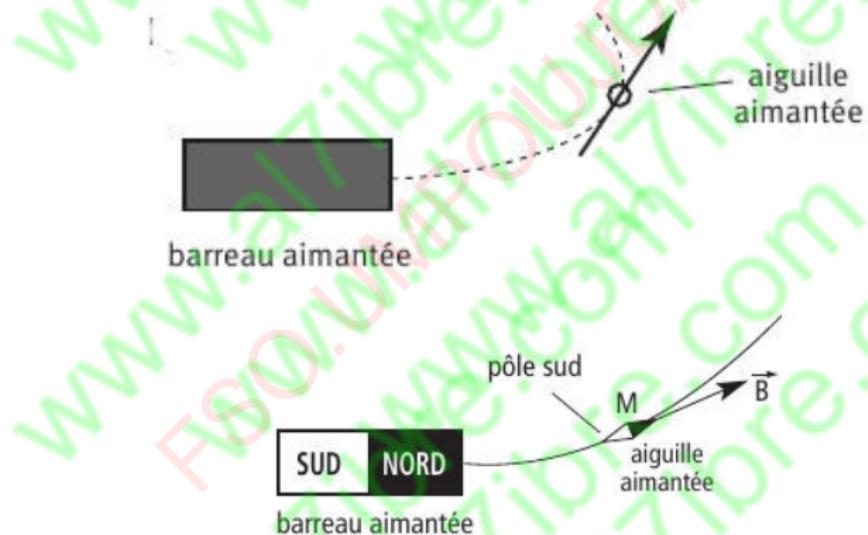
- ▶ Les lignes de champ constituent le spectre magnétique de la source produisant le champ magnétique.



Les caractéristiques du champ magnétique

Le champ magnétique est représenté par un vecteur

Le spectre permet de découvrir qu'il existe des directions privilégiées du champ magnétique ; si l'on place une aiguille aimantée sur une ligne, on s'aperçoit que l'aiguille prend une position (tangente à la ligne considérée) et un sens privilégié.



Les caractéristiques du champ magnétique

Le champ magnétique est représenté par un vecteur

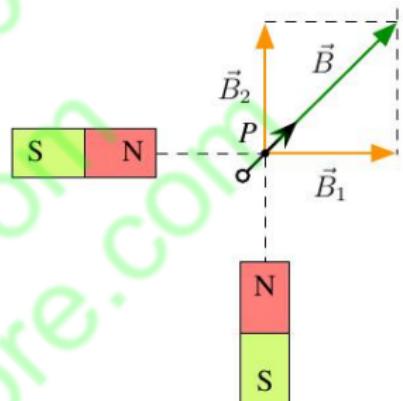
Définition : En chaque point de l'espace, le champ magnétique est représenté par un vecteur champ magnétique \vec{B} dont les propriétés sont :

- ▶ **point d'application** : point de l'espace où règne le champ magnétique (point d'observation).
- ▶ **direction** : celle prise par une aiguille aimantée.
Direction tangente aux lignes de champ.
- ▶ **sens** : cohérent avec l'orientation de la ligne de champ. Par convention il va du pôle sud de l'aiguille vers son pôle nord (Sud Nord de l'aiguille aimantée).
- ▶ **module** : il peut être calculé ou mesuré à l'aide d'un teslamètre. L'unité du système international est le tesla (T), le gauss (G) est encore parfois utilisé.

Principe de superposition

Orientation d'une aiguille aimantée

En un point de l'espace, on peut faire agir plusieurs sources de champs magnétiques. Le vecteur champ magnétique résultant en ce point sera la somme vectorielle des vecteurs champs magnétiques des différentes sources magnétiques en ce point.



(a) en présence du 1^{er} aimant

(b) en présence du 2^e aimant

(c) en présence des deux aimants

Loi de Biot et Savart

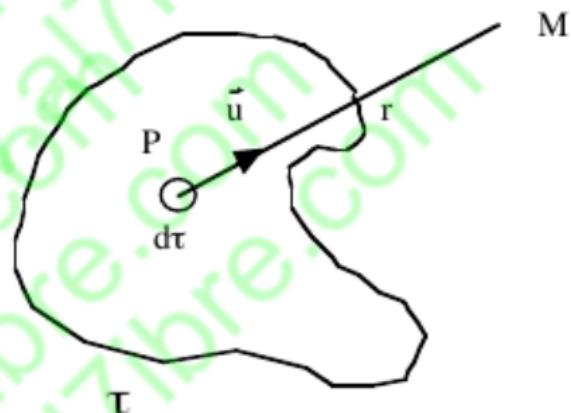
Énoncé de la loi de Biot et Savart

La loi de Biot et Savart établit la relation du champ magnétique à ses sources, les densités de courants électriques continus dans le vide (régime stationnaire). Elle permet de calculer, par intégration du champ magnétique élémentaire, le champ magnétique créé par une distribution de courant en un point M distant de r de cette distribution.

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in (\tau)} \frac{\vec{j}(P) d\tau \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

Distribution volumique

Les courants sont en volume, confinés dans un volume τ



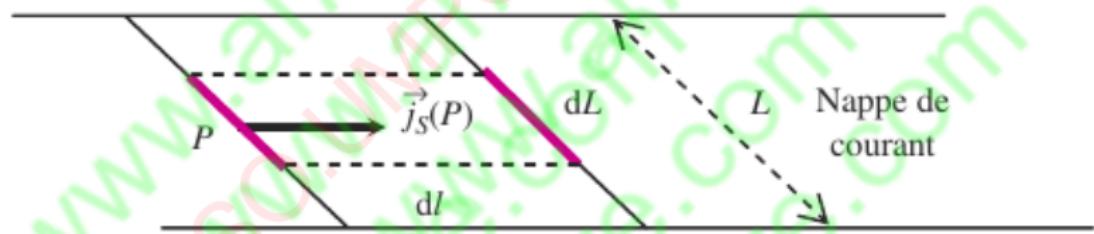
Loi de Biot et Savart pour une distribution surfacique

Nappe de courant (volume d'épaisseur négligeable)

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in (S)} \frac{\vec{j}_S(P) dS \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

Les courants sont en surface, confinés sur une surface S

Distribution surfacique : nappe de courant



Loi de Biot et Savart pour une distribution linéique

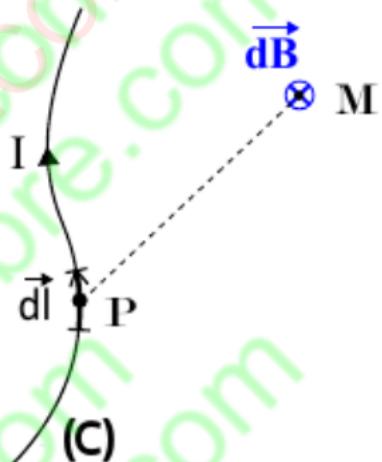
Soit un circuit filiforme (C) parcouru par un courant d'intensité I.

Une longueur dl de ce circuit a une densité linéique de courant $I \vec{dl}$ dans le sens de parcours du courant.

Le champ magnétique élémentaire créé par cet élément de courant s'écrit :

$$\boxed{\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{PM}}{PM^3}}$$

$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$: constante universelle (perméabilité du vide)



Loi de Biot et Savart

$$\boxed{\overrightarrow{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\overrightarrow{dC} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}; \quad \overrightarrow{dC} = I\delta\vec{l} = \vec{j}_S \delta S = \vec{j} \delta\tau}$$

- ▶ le support de $\overrightarrow{B}(M)$ est perpendiculaire au plan défini par $(\overrightarrow{dC}, \overrightarrow{PM})$
- ▶ le sens est tel que le trièdre $(\overrightarrow{dC}, \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{dB}(M))$ soit direct
- ▶ le module du champ élémentaire \overrightarrow{dB} est défini par :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dC}{PM^2} \sin \theta, \quad \text{en Tesla (T)}$$

où θ désigne l'angle $(Id\vec{C}, \overrightarrow{PM})$.

Le champ total $\overrightarrow{B}(M)$ au point M est la superposition des champs élémentaires, créés par chaque portion \overrightarrow{dC} du conducteur :

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M) = \int_{conducteur} \overrightarrow{dB}}$$

Règle de la main droite



$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{dC} \wedge \vec{PM}}{PM^3}; \quad \vec{dC} = I\vec{dl} = \vec{j}_s \delta S = \vec{j} \delta \tau$$

Invariances et symétries

Les symétries et les invariances permettent de simplifier la recherche du champ magnétique par une distribution de courants.

Invariances

Comme son analogue électrostatique, le champ magnétique présente les mêmes invariances que ses sources : les densités de courants. On place un point M qui regarde la distribution, puis on le déplace par translation le long de la distribution ou par rotation autour d'elle. Si le point M voit la même distribution, il y a invariance et le champ magnétique au point M ne dépendra pas de la coordonnée qui "produit" l'invariance.

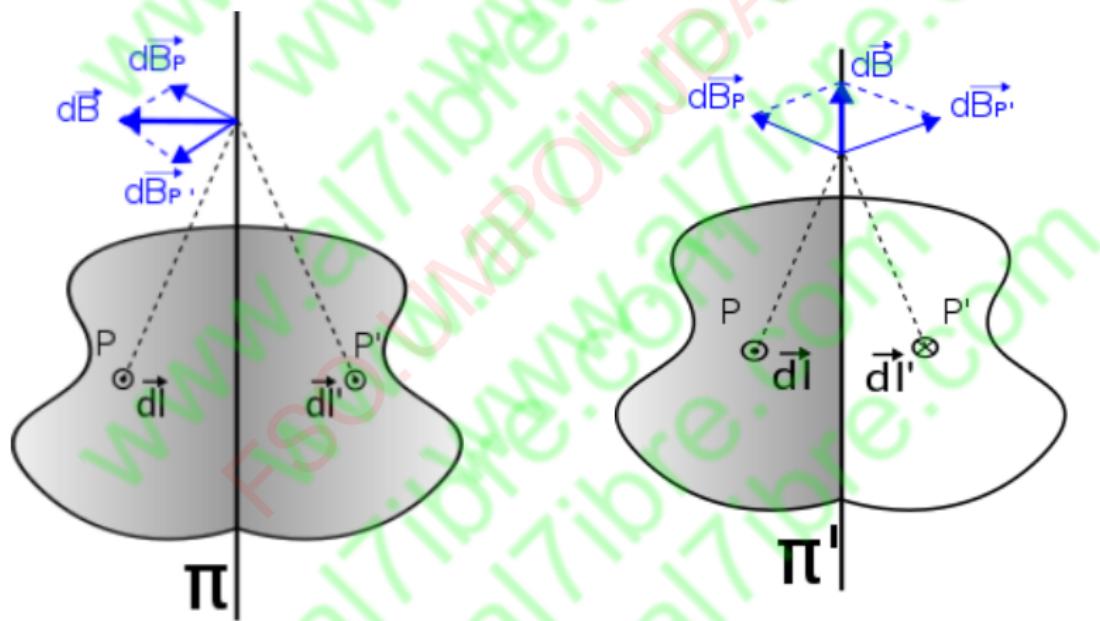
Invariances

Si les courants sont invariants par rotation et/ou par translation, \vec{B} ne dépend pas des variables associées.

Symétries et antisymétries

D : distribution de courants, M un point en lequel on calcule le champ magnétique $\vec{B}(M)$. Π et Π' plans respectivement de symétrie et d'antisymétrie pour D , passant par M .

- $\vec{B}(M) \perp \Pi$, $\vec{B}(M) \in \Pi'$.



Symétries et antisymétries

Un plan Π de symétrie pour les courants est un plan d'antisymétrie pour \vec{B} . \vec{B} est transformé en son antisymétrique par Π .

$$M \in \Pi \Rightarrow \vec{B}(M) \perp \Pi$$

$$M' = \text{sym}_{\Pi}(M) \Rightarrow \vec{B}(M') = -\text{sym}_{\Pi} \vec{B}(M)$$

De même un plan d'antisymétrie Π' pour les courants est un plan de symétrie pour \vec{B} . Ce plan change le sens de tous les courants.

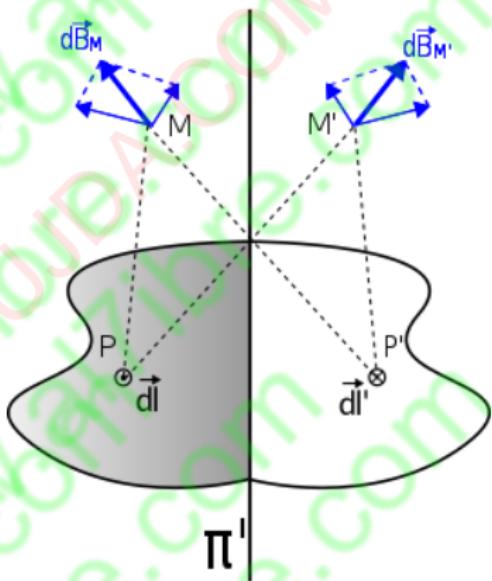
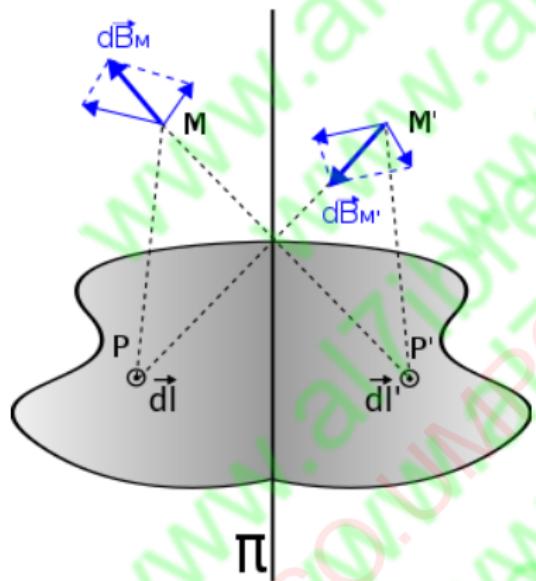
$$M \in \Pi' \Rightarrow \vec{B}(M) \in \Pi'$$

$$M' = \text{sym}_{\Pi'}(M) \Rightarrow \vec{B}(M') = \text{sym}_{\Pi'} \vec{B}(M)$$

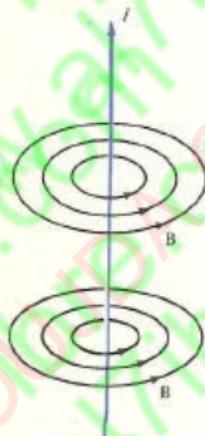
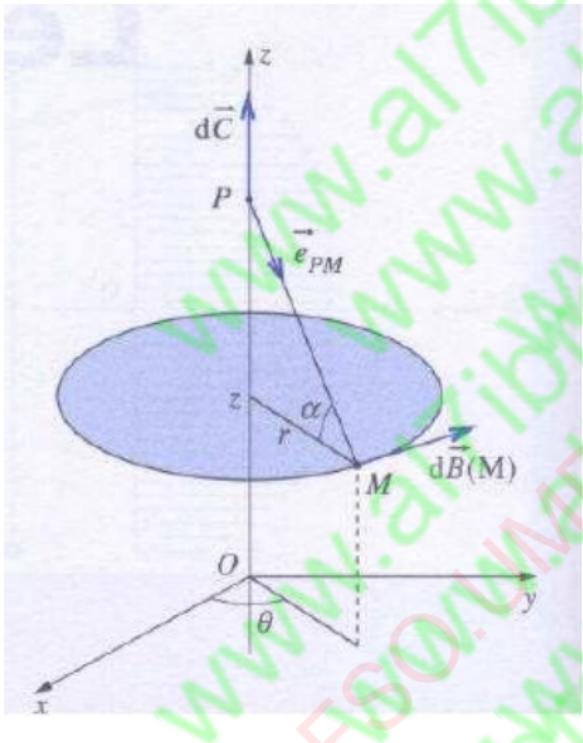
Symétries et antisymétries

$$M \notin \Pi$$

$$M \notin \Pi'$$



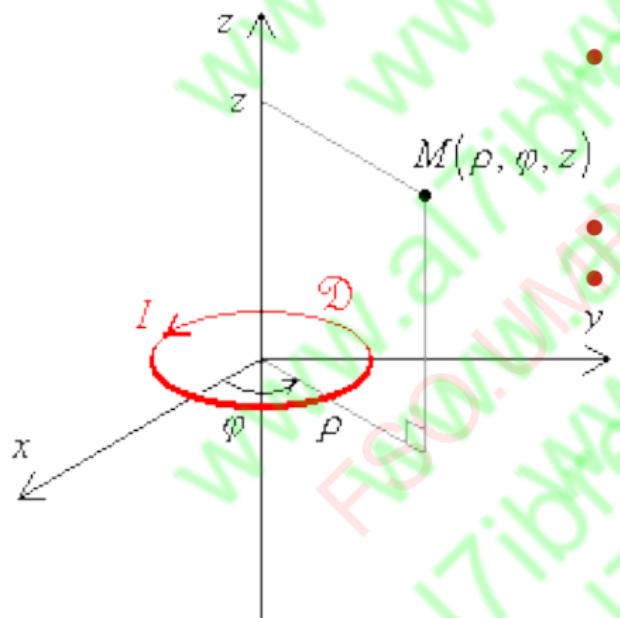
Fil rectiligne infini : Lignes de champ magnétiques



Champ créé par une spire circulaire : Invariances

\mathcal{D} est observée depuis le point M, repéré par ses coordonnées cylindriques ρ , ϕ , et z .

Études des invariances

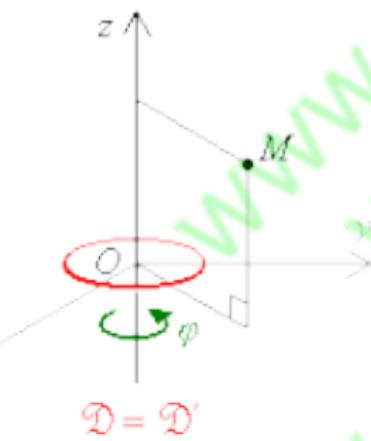


- Invariance par toute rotation autour de (Oz)

le système (\mathcal{D}, M) sera modifié. Le champ \vec{B} créé par \mathcal{D} en M dépend donc de ρ et de z , soit :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(z, \rho)$$

Etudes des invariances

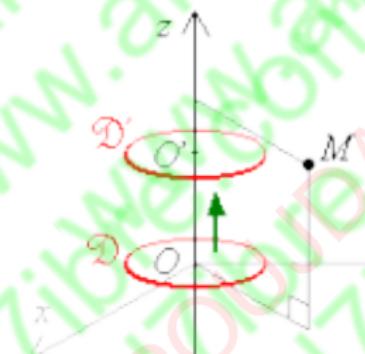


Rotation de \mathcal{D}

d'angle φ

$\mathcal{D} = \mathcal{D}'$

$(\mathcal{D}, M) = (\mathcal{D}', M)$

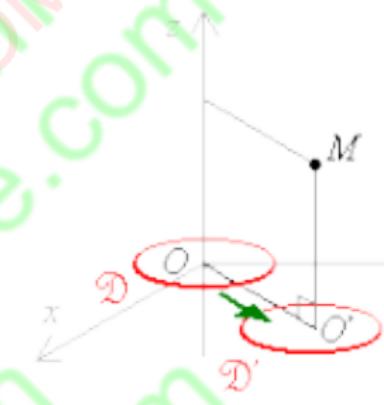


Translation de \mathcal{D}

le long de l'axe z

$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$

$(\mathcal{D}, M) \neq (\mathcal{D}', M)$



Translation de \mathcal{D}

suivant ρ

$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$

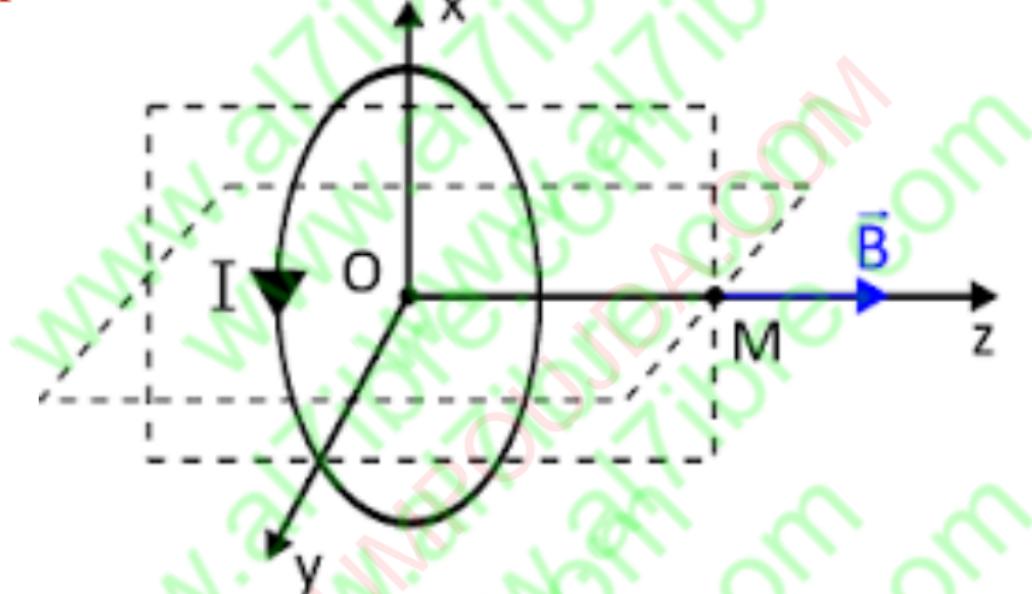
$(\mathcal{D}, M) \neq (\mathcal{D}', M)$

Étude des symétries

Étude des symétries

- Les plans (Π_{AS}) contenant l'axe (Oz) sont des plans d'antisymétrie des sources. \vec{B} appartient à chacun de ces plans donc \vec{B} appartient à leur intersection. Par conséquent, \vec{B} a une composante axiale.
- En un point quelconque, les symétries de la distribution ne sont donc pas suffisantes pour simplifier l'expression donnée par la loi de Biot et Savart.

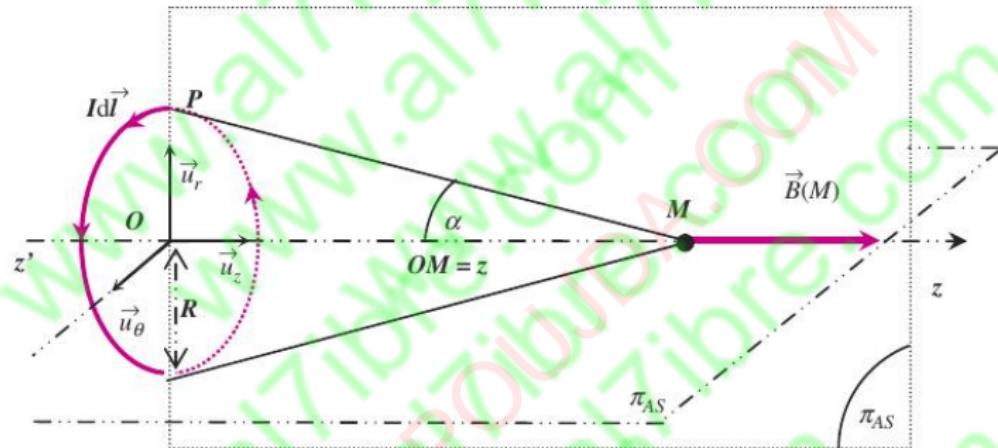
Champ créé par une spire circulaire en un point quelconque



- Pour tous les points M du plan, \vec{B} est ainsi contenu dans le plan .
- Soit M un point de l'axe. Tous les plans contenant l'axe Oz et M sont plans d'antisymétrie pour la spire donc $\vec{B}(M)$ est inclus dans leur intersection, qui est l'axe Oz . D'où :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(z) \vec{e}_z$$

Symétries et invariances pour un point de l'axe



Le point M est repéré par son abscisse $OM = z (\rho = 0)$.

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(z) \vec{e}_z$$

Champ créé par une spire circulaire sur son axe

Application de la loi de Biot et Savart

Découpons la spire en petits éléments dl . La contribution à $\vec{B}(M)$ d'un petit élément de courant $I d\vec{l}$ situé en P est représentée (voir figure) et vaut :

$$\begin{aligned} d\vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} && \text{BIOT-SAVART} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})}{PM^3} \end{aligned}$$

Pour tout point P de la spire la distance PM est identique. Utilisant le principe de superposition et la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{PM^3} \oint_{P \in \text{spire}} (d\vec{l} \wedge (\overrightarrow{PO}) + \oint_{P \in \text{spire}} (d\vec{l} \wedge \overrightarrow{OM})) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{PM^3} \oint_{P \in \text{spire}} (C_1 + C_2) \end{aligned}$$

Champ créé par une spire circulaire sur son axe

Dans la deuxième intégrale, le vecteur \overrightarrow{OM} est indépendant de la variable d'intégration repérant le point P sur la spire. Ce vecteur peut sortir du symbole intégrale et C_2 s'écrit alors :

$$C_2 = \left(\oint_{P \in \text{spire}} d\vec{l} \right) \wedge \overrightarrow{OM}$$

Dans le cas de la spire le point P fait un tour complet c'est à dire que le point initial est confondu avec le point final $P_1 = P_2$:

$$\oint_{P \in \text{spire}} d\vec{l} = \oint_{P=P_1}^{P=P_1} d\vec{l} = \overrightarrow{P_1 P_1} = \vec{0}$$

Coordonnées polaires pour repérer le point P :

$\overrightarrow{OP} = R\vec{u}_r$ et $d\vec{l} = R d\theta \vec{u}_\theta$. Soit,

$$C_1 = \oint_{P \in \text{spire}} \left(\overrightarrow{OP} \wedge d\vec{l} \right) = \oint_{P \in \text{spire}} (R\vec{u}_r \wedge R d\theta \vec{u}_\theta) = R (\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta) \underbrace{\oint_{P \in \text{spire}} dl}_{\text{périmètre de la spire}}$$

$$\oint_{P \in \text{spire}} dl = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R$$

L'intégrale sur toute la spire donne alors deux fois sa surface :

$$C_1 = 2\pi R^2 \vec{u}_z$$

Finalement le champ magnétique a pour expression :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{R^3}{PM^3} \vec{u}_z$$

En utilisant le théorème de Pythagore on a :

$$PM^2 = R^2 + z^2 \Rightarrow PM^3 = (R^2 + z^2)^{3/2}$$

$$\frac{R^3}{PM^3} = \frac{R^3}{R^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{3/2}} = \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-3/2}$$

Expression en fonction de z

$$\boxed{\vec{B}_z(M) = \vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-3/2} \vec{u}_\theta}$$

Expression en fonction de l'angle α

$$\sin(\alpha) = \frac{R}{PM} \Rightarrow \sin^3(\alpha) = \frac{R^3}{PM^3}, \text{ d'où :}$$

$$\boxed{\vec{B}_z(M) = \vec{B}(\alpha) = \frac{\mu_0 I \sin^3(\alpha)}{2R}}$$

Champ au centre O de la spire

En O l'abscisse z est nulle (ou bien l'angle α vaut $\pi/2$). On obtient :

$$\boxed{\vec{B}(O) = B_0 \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{u}_z}$$

Direction et sens de $\vec{B}_z(M)$

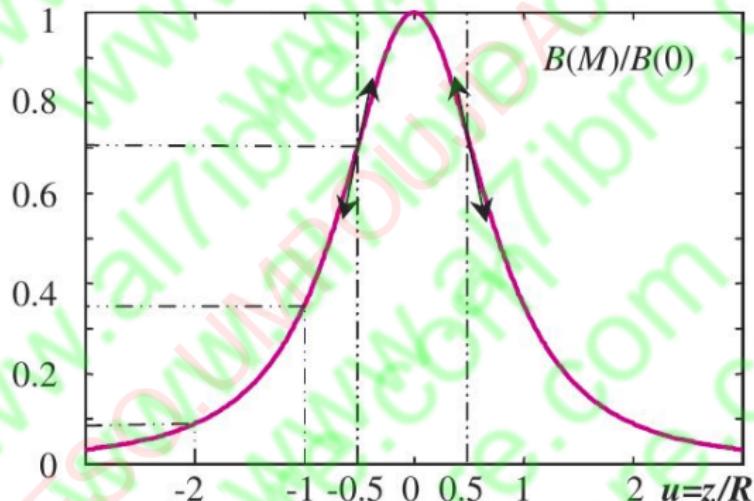
La spire se comporte comme un aimant plat, chacune de ses faces correspondant à un pôle.



Intensité de $\vec{B}(z)$ en fonction de la position du point M

En introduisant la nouvelle variable $u = z/R$, on a :

$$B(M) = B(z) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-3/2} = B_0 (1 + u^2)^{-3/2}$$



L'intensité du champ décroît relativement rapidement dès qu'on s'éloigne du centre.

Flux magnétique à travers une surface fermée

Le champ magnétique est à flux conservatif

Le flux de \vec{B} à travers une surface fermée, ou encore, le flux de \vec{B} à travers toute surface s'appuyant sur un contours orienté Γ est le même :

Équation intégrale :

$$\iint_{S_{\text{fermée}}} \vec{B} \cdot \vec{n}_{\text{ext}} dS = 0, \quad \forall S \text{ surface fermée quelconque.}$$

- ▶ Conséquence 1 : \vec{B} est à flux conservatif

Divergence du champ magnétique

L'opérateur divergence (symbole div) est un opérateur **scalair**, agissant sur un champ vectoriel \mathbf{A} (typiquement un champ électrique ou magnétique).

Considérons un volume τ , limité par une surface (S). La divergence vérifie :

$$\text{div} \vec{A} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Phi}{\tau},$$

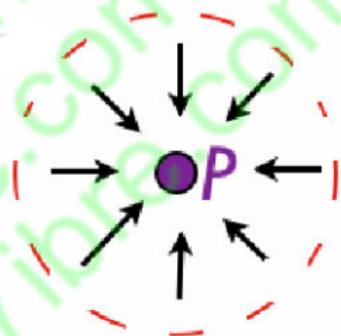
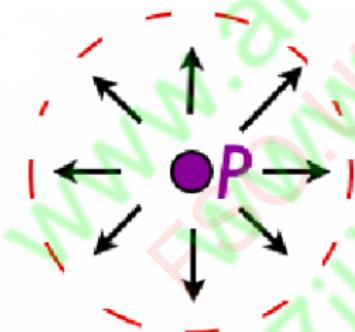
avec Φ est le flux de \vec{A} sortant de la surface fermée (S) limitant le volume τ . Donc, en d'autres termes, la divergence représente le flux sortant localement par unité de volume.

Divergence non nulle

Interprétation physique de la divergence

Si la divergence est non nulle, elle permet de savoir à quel endroit le champ "diverge" : par exemple, le champ électrique créé par une charge localisée en un point P n'a une divergence non nulle que dans la région de l'espace occupée par la charge.

1. Si la divergence est positive, le flux est sortant.
2. Si elle est négative, le flux est entrant.



Divergence nulle : cas du champ magnétique

3. Si enfin elle est nulle, le flux entrant est égale au flux sortant.



Formulation locale de la conservation du flux magnétique

En tout point M de l'espace où le champ $\vec{B}(M)$ est défini et différentiable :

$$\boxed{\text{div } \vec{B} = 0}$$

ce qui constitue la traduction locale du caractère conservatif du flux de \vec{B} .

Formulation locale

Formulation locale de la conservation du flux magnétique :

Preuve

On passe de l'information intégrale sur le flux de \vec{B} à la traduction locale en appliquant le théorème de **Green-Ostrogradski** qui stipule que :

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = \iiint_{V(S)} \operatorname{div} \vec{B} \, d\tau$$

Pour toute surface fermée S englobant le volume V .

\vec{B} est un champ à flux conservatif :

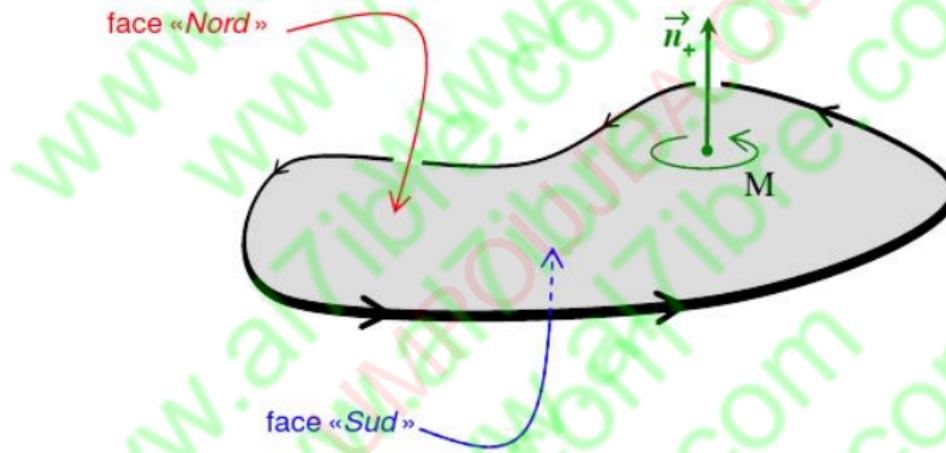
$$\oint\!\!\!\oint_{S_{\text{fermée}}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \iiint_{V(S)\text{quelconque}} \operatorname{div} \vec{B} \, d\tau = 0$$

$$\boxed{\text{équation locale : } \operatorname{div} \vec{B} = 0}$$

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$ restera valable dans le cas des régimes dépendant du temps.

Théorème d'Ampère : Notion de courant enlacé (entouré)

Soit un parcours fermé orienté Γ . Pour toute surface S s'appuyant sur le contour Γ .

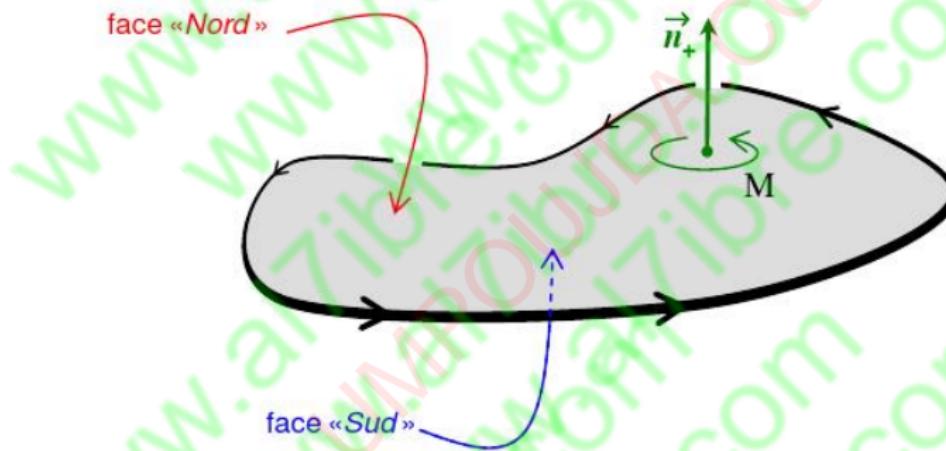


Le sens de rotation positif autour de \vec{n}_+ \Rightarrow sens de rotation de Γ .

\vec{n}_+ traverse la surface S en pénétrant par la face Sud et émergeant par la face Nord. \vec{n}_+ est dit "enlacé" positivement par Γ \Rightarrow l'enlacement est un concept algébrique.

Théorème d'Ampère : Notion de courant enlacé (entouré)

Soit un parcours fermé orienté Γ . Pour toute surface S s'appuyant sur le contour Γ .

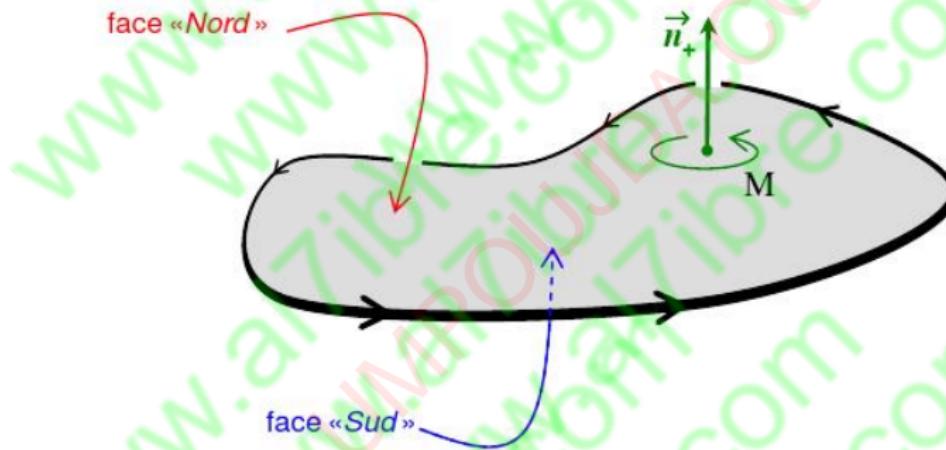


Le sens de rotation positif autour de \vec{n}_+ \implies sens de rotation de Γ .

\vec{n}_+ traverse la surface S en pénétrant par la face Sud et émergeant par la face Nord. \vec{n}_+ est dit "enlacé" positivement par Γ \implies l'enlacement est un concept algébrique.

Théorème d'Ampère : Notion de courant enlacé (entouré)

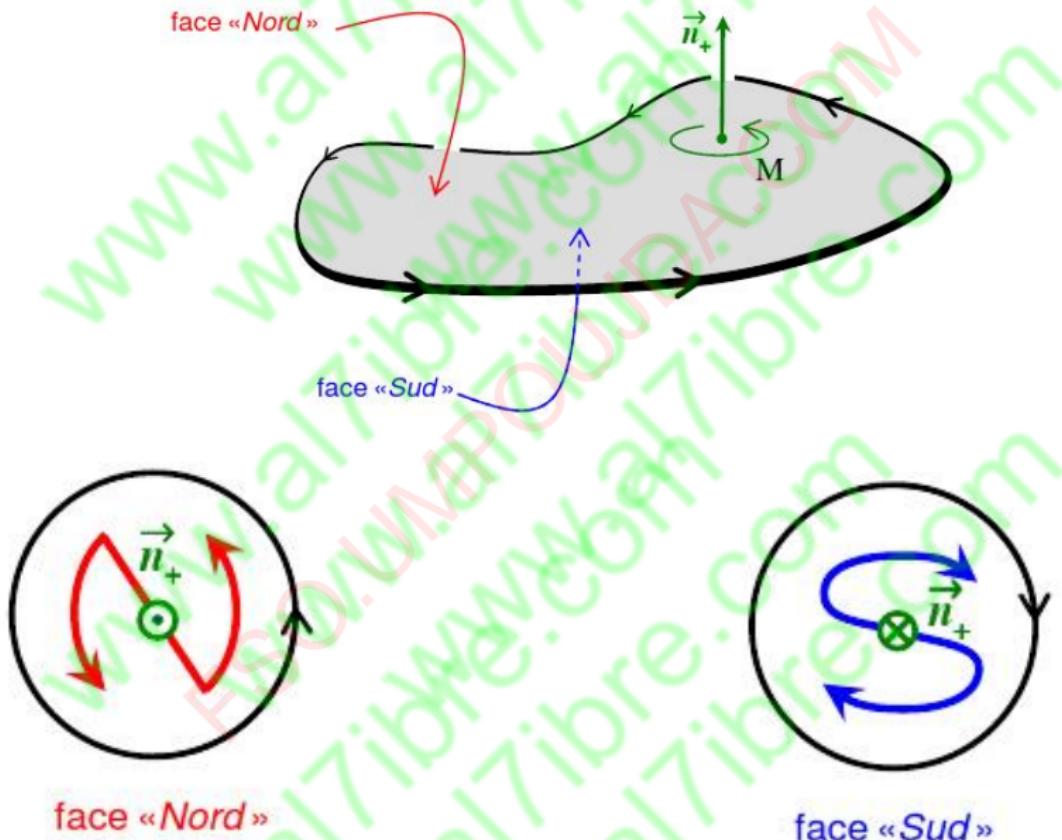
Soit un parcours fermé orienté Γ . Pour toute surface S s'appuyant sur le contour Γ .



Le sens de rotation positif autour de \vec{n}_+ \Rightarrow sens de rotation de Γ .

\vec{n}_+ traverse la surface S en pénétrant par la face Sud et émergeant par la face Nord. \vec{n}_+ est dit "enlacé" positivement par Γ \Rightarrow l'enlacement est un concept algébrique.

Théorème d'Ampère : Notion de courant enlacé (entouré)



Théorème d'Ampère : Notion de courant enlacé (entouré)

Courants filiformes $\implies I_{\text{enlacée}} = \pm \sum_k I_k$

I_k : intensité traversant une surface S s'appuyant sur le contour orienté Γ .

+ : courants traversant dans le sens Sud \rightarrow nord

- : courants traversant dans le sens Nord \rightarrow Sud.

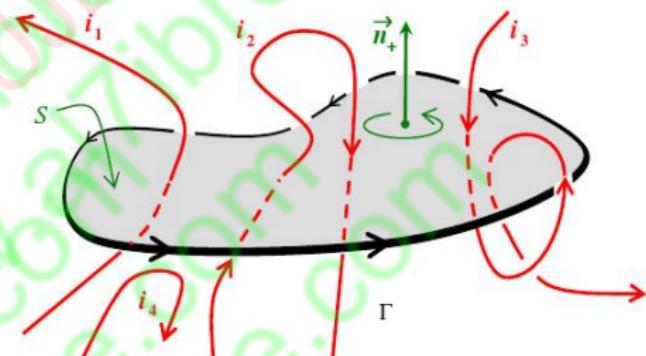
Courants filiformes (exemple)

Le courant i_1 est enlacé positivement

par Γ . Les courants i_2 et i_4

ne sont pas enlacés (i est enlacé une fois positivement et une fois négativement).

Le courant i_3 est enlacé deux fois négativement. L'intensité algébriquement enlacée a donc pour valeur : $i_{\text{enlacée}} = i_1 - 2i_3$



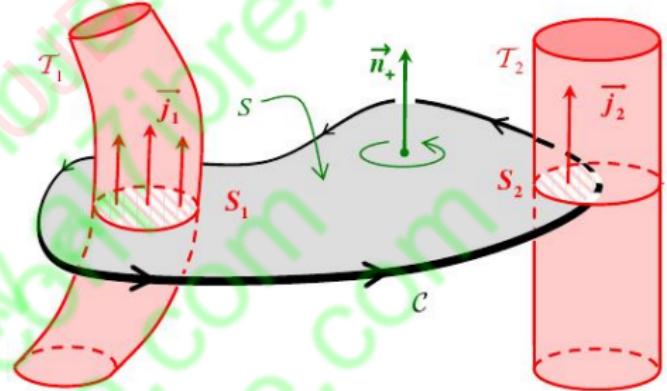
Théorème d'Ampère : Notion de courant enlacé (entouré)

Courants volumiques $\Rightarrow I_{\text{enlacée}} = \text{flux de } \vec{j} \text{ à travers la surface } S$ orientée par le champ de vecteurs \vec{n}_+

$$I_{\text{enlacée}} = \iint_{P \in S} \vec{j}(P) \cdot \vec{n}_+(P) \, \delta S$$

Courants volumiques définis par \vec{j}

Le tube de courant T_1 est totalement enlacé. Le tube de courant T_2 n'est quant à lui que partiellement enlacé. Dans la définition du courant enlacé, la surface S_1 est étendue à la section entière du tube T_1 tandis que la surface S_2 se limite à la zone hachurée. :



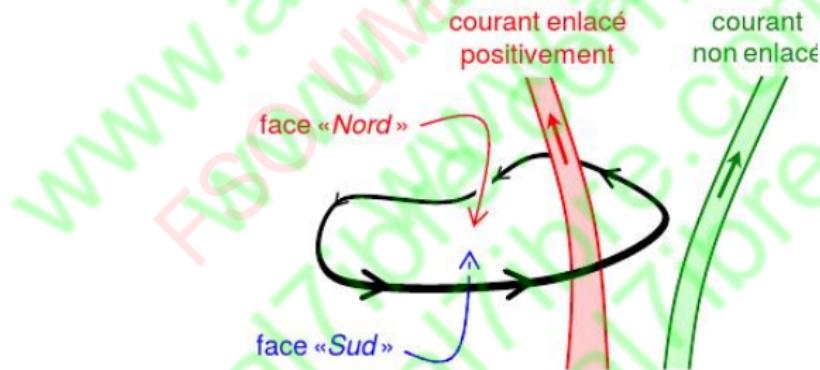
$$I_{\text{enlacée}} = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n}_+ \, \delta S = \iint_{S_1 \oplus S_2} \vec{j} \cdot \vec{n}_+ \, \delta S$$

Énoncé du théorème d'Ampère

Énoncé du théorème d'Ampère

Soit, dans le vide, une **distribution stationnaire** de courants créant dans tout l'espace un champ d'induction magnétique \vec{B} constant. La circulation de \vec{B} le long d'une courbe imaginaire quelconque fermée orientée Γ est égale au produit par la perméabilité du vide μ_0 de l'intensité électrique enlacée par Γ .

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$$



Représentation d'une surface par un vecteur

En un point M d'une surface S, on note dS un petit élément de surface assimilable à une partie de plan tangent en M à S. dS sera représenté par un vecteur élémentaire $\overrightarrow{dS} = dS \overrightarrow{n}$ où \overrightarrow{n} est la normale, dont l'orientation dépend de certaines conventions :

Surfaces fermées

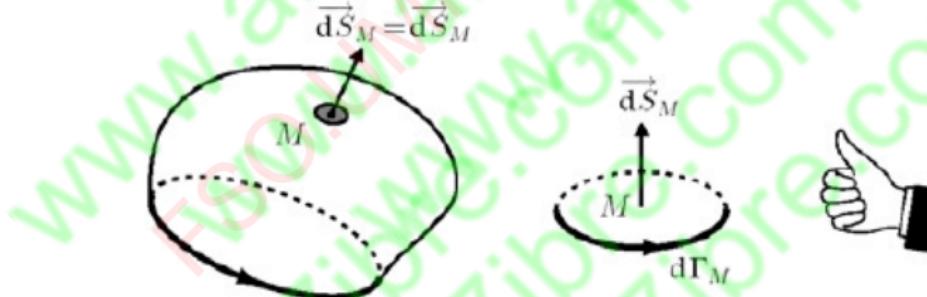
surfaces fermées : la normale en M est donc orienté vers l'extérieur (normale sortante).

$$\overrightarrow{dS_{ext}} = dS \overrightarrow{n_{ext}} \quad \text{toujours pour une surface fermée.}$$

Représentation d'une surface par un vecteur

Surfaces fermées s'appuyant sur des contours fermés orientés :

- a. La règle de la main droite : si l'on place la main droite de telle manière que le sens positif va vers le bout des doigts, le pouce droit pointe dans le sens positif pour S .
- b. Soit l'observateur d'Ampère : placé debout sur la surface S et voyant le vecteur \vec{n} remonter de ses pieds vers sa tête, voit la circulation tourner dans le sens trigonométrique direct .

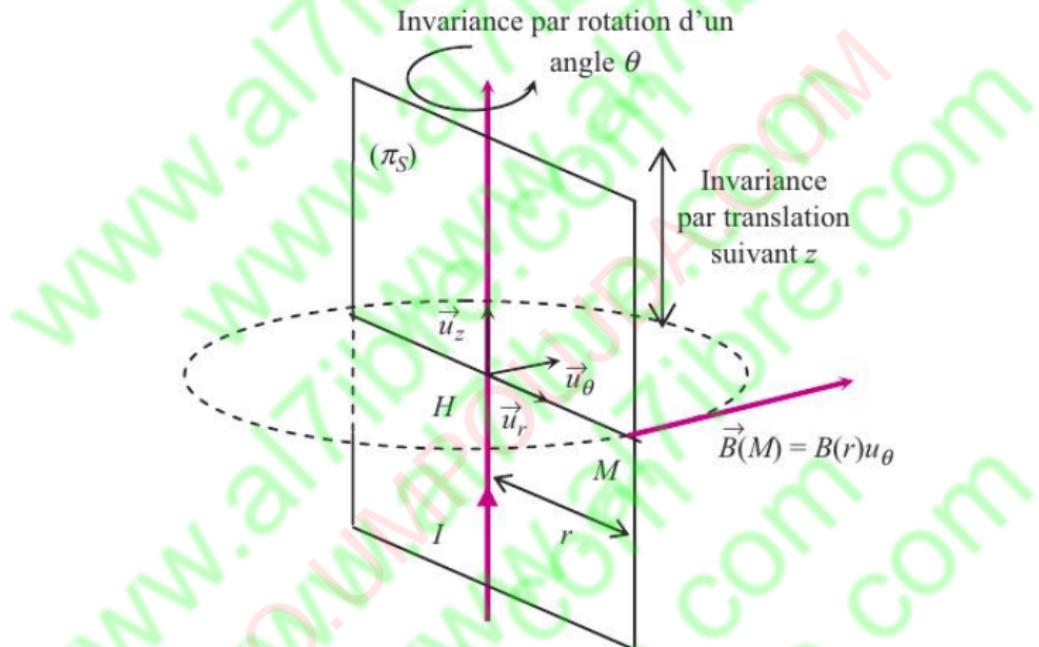


Représentation d'une surface par un vecteur

Surfaces ouvertes

il n'y a pas d'orientation privilégiée. L'orientation de \vec{n} est arbitraire dans ce cas.

Cas du fil infini parcouru par un courant



On cherche à déterminer l'expression de $\vec{B}(M)$ créé par le courant d'intensité I circulant dans le fil. Le point M est repéré par : $\overrightarrow{HM} = r\vec{u}_r$

Cas du fil infini parcouru par un courant

Étude des symétries :

Le courant présente la symétrie cylindrique. En coordonnées cylindriques on a : $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z)$.

Tout plan (π_S) contenant le fil et le point M est un plan de symétrie pour le courant (source du champ magnétique). Le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan défini par les vecteurs $(\vec{u}_r; \vec{u}_z)$ et est donc obligatoirement orthoradial :

$$\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$$

Étude des invariances :

Le fil est infini. Il y a donc invariance par translation le long de l'axe Oz . Le champ ne dépend pas de z . Le fil est un axe de symétrie : il y a invariance par rotation d'un angle θ autour du fil. L'intensité du champ ne dépend pas de θ . Par conséquent,

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$$

Cas du fil infini parcouru par un courant

Choix du contour fermé orienté :

- ▶ les lignes de champ sont des cercles de rayon r
- ▶ sur chaque cercle, le module de \vec{B} est constant

Le contour fermé à choisir est donc :

- ▶ un cercle de centre H et de rayon $HM = r$

Le contour est orienté comme \vec{u}_θ . La surface du cercle est orientée alors comme l'axe Oz : $\vec{n} = \vec{u}_z$.

Circulation de \vec{B}

$$\oint_{M \in C} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{M \in C} B(r) \vec{u}_\theta \cdot dl \vec{u}_\theta = \oint_{M \in C} B(r) dl = B(r) \oint_{M \in C} dl = 2\pi r B(r)$$

Théorème d'Ampère

Le seul courant traversant la surface s'appuyant sur le contour est le courant d'intensité I dans le même sens que la normale $\vec{n} = \vec{u}_z$:

$$\oint_{M \in C} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{enlacé}} = \mu_0 I \Rightarrow B(r) 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

Formulation locale du théorème d'Ampère

Rotationnel d'un champ vectoriel

L'opérateur rotationnel (symbol $\vec{\text{rot}}$) est un opérateur vectoriel, agissant sur un champ vectoriel \vec{X} . Il exprime la tendance qu'ont les lignes de champ d'un champ vectoriel à tourner autour d'un point. Le champ \vec{X} vérifie

$$dC = \vec{\text{rot}}(\vec{X}) \cdot d\vec{S}$$

où dC est la circulation élémentaire du vecteur champ \vec{X} sur un contour fermé ($d\Gamma$) limitant une surface $d\vec{S}$. Le vecteur $\vec{\text{rot}}(\vec{X})$ est parallèle au vecteur \vec{n} normal au plan pour lequel $d\Gamma$ est maximale.

Formulation locale du théorème d'Ampère

En tout point de l'espace où le champ \vec{B} est défini et différentiable, le caractère non-conservatif de la circulation de \vec{B} est traduit localement par la relation :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Formulation locale du théorème d'Ampère

Preuve : Théorème de Stokes

Le rotationnel d'un champ de vecteurs \vec{X} en un point à travers une surface s'appuyant sur un contour (Γ) est égale à la circulation locale du champ autour de ce point.

$$\oint_{\Gamma} \vec{X} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot}(\vec{X}) \cdot d\vec{S}$$

Ce théorème est appelé théorème du rotationnel (Stokes).

Substituons \vec{X} à \vec{B} \Rightarrow

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot}(\vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

L'intensité $I_{\text{enlacés}}$ du courant enlacé s'exprime aussi comme

$$I_{\text{enlacés}} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Théorème du rotationnel

Théorème du rotationnel (Stokes-Ampère)

On déduit donc l'égalité :

$$\iint_S \vec{\text{rot}}(\vec{B}) \cdot \vec{dS} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

qui doit être satisfaite pour toute surface S s'appuyant sur Γ . Par conséquent, l'égalité des intégrales impliquent l'égalité des intégrants de sorte que

$$\vec{\text{rot}}\vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}(M)$$

Champ de rotationnel

Théorème. Champ de rotationnel

On appelle champ de rotationnel tout champ \vec{Y} défini et différentiable pouvant s'écrire sous la forme $\vec{Y} = \vec{\text{rot}} \vec{X}$.

Les seuls champs à divergence nulle sont les champs de rotationnel,

$$\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{X}) = 0.$$

Appliquons ce résultat au champ \vec{B} , dont $\text{div} \vec{B} = 0$ partout, on obtient :

Définition. Potentiel vecteur

Le champ \vec{B} dérive d'un potentiel vecteur, noté \vec{A} tel que, en tout point de l'espace :

$$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$$

Preuve

On sait que $\text{div} \vec{B} = 0$ pour tout point M de l'espace.

$\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{X}) = 0 \Rightarrow \exists$ un champ vectoriel \vec{A} tel que $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$

Propriétés de symétrie de \vec{A}

Théorème. Propriétés de symétrie de \vec{A}

- Les plans de symétrie de \vec{B} sont les plans d'antisymétrie de \vec{A} .
- Les plans d'antisymétrie de \vec{B} sont les plans de symétrie de \vec{A} .

Non-unicité de \vec{A} - Notion de jauge

Sachant que

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}\phi) = \vec{0}$$

est satisfaite pour toute fonction scalaire $\phi(M)$. Ceci impose donc que tous les potentiels vecteurs écrits sous la forme

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}\phi)$$

décriront le même champ magnétostatique car :

$$\vec{B}' = \vec{\text{rot}}\vec{A}' = \vec{\text{rot}}\vec{A} + \underbrace{\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}\phi)}_{=\vec{0}} = \vec{B}.$$

Le potentiel vecteur magnétique est défini à un gradient près.

Équation de Poisson de la magnétostatique - Jauge de Coulomb

Définition. Notion de jauge

On peut vouloir se limiter à une certaine classe de potentiels vecteurs en leur imposant une contrainte (réaliser un choix particulier pour \vec{A}). On dit alors que l'on fait un choix de jauge.

Dans la **jauge de Coulomb**, on impose la condition $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

Puisque $\vec{B} = \operatorname{rot}(\vec{A})$, on a $\operatorname{rot}(\vec{B}) = \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\vec{A}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$

Comme $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, on a $\operatorname{rot}(\vec{B}) = -\Delta \vec{A}$ Par analogie à l'équation de Poisson en électrostatique, on trouve :

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

et par conséquent :

Condition de Jauge de Coulomb

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

\vec{A} vérifie l'équation de Poisson de la magnétostatique (équation locale)

De l'équation de Poisson, on déduit la forme de \vec{A}

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{j}(M)}{MP} d\tau; \text{ distributions volumiques}$$

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{j}_S(M)}{MP} dS; \text{ distributions surfaciques}$$

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I \vec{dl}(M)}{MP}; \text{ circuits filiformes}$$

Proposition. \vec{A} est un vecteur polaire

En régime stationnaire, les symétries du potentiel vecteur \vec{A} sont les mêmes que celles du courant \vec{j} .

Conditions aux limites pour \vec{B}

Continuité et discontinuité de $\vec{B}(M)$

- $\vec{B}(M)$ est continu en M lorsque M est dans une distribution volumique de courant,
- $\vec{B}(M)$ est discontinu en M lorsque M est sur une nappe de courant surfacique,
- $\vec{B}(M)$ diverge en M lorsque M est sur une distribution linéique de courant.

Conditions aux limites pour \vec{B}

Nappe de courant

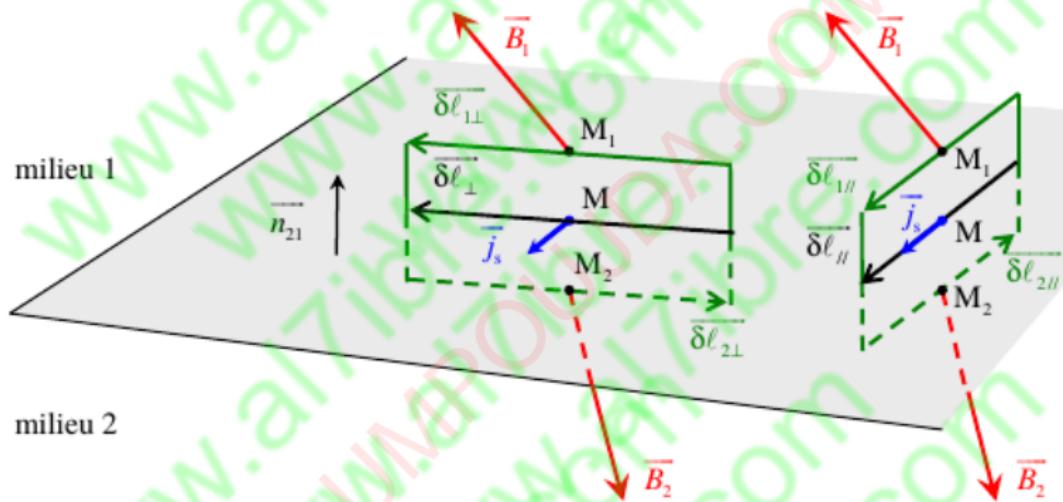
Une **nappe de courant** est une **surface** (S) sur laquelle existent des courants superficiels de densité surfacique \vec{j}_s (s'exprime en A.m^{-1}). Lorsque cette nappe sépare deux milieux magnétiques, la composante normale du champ magnétique \vec{B} reste toujours continue de part et d'autre de la surface de séparation. La composante tangentielle de \vec{B} est discontinue

$$\vec{B}_{T1} - \vec{B}_{T2} = \mu_0 (\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12})$$

où \vec{B}_{T2} et \vec{B}_{T1} sont les composantes de \vec{B} tangentielles à la surface. \vec{n}_{12} le vecteur unitaire normal à la surface et orienté du milieu 1 vers le milieu 2.

Conditions aux limites pour \vec{B}

Nappe de courant



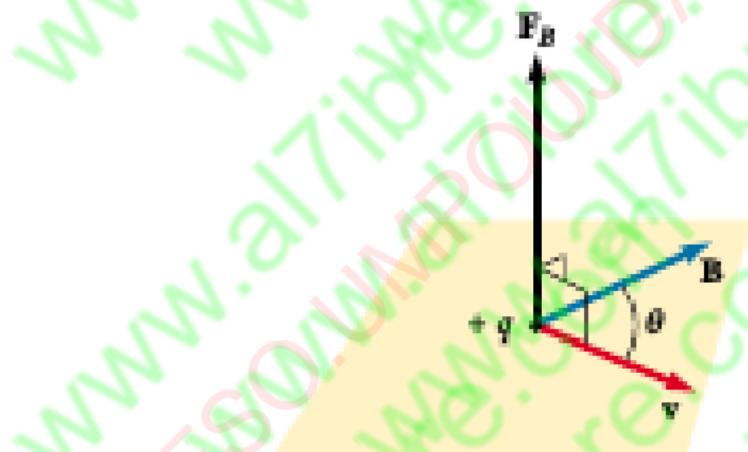
Force de Lorentz

\vec{F}_B est l'influence que produit \vec{B} sur une particule chargée en mouvement se déplaçant à une vitesse \vec{v} . Des expériences sur diverses particules chargées se déplaçant dans un champ magnétique donnent les résultats suivants :

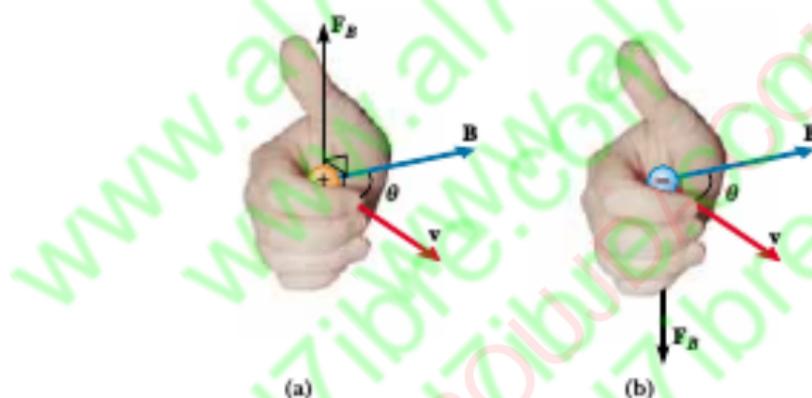
- Le module de \vec{F}_B est proportionnel à la **charge** q et au **champ magnétique** \vec{B} .
- Le module et la direction de \vec{F}_B dépendent de la vitesse de la particule et du module et de la direction de \vec{B} .
- ▶ Quand une particule chargée se déplace parallèlement au vecteur champ magnétique \vec{B} , \vec{F}_B agissant sur la particule est nulle.

Force de Lorentz

- ▶ Lorsque \vec{v} fait un angle $\theta \neq 0$ avec \vec{B} , \vec{F}_B est toujours perpendiculaire à \vec{v} et à \vec{B} . Donc elle est perpendiculaire au plan défini par \vec{v} et \vec{B}



Force de Lorentz : $\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$



Règle de la main droite

La direction du produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est déterminée par la règle de la main droite : on pointe les quatres doigts de la main droite le long de la direction de \vec{v} avec la paume tournée vers \vec{B} et les courber vers \vec{B} . Le pouce prolongé, qui est à angle droit aux doigts, points dans la direction de $\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Force de Lorentz :
$$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$$

- \vec{F}_B exercée sur une charge positive est dans la direction opposée à la direction de \vec{F}_B exercée sur une charge négative se déplaçant dans le même sens
- Le module de \vec{F}_B est proportionnel à $\sin \theta$, où θ est l'angle que fait \vec{v} avec la direction de \vec{B} .

$$\|\vec{F}_B\| = |q| \|\vec{v}\| \|\vec{B}\| \sin \theta$$

Force de Laplace

Si maintenant on a un conducteur parcouru par un courant I , chaque charge mobile du conducteur va subir une force de Lorentz. Supposant que le conducteur contient un seul type de charges mobiles, soit n charges mobiles. La résultante \vec{F} des n forces de Lorentz constitue la **force électromagnétique de Laplace** s'exerçant sur le conducteur tout entier. Elle exprime la force \vec{F} à laquelle est soumis un circuit parcouru par le courant I , en présence d'un champ magnétostatique \vec{B}

$$\vec{F} = \int_{M \in (C)} I \vec{dl} \wedge \vec{B}(M)$$

Le champ \vec{B} fait l'objet de la loi de Biot et Savart.

Conducteur cylindrique parcouru par un courant de volume uniforme I

Ce problème présente les mêmes symétries et invariances que le fil infini, nous recherchons donc un champ magnétique de la forme $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$. I : intensité totale uniformément répartie dans le volume du conducteur avec une densité de courant uniforme $\vec{j} = \frac{I}{\pi r^2} \vec{u}_z$. Le problème diffère du précédent pour l'évaluation de l'intensité électrique enlacée. Nous devons distinguer deux cas :

- ▶ Si le point M est à l'extérieur du fil cylindrique, la totalité du courant est enlacé

$$I_{\text{enlacée}} = \pi R^2 j = I$$

Le théorème d'Ampère conduit alors à la même expression du champ que pour un fil rectiligne filiforme. Soit, pour

$$r > R : B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}.$$

Conducteur cylindrique parcouru par un courant de volume uniforme II

- Si le point M est à l'intérieur du fil cylindrique, seule une partie du courant est enlacée :

$$I_{\text{enlacée}} = \pi r^2 j = I \frac{r^2}{R^2}$$

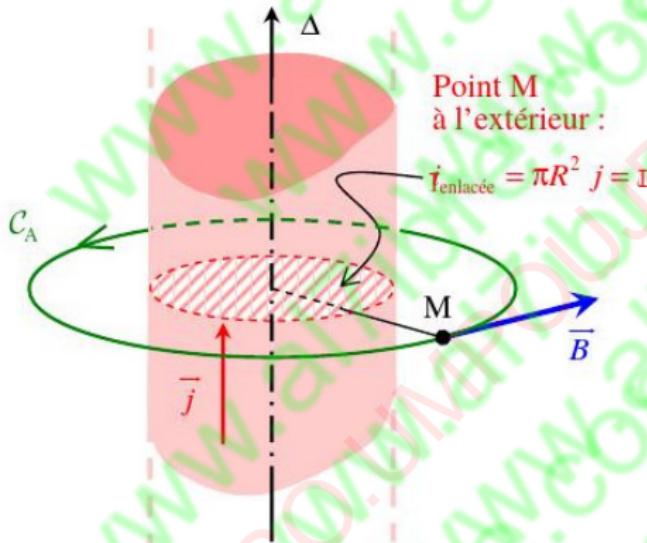
- . Le théorème d'Ampère s'exprime alors par la relation :
 $2\pi r B(r) = \mu_0 I_{\text{enlacée}} = \mu_0 j \pi r^2$ Donc pour $r < R$

$$B(r) = \frac{\mu_0 j r}{2}$$

En conclusion, nous avons ainsi démontré que le champ magnétique varie continûment dans l'espace conformément aux expressions :

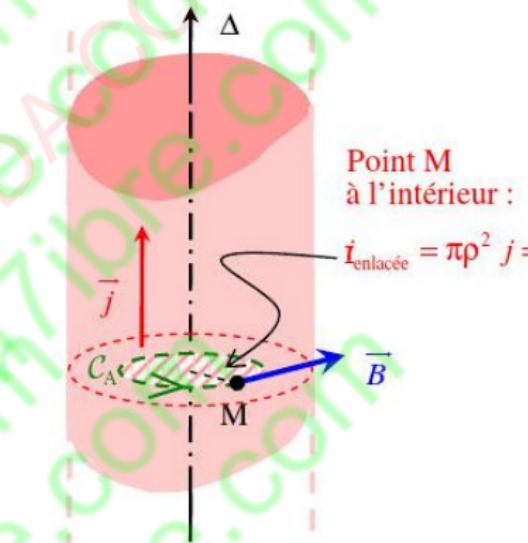
$$\begin{cases} r \leq R & B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 j r}{2} \\ r \geq R & B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j R^2}{r} \end{cases}$$

Conducteur cylindrique parcouru par un courant de volume uniforme III



Point M
à l'extérieur :

$$\vec{i}_{\text{enlacée}} = \pi R^2 j = I$$



Point M
à l'intérieur :

$$\vec{i}_{\text{enlacée}} = \pi \rho^2 j = \frac{I}{L}$$

Conducteur cylindrique parcouru par un courant de surface uniforme I

Ce problème présente cette fois encore les mêmes symétries et invariances que le précédent, on recherche donc un champ magnétique de la forme $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_z$. Notons I l'intensité totale uniformément répartie dans la surface du conducteur avec une densité de courant de surface $\vec{j}_s = \frac{I}{2\pi R}\vec{u}_z$. De la même façon, on choisit pour parcours d'Ampère Γ le cercle passant par le point M , de rayon r , centré sur l'axe Oz et orthogonal à cet axe. Sur ce parcours, orienté dans le sens direct, la circulation du champ magnétique a pour expression : $2\pi r B(r)$. De la même façon que précédemment, pour l'évaluation de l'intensité électrique enlacée, nous devons distinguer deux cas :

- ▶ Si le point M est à l'extérieur du fil cylindrique,

Conducteur cylindrique parcouru par un courant de surface uniforme II

la totalité du courant est enlacé

$$I_{\text{enlacée}} = 2\pi R j_s = I$$

Le théorème d'Ampère conduit alors à la même expression du champ que pour un fil rectiligne filiforme. Soit, pour

$$r > R : B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j_s R}{r}.$$

- ▶ Si le point M est à l'intérieur du fil cylindrique,

Conducteur cylindrique parcouru par un courant de surface uniforme III

aucun courant n'est enlacé :

$$I_{\text{enlacée}} = 0$$

. Le théorème d'Ampère s'exprime alors par la relation :

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I_{\text{enlacée}} = 0. \text{ Donc pour } r < R$$

$$B(r) = 0$$

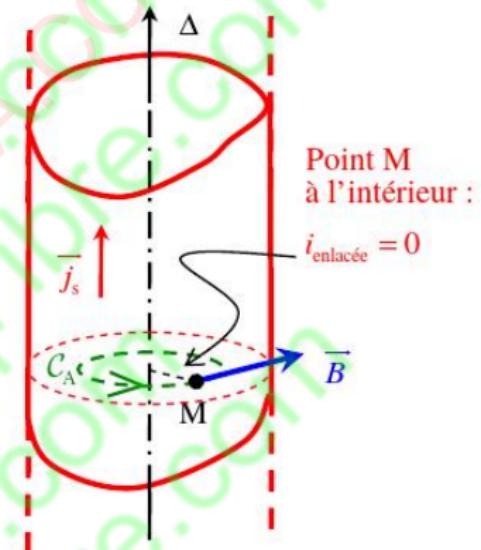
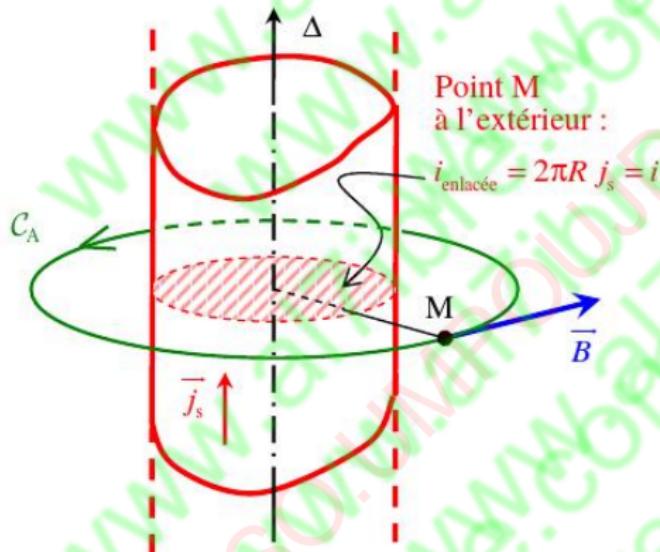
En conclusion, nous avons ainsi démontré que le champ magnétique varie continûment dans l'espace conformément aux expressions :

$$\begin{cases} r < R & B(r) = 0 \\ r > R & B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j_s R}{r} \end{cases}$$

Conducteur cylindrique parcouru par un courant de surface uniforme IV

Remarque : le champ magnétique présente une **discontinuité à la surface** du cylindre égale à $\mu_0 j_s$. La composante du champ magnétique **tangentielle** à la nappe de courant et orthogonale au courant est discontinue à la traversée d'une surface chargée.

Conducteur cylindrique parcouru par un courant de surface uniforme V



Solénoïde infini : Solénide idéal I

Ce problème est fondamentalement différent du précédent. Il s'agit toujours d'une nappe de courant sur une surface cylindrique, mais cette fois le courant s'enroule autour de l'axe Oz. Nous étudions ici le problème correspondant à un cylindre infini. Le problème, en plus d'être invariant par rotation quelconque autour de Oz est donc également invariant par translation quelconque selon Oz.

1. Étude de symétrie

Dans cette nouvelle situation, tous les plans perpendiculaires à l'axe Oz sont des plans de symétrie de la distribution des courant : nous en déduisons qu'en tout point de l'espace le champ magnétique est orthogonal à ces plans, c'est-à-dire dirigé selon Oz : $\vec{B} = B_z(r)\vec{u}_z$. De plus, les invariances impliquent que la composante $B_z(r)$ ne dépend que du rayon r :

Solénoïde infini : Solénide idéal II

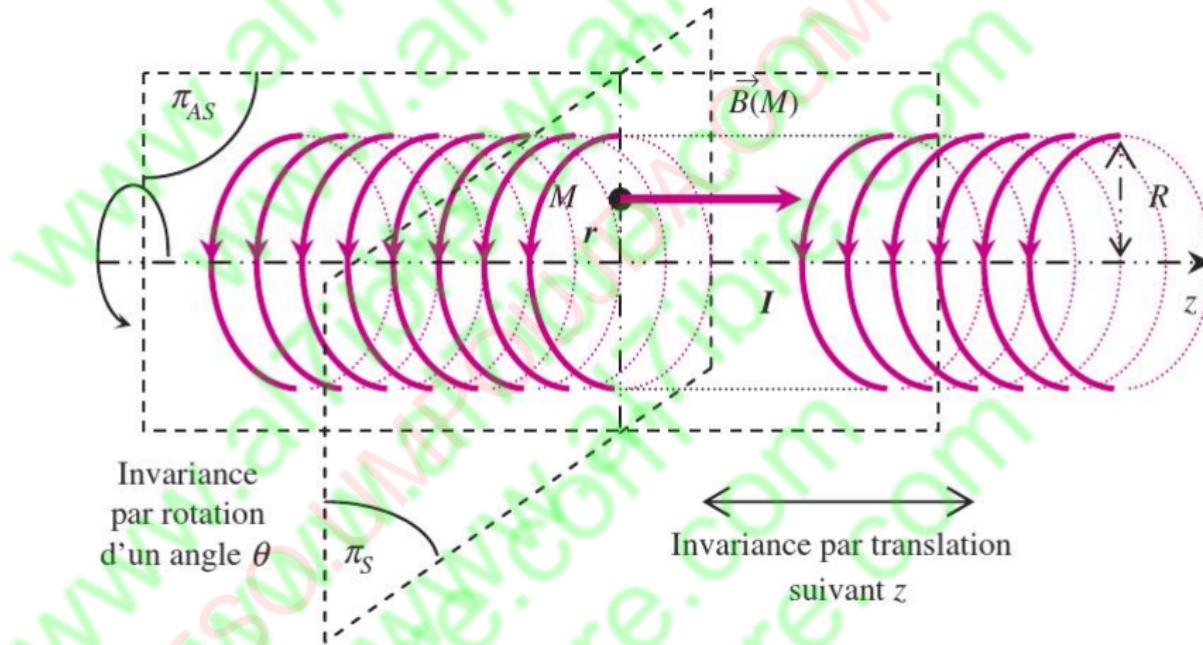


FIGURE : Solénoïde infini : symétries et invariances

Solénoïde infini : Solénide idéal I

2. Choix du contour fermé

Le contour doit comporter des segments rectilignes parallèles à l'axe z (champ constant si $r = \text{constante}$). Pour constituer un contour fermé on peut relier deux segments parallèles à l'axe par des segments perpendiculaires tels que la circulation du champ sera nulle sur ces portions.

Conclusion : prendre un cadre rectangulaire contenu dans le plan d'anti-symétrie Π_{AS} , de longueur L parallèle à l'axe, r_1 et r_2 étant les distances à l'axe des deux longueurs

Solénoïde infini : Solénide idéal II

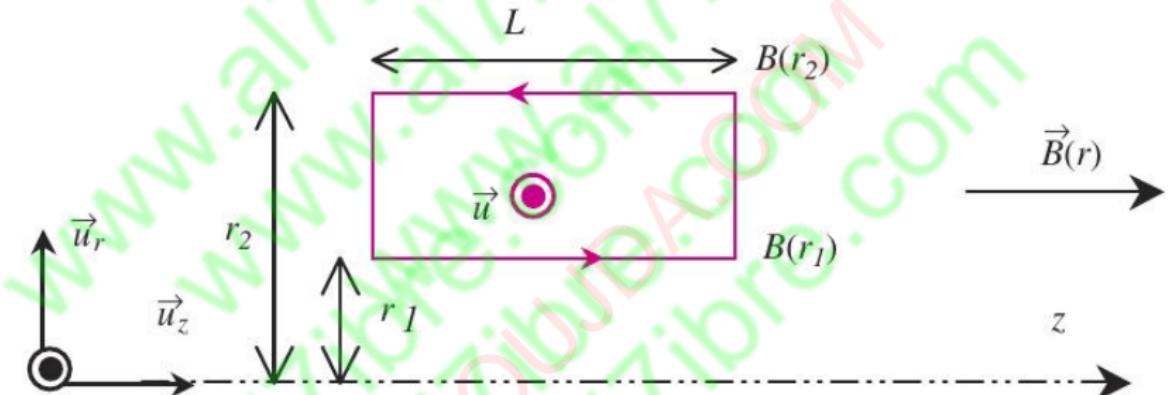


FIGURE : Contour choisi pour appliquer le théorème d'Ampère

3. Application du théorème d'Ampère

Solénoïde infini : Solénide idéal III

Le champ \vec{B} est uniforme à l'extérieur du solénoïde. On choisit donc le parcours d'Ampère rectangulaire C_{A1} (Le cadre est complètement en dehors du solénoïde $r_2 > r_1 > R$) . Sur ce parcours, avec les conventions algébriques du schéma, la circulation vaut : $B_z(r_2)l - B_z(r_1)l$. Aucun courant n'étant enlacé (aucun courant ne traverse la surface du cadre), cette circulation est nulle et l'on a donc un champ uniforme à l'extérieur du solénoïde :

$$B_z(r) = B_{\text{ext}}, \forall r > R.$$

Une démonstration analogue avec le parcours d'Ampère C_{A2} montre que \vec{B} est nécessairement uniforme à l'intérieur du solénoïde :

$$B_z(r) = B_{\text{int}}, \forall r < R.$$

Solénoïde infini : Solénide idéal IV

C_{A3} le contour d'Ampère sur la nappe de courant. Ce parcours enlace le courant $j_s l$ et nous en déduisons par application du théorème d'Ampère :

$$(B_{\text{int}} - B_{\text{ext}})l = \mu_0 j_s l$$

Ce résultat exprime tout simplement la discontinuité du champ magnétique à la traversée d'une nappe de courant de surface.

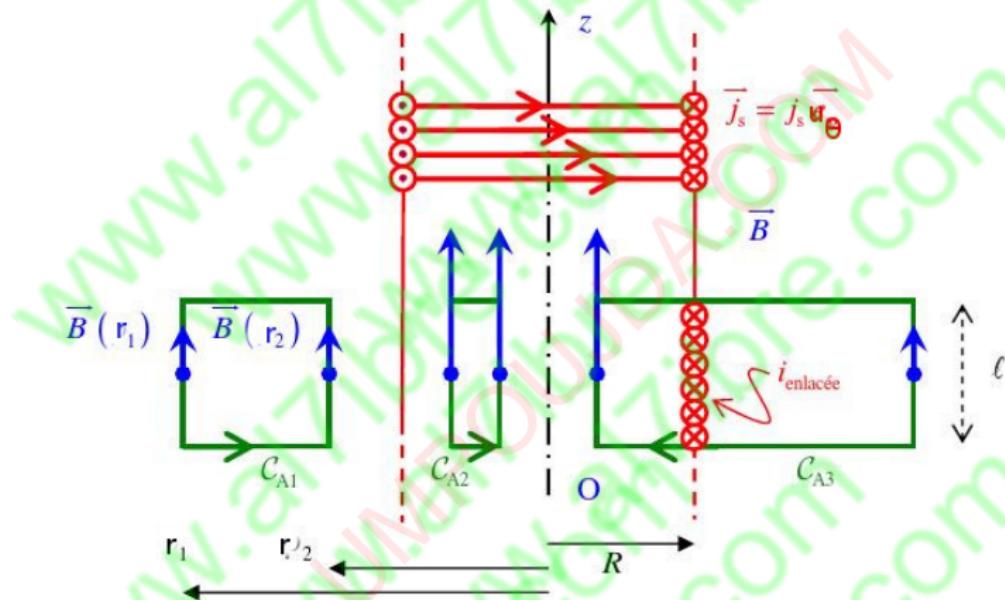
On admettra qu'à l'extérieur le champ magnétique B_{ext} est nul. C'est en effet la seule solution qui a un sens physique (si on est suffisamment loin de la bobine, le champ doit être nul) : le champ à l'extérieur est donc nul.

Conclusion :

À l'intérieur du solénoïde, pour $r < R$ on a $\vec{B}_{\text{int}} = B_0 \vec{u}_z$

À l'extérieur du solénoïde, pour $r > R$ on a $\vec{B}_{\text{ext}} = 0$

Solénoïde infini : Solénide idéal V



Parcours extérieur :

$$i_{\text{enlacée}} = 0$$

Parcours intérieur :

$$i_{\text{enlacée}} = 0$$

Parcours à cheval sur la nappe de courant :

$$i_{\text{enlacée}} = j_s \ell$$

Nappe de courant plane infinie et uniforme I

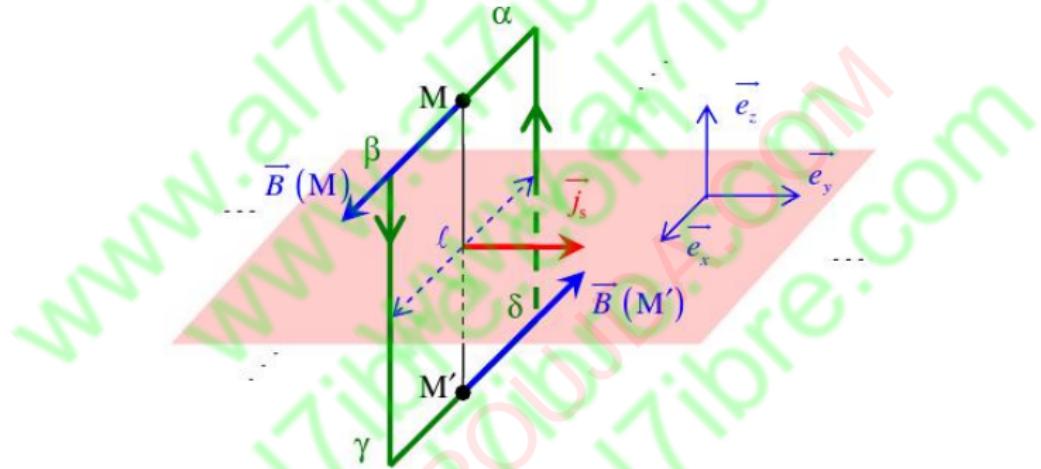
La démonstration utilise l'**équation locale de Maxwell-Ampère**. La démonstration étant faite que les composantes B_y et B_z du champ magnétique sont nulles et que la composante B_x ne dépend que de z , le rotationnel du champ magnétique est simplement égal à la dérivée de B par rapport à z :

$$\vec{B}(M) = B_x(z) \vec{u}_x \implies \vec{\text{rot}} \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial B_x}{\partial z} \vec{u}_y$$

De part et d'autre du plan chargé, la densité de courant j est nulle. Nous en déduisons, d'après l'équation locale $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 j$, que le rotationnel du champ magnétique y est nulle en tout point et que, par conséquent, le champ magnétique est uniforme dans chacun de ces demi espaces.

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 j \implies \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0, \quad \text{soit } B_x = \text{cst}$$

Nappe de courant plane infinie et uniforme II



Nappe de courant plane infinie et uniforme III

La nappe de courant est un plan de symétrie de la distribution de courant, ce qui implique un champ magnétique dans tout l'espace de la forme antisymétrique :

$$\begin{cases} \vec{B} = +B_0 \vec{u}_x & \text{pour } z > 0 \\ \vec{B} = -B_0 \vec{u}_x & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

Enfin, l'expression de la discontinuité de la composante normale du champ à la traversée d'une surface chargée et nous en déduisons :

$$\vec{B}_+ - \vec{B}_- = (+B_0 \vec{u}_x) - (-B_0 \vec{u}_x) = 2B_0 \vec{u}_x = \mu_0 j_s \vec{u}_x.$$

Et finalement :

$$\begin{cases} \vec{B} = +\frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{u}_x & \text{pour } z > 0 \\ \vec{B} = -\frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{u}_x & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

ÉLECTROMAGNÉTISME

Notions d'induction

F. Ouchni

18 avril 2016

Plan

Introduction

Énergie magnétique

Approche expérimentale

Équations de Maxwell dans le
vide

Loi de Lenz

Loi de Faraday

Auto-induction

Inductance mutuelle

Induction

Induction électromagnétique

1. Découverte par Faraday en 1831.
2. C'est l'apparition d'un courant induit dans un circuit grâce à la variation du flux d'un champ magnétique.
3. Applications technologiques : moteur électrique, alternateurs, transformateurs, ...

Deux types d'inductions

- ▶ soit en déplaçant un champ magnétique stationnaire au voisinage d'un circuit électrique fixe
- ▶ soit en déplaçant (ou déformant) un circuit électrique au voisinage d'un champ magnétique stationnaire fixe.

Expériences : 1^{re} expérience : aimant mobile, circuit fixe

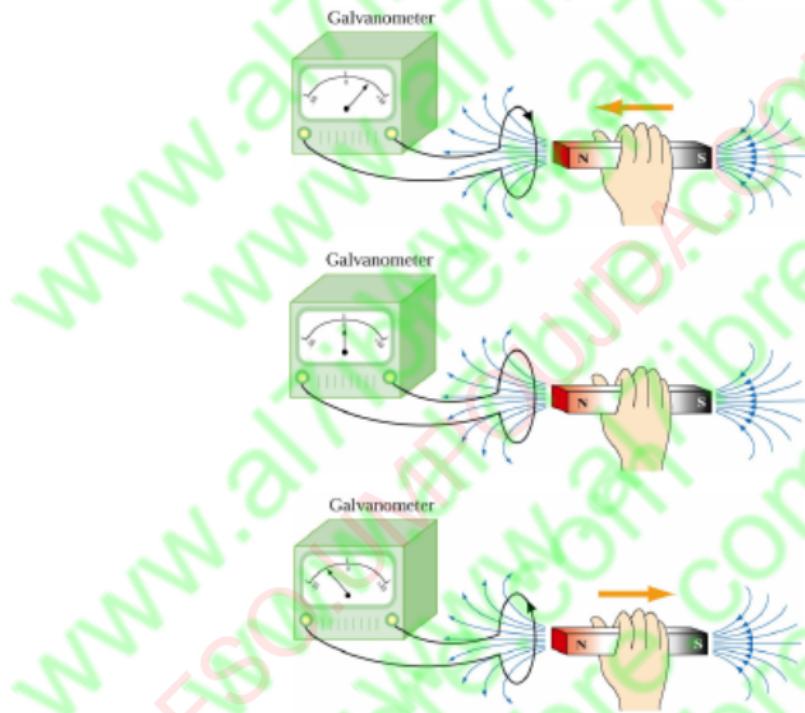


FIGURE : Induction de Neumann : aimant mobile, circuit fixe

Interprétation :

Aucun courant n'est enregistré dans le galvanomètre quand l'aimant droit est stationnaire par rapport à la boucle.

Cependant, un courant est induit dans la boucle quand un mouvement relatif existe entre l'aimant droit et la boucle. Particulièrement le galvanomètre se dévie dans une direction comme l'aimant s'approche de la boucle et dans la direction opposée lorsqu'il s'éloigne. Lorsque l'aimant se déplace, il crée un flux magnétique qui varie suivant la position de l'aimant : la boucle est soumise à un flux variable. Le déplacement de l'aimant modifie dans le temps le champ magnétique et par conséquent le flux Φ traversant le circuit.

2^e expérience : aimant fixe, circuit mobile

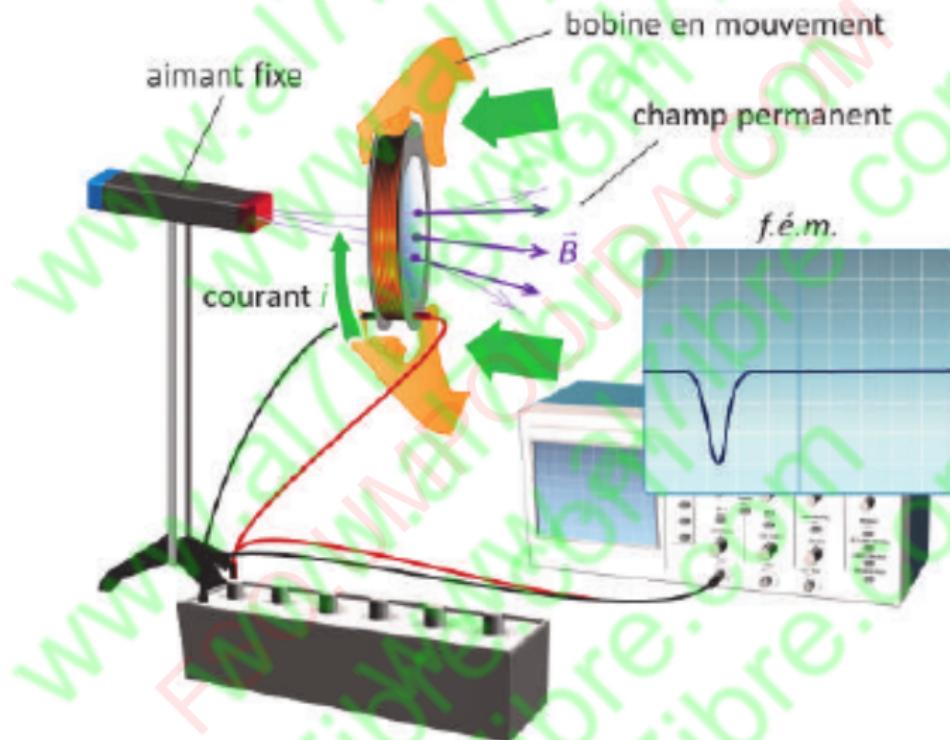


FIGURE : Induction de Lorentz : aimant fixe, circuit mobile

Interprétation :

Une autre cause possible de variation du flux magnétique est le déplacement ou la déformation des circuits dans un champ magnétique (constant) indépendant du temps. L'apparition d'une f.é.m induite est dûe à la force de lorentz sur les électrons contenus dans les circuits,

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Loi de Lenz :

Pour chaque cas, l'expérience montre que le phénomène d'induction s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance.

Les phénomènes d'induction s'opposent par leur(s) effet(s) aux causes qui leur ont donné naissance.

Loi de Faraday

Dans un circuit, c'est la f.é.m. qui permet de mettre en mouvement les charges électriques et d'obtenir un courant électrique. La f.é.m est homogène à une tension, elle s'exprime donc en Volt (V).

Le sens du courant, qui dépend du déplacement de l'aimant, est obtenu en utilisant la loi de Lenz ou la convention de signe f.é.m. relie la force électromotrice e source du courant induit au flux du champ magnétique à travers le circuit dans lequel apparaît ce courant induit :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

avec $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$. Si S est la surface orientée définie par le circuit dans lequel se développe le courant induit, et \vec{n} sont vecteur normal qui oriente le circuit.

Dans cette loi, le signe moins traduit la loi de Lenz.

L'orientation du circuit donne son orientation à la fém et au courant induit.

Loi de Faraday I

De la 1ère expérience :

$e = -\frac{d\Phi}{dt}$. On définit un champ locale induit \vec{E}_i , qui n'est pas un champ électromoteur (absence de force magnétique), qui n'est pas un gradient non plus, et qui est tel que :

$$e = \oint_{\Gamma} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \text{ car } S \text{ est fixe}$$

En utilisant le théorème de Stokes-Ampère dans le premier membre

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{E}_i) \cdot \vec{n} dS = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS$$

Cette égalité devant être valable pour toute surface, indépendamment de sa géométrie et sa position, donc les deux membres des intégrands sont égaux

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{E}_i = \vec{0} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Loi de Faraday II

C'est la relation de Maxwell-Faraday qui traduit le couplage électromagnétique. Le champ \vec{E}_i n'est pas un gradient car son rotationnel est non nul. En exprimant le champ magnétique en fonction du potentiel vecteur, $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$, on a :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = - \oint_{\Gamma} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}$$

et par conséquent :

$$\oint_{\Gamma} \left(\vec{E}_i + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{l} = 0$$

$\vec{E}_i = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ constitue l'expression de Neumann du champ induit.

Loi de Faraday III

Dans la situation la plus générale où un champ électrostatique est également appliqué, le champ électrique résultant s'écrit :

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_i = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Loi de Faraday I

De la 2ème expérience :

Lorsque la bobine est mise en mouvement à la vitesse \vec{v} , la composante de la force \vec{F} le long de la bobine est susceptible de faire circuler les électrons (les mettre en mouvement) avec la même vitesse \vec{v} , donnant lieu à un courant induit. L'énergie potentielle (travail élémentaire) reçue par les électrons sur un élément de la bobine $d\vec{l}$ est

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

L'énergie totale qui leur permet de faire un tour de circuit est obtenue en intégrant sur tout le contour C de la bobine. Elle est égale à la circulation de \vec{F} le long du circuit (bobine)

$$W = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \oint_{\Gamma} (\vec{v} \wedge \vec{B}) d\vec{l} = qe$$

Loi de Faraday II

La f.e.m. e correspond à la circulation du champ électromoteur de Lorentz (qui n'est pas un gradient)

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

sur le circuit Γ étudié selon la formule

$$e = \oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

L'existence de courants induits est liée au caractère non conservatif de la circulation du champ électromoteur : ils existent si et seulement si la fem totale d'une maille est non nulle.

Auto-induction : Inductance propre I

Un circuit filiforme orienté Γ parcouru par un courant variable d'intensité $i(t)$ crée un champ magnétique propre $\vec{B}_p(M, t)$. Le flux de ce champ à travers le circuit Γ lui-même est le flux propre :

$$\Phi_p(t) = \iint_{M \in \Sigma} \vec{B}_p(M, t) \cdot d\vec{S}_M$$

où Σ est une surface orientée s'appuyant sur Γ . On définit l'inductance propre (ou la self-inductance) L du circuit par

$$\Phi_p(t) = Li(t)$$

- ▶ L'inductance propre s'exprime en henry (H). On a $L > 0$.
- ▶ L'inductance propre ne dépend que de la géométrie du circuit et de la perméabilité du milieu (μ_0 pour le vide et les milieux non magnétiques).

Auto-induction : Inductance propre II

Inducteur

On appelle inducteur un élément de circuit ayant une auto-inductance non négligeable ; il s'agit en général d'une bobine. Dans un schéma, l'inducteur se représente par le symbole : 

Phénomène d'auto-induction I

Une intensité $i(t)$ variable entraîne l'apparition d'une f.é.m. induite, appelée f.é.m. d'auto-induction, donnée par la loi de Faraday, soit dans un circuit fixe et rigide :

$$e_p = -\frac{d\phi_p}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

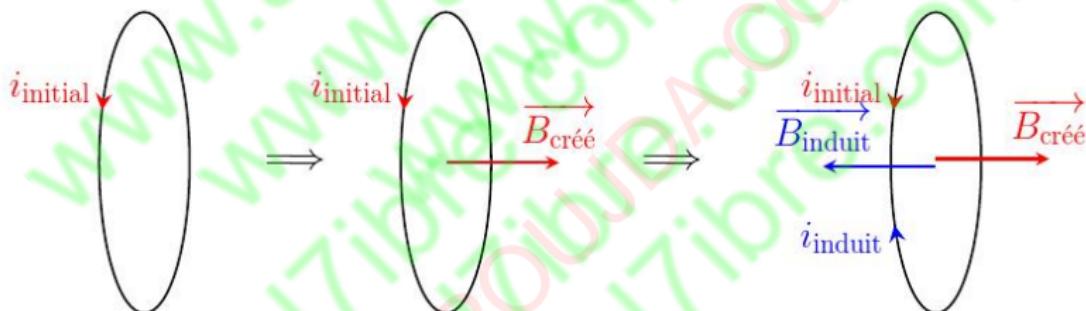
Ainsi, l'effet d'auto-induction est tout à fait conforme à la loi de Lenz : le circuit parcouru par le courant initial $i_{\text{initial}}(t) = i(t)$ créé un champ magnétique qui créé un courant induit dans ce même circuit.

D'après la loi de Lenz, ce courant induit s'oppose à la cause qui lui a donné naissance : ce courant induit est dans le sens inverse du courant initial qui s'établit dans le circuit :

- si $i_{\text{initial}}(t)$ augmente, $e_p < 0$, le courant induit a le sens contraire de $i(t)$,

Phénomène d'auto-induction II

- si $i_{\text{initial}}(t)$ diminue, $e_p > 0$, le courant induit a le même sens que $i(t)$,



N'oublions pas que le courant induit n'existe que lorsqu'il y a variation du champ magnétique. En régime permanent, ce courant n'existe plus mais en régime variable, il va "freiner" l'établissement du courant dans le circuit.

Phénomène d'auto-induction III

- Le phénomène d'auto-induction est important quand les fréquences sont élevées, ou quand le circuit comporte un grand nombre de **spires**. On le néglige dans le cas d'un simple circuit alimenté par un générateur de basses fréquences (GBF).

Vidéo : retard à l'allumage du à l'auto-induction dans une bobine

Inductance mutuelle

Deux circuits filiformes (C_1) et (C_2) sont parcourus par des courants d'intensités I_1 et I_2 .

Le champ magnétique \vec{B}_2 créé par (C_2), donné par la loi de Biot et Savart, est proportionnel à I_2 .

Le flux $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ de \vec{B}_2 à travers le contour fermé (C_1) orienté par le sens positif du courant I_1 est proportionnel à I_2 :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{2 \rightarrow 1} I_2 \quad \text{et de même :} \quad \Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{1 \rightarrow 2} I_1$$

$M_{2 \rightarrow 1}$ et $M_{1 \rightarrow 2}$ constituent les coefficients d'induction mutuelle des deux circuits.

- ▶ $M_{2 \rightarrow 1}$ et $M_{1 \rightarrow 2}$ sont symétriques : $M_{2 \rightarrow 1} = M_{1 \rightarrow 2} = M$
- ▶ $M_{2 \rightarrow 1}$ et $M_{1 \rightarrow 2}$ ne sont pas nécessairement positifs comme les inductances propres L_1 et L_2 .
- ▶ $M_{2 \rightarrow 1}$ et $M_{1 \rightarrow 2}$ sont des termes qui dépendent de la géométrie des circuits (C_1) et (C_2).

Couplage entre les deux circuits

On considère deux circuits filiformes (C_1) et (C_2) en couplage mutuel. En désignant par Φ_1 et Φ_2 les flux totaux traversant respectivement les circuits (C_1) et (C_2) tenant compte de leurs flux propres ; on a, en l'absence d'autres sources de champs magnétiques :

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2$$

$$\Phi_2 = M I_1 + L_2 I_2$$

Couplage entre les deux circuits

Lorsqu'un élément de circuit d'inductance L est parcouru par un courant variable $i(t)$, il reçoit de l'énergie à un taux :

$$P = ei = -Li \frac{di}{dt}$$

Pour calculer le travail requis pour faire croître le courant dans un inducteur de zéro à i , on calcule le travail infinitésimal effectué pendant un temps dt , pour faire passer le courant de i à $i + di$:

$$dW = Pdt = Li di$$

Pour trouver le travail total, on intègre l'expression ci-dessus de zéro à la valeur finale du courant :

$$W = \int dW = \int_0^i Li' di' = \frac{1}{2}Li^2$$

Ce travail correspond à l'énergie U emmagasinée à l'intérieur de l'inducteur transportant un courant i , en posant $U = 0$, lorsque $i = 0$:

$$U = \frac{1}{2}Li^2$$

Équations de Maxwell dans le vide

En régime permanent :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \vec{E} \text{ est à circulation conservative,}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \iint_C \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \vec{B} \text{ est à flux conservatif,}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Leftrightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \text{théorème d'Ampère,}$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \text{théorème de Gauss}$$

Champ électromagnétique en régime variable

Généralisation des équations locales au régime variable :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Equation de Maxwell-Faraday,}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{Equation de flux magnétique se généralise au régime variable}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{Equation de Maxwell-Ampère}$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Equation de Maxwell-Gauss se généralise au régime variable}$$

Ainsi, en **régime non permanent**, les sources du champ magnétique sont de deux natures : les courants « réels » et le courant de déplacement j_D qui provient de la dépendance temporelle du champ électrique.

Cours d'électrocinétique

Régime sinusoïdal

F. Ouchni

Introduction

Dans cette première partie du chapitre d'électrocinétique, Nous allons définir les grandeurs électriques en régime variable (les tension et intensité varient au cours du temps), on introduira la notation complexe qui est un outil d'aide à la résolution des équations. Il sera alors temps de parler des résonances du circuit RLC.

Les réseaux linéaires : Définitions

- ▶ Dipôle

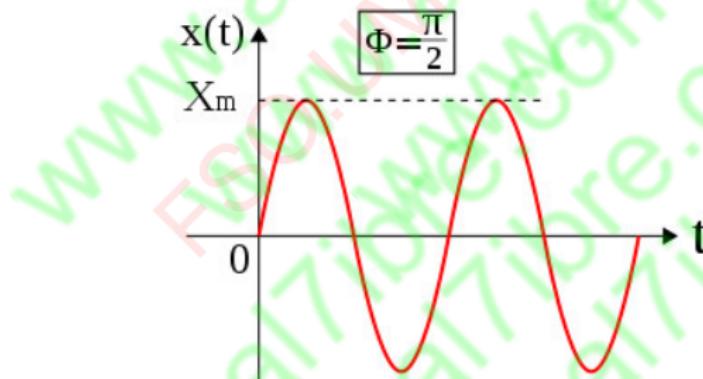
Nous appelons dipôle un élément électrique capable ou non de fournir de l'énergie, communiquant avec l'extérieur seulement par deux bornes. À tout instant, le courant entrant par une borne est égal au courant sortant par l'autre. La résistance R , le condensateur, et la bobine sont des exemples de dipôles.

- ▶ Nœud

Grandeurs électriques en régimes sinusoïdaux

Écriture mathématique et caractéristiques d'une grandeur sinusoïdale

Les circuits que nous allons étudier seront soumis à une tension sinusoïdale. Graphiquement, on peut dessiner cette fonction ainsi.



Écriture mathématique et caractéristiques d'une grandeur sinusoïdale

Comment écrit-on mathématiquement ce type de signal ?

Il a la forme suivante :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi) \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_m : \text{amplitude du signal} ; \\ \omega : \text{pulsation en rad.s}^{-1} ; \\ \phi : \text{phase à l'origine des dates en rad.} \end{array} \right.$$

En effet, sur la figure, le signal vérifie $x(t = 0) = 0$ et on a nécessairement $\phi = \frac{\pi}{2}$.

On peut de la même façon utiliser une fonction sinus pour décrire un signal sinusoïdal.

Si on écrit $x(t) = X_m \sin(\omega t + \phi)$ alors pour la figure, $\phi = 0$.

Notation complexe d'un signal périodique

Rappels mathématiques

- Un nombre complexe écrit dans sa forme cartésienne a pour expression :

$$z = a + jb \quad (2)$$

Avec a la partie réelle et b la partie imaginaire, et j le nombre complexe vérifiant $j^2 = -1$.

- Le module de z noté $|z|$ a pour expression : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Son argument θ est défini par : $\cos \theta = \frac{a}{|z|}$ et $\sin \theta = \frac{b}{|z|}$
- Un nombre complexe écrit sous sa forme polaire a pour expression :

$$z = r(\cos \theta + j \sin \theta) = re^{j\theta} \quad (3)$$

avec $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ son module et θ son argument.

Définitions I

Soit un signal sinusoïdal d'expression mathématique

$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$, on lui associe une grandeur complexe :

$$\bar{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \phi)} = X_m e^{j\omega t} e^{j\phi} \quad (4)$$

On pourra également définir une amplitude complexe :

$$\bar{X} = X_m e^{j\phi} \quad \text{donc} \quad \bar{x}(t) = \bar{X} e^{j\omega t} \quad (5)$$

On travaillera donc en notation complexe mais il sera facile de revenir au signal réel :

- Retour au signal réel complet grâce à la partie réelle du complexe

$$x(t) = \operatorname{Re}(\bar{x}(t)) \quad (6)$$

Définitions II

- Retour à l'amplitude du signal réel grâce au module de l'amplitude complexe ou du signal complexe :

$$X_m = |\bar{X}| = |\bar{x}(t)| \quad (7)$$

- Retour à la phase initiale grâce à l'argument de l'amplitude complexe :

$$\phi = \text{Arg}(\bar{X}) \quad (8)$$

Ainsi, toutes les informations dont nous avons besoin pour reconstituer le signal réel sont contenues dans l'amplitude complexe.

Quelques impédances élémentaires I

► Résistance

C'est le seul cas pour lequel la loi d'Ohm est vérifiée en valeur instantanée. On peut écrire en effet $u(t) = R i(t)$, soit : $V_0 = RI_0$. L'impédance est donc égale à R , elle est réelle : une résistance n'introduit pas de déphasage entre tension et courant.

► Capacité

L'intensité $i(t)$ qui traverse un condensateur C , la tension $u(t)$ à ses bornes et la charge $q(t)$ qu'il porte sont liées par les relations : $q = Cu$ et $i = \frac{dq}{dt}$, soit $i = C \frac{du}{dt}$.

Si la tension s'écrit $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$, on obtient alors $i(t) = -CwU_0 \sin(\omega t) = +CwU_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$.

En notation complexe, ceci s'écrit

$$\bar{i} = C \frac{d\bar{u}}{dt} = C(j\omega)\bar{u}, \text{ soit } \bar{u} = \frac{1}{jC\omega}\bar{i} = \bar{Z}\bar{i}$$

Quelques impédances élémentaires II

$$Z = \frac{1}{Cw} \exp(-j\pi/2) = \frac{-j}{Cw} = \frac{1}{jCw}.$$

On en déduit donc la relation entre les amplitudes du courant et de la tension : $I_0 = CwU_0$. De plus, l'argument de Z est $-\frac{\pi}{2}$, donc la tension $u(t)$ est en retard sur le courant $i(t)$. On peut aussi écrire :

$\phi_U - \phi_I = -\frac{\pi}{2}$, avec ici : $\phi = 0$, ce qui redonne $\phi_I = \frac{\pi}{2}$: dans un condensateur, le courant est en quadrature avance sur la tension à ses bornes.

- ▶ Inductance

Quelques impédances élémentaires III

Pour une bobine, la relation entre $u(t)$ et $i(t)$ s'écrit :

$$u = L \frac{di}{dt}$$

En notation complexe $\bar{u} = \overline{U_m} \exp(j\omega t)$ et $\bar{i} = \overline{I_m} \exp(j\omega t)$. Donc :

$$\bar{u} = L \frac{d\bar{i}}{dt} = L(j\omega) \bar{i}$$

$$\bar{u} = jL\omega \bar{i} = \bar{Z} \bar{i} \quad \text{loi d'ohm complexe pour la bobine}$$

L'impédance de la bobine est

$$\bar{Z} = jL\omega$$

On en déduit donc la relation entre les amplitudes du courant et de la tension : $U_0 = L\omega I_0$. De plus, l'argument de Z est $\frac{\pi}{2}$, donc la tension

Quelques impédances élémentaires IV

$u(t)$ est en avance sur le courant $i(t)$. On peut aussi écrire :

$\phi_U - \phi_I = \frac{\pi}{2}$, avec ici : $\phi_U = 0$, ce qui redonne $\phi_I = \frac{-\pi}{2}$: dans une bobine, le courant est en retard de $\pi/2$ sur la tension à ses bornes.

Conclusion : Pour un dipôle linéaire, il est toujours possible d'écrire (en notation complexes) :

$$\bar{u} = \bar{Z}\bar{i}$$

; ou également, après simplification par :

$$\bar{U}_m = \bar{Z}\bar{I}_m$$

qui est la loi d'ohm complexe.

- ▶ Pour une bobine : $\bar{Z} = jL\omega$;
- ▶ Pour une condensateur : $\bar{Z} = 1/jC\omega$;
- ▶ Pour une résistance : $\bar{Z} = R$.

Régime sinusoïdal permanent

TABLE : Régime sinusoïdal permanent

Symbol	Nom	Unité
$u = u(t)$	valeur instantanée de la tension	volt (V)
$U_{\max} = U$	valeur maximale de la tension	volt (V)
$U_{\text{moy}} = 0$	valeur moyenne de la tension	volt (V)
$U_{\text{eff}} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$	valeur efficace de la tension	volt (V)
t	temps	secondes (s)
$\omega t + \phi_u$	phase de u à l'instant t	radian (rad)
ϕ_u	phase initiale (à $t = 0$) de u	radian (rad)
T (avec $\omega T = 2\pi$)	période	seconde (s)
$f = \frac{1}{T}$	fréquence	hertz (Hz)
$\omega = 2\pi f$	pulsation	radian par seconde (rad/s)

Représentation de Fresnel

Objectifs :

Construire et exploiter une représentation vectorielle de tensions et de courants d'un circuit électrique linéaire en régime sinusoïdal permanent.

TABLE : Transposition vectorielle

Grandeur sinusoïdale	Vecteur associé
Valeur instantanée : $u = u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \phi_u)$	Vecteur : \vec{U}
Valeur efficace : $U = U_{\text{eff}}$	Norme : $ \vec{U} $
Phase initiale (à $t = 0$) : ϕ_u	Angle polaire : ϕ_u

Loi d'Ohm transposée au calcul vectoriel

$\vec{U} = [U; \phi_u]$ est le vecteur associé à la tension sinusoïdale u , $\vec{I} = [I; \phi_i]$ le vecteur associé au courant sinusoïdal i , Z l'impédance en ohms du dipôle.

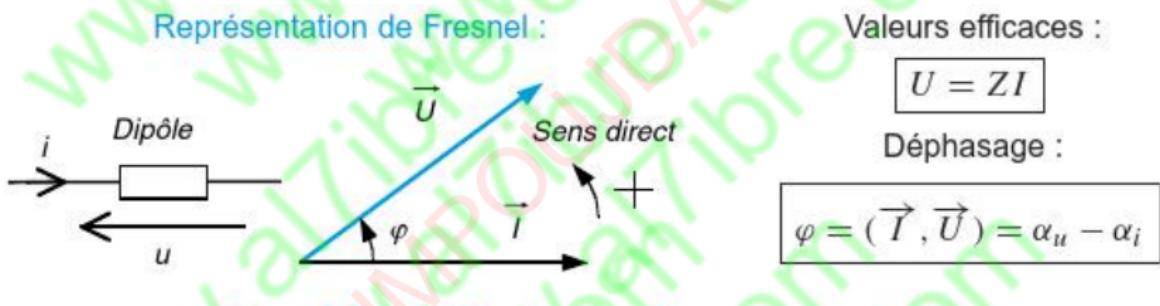
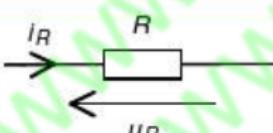
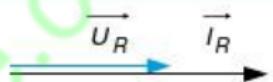
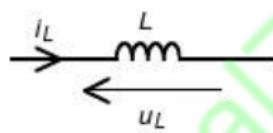
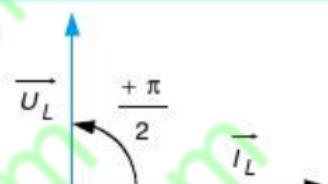
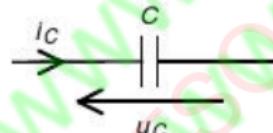
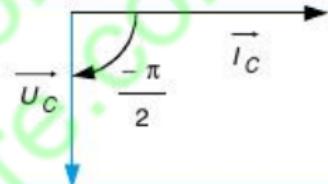


FIGURE : Loi d'Ohm transposée au calcul vectoriel

Dipôles linéaires élémentaires

	Impédance Ω Déphasage (rad)	Représentation de Fresnel
Résistance	$\begin{cases} Z_R = \frac{U_R}{I_R} = R \\ \varphi_R = (\overrightarrow{I_R}, \overrightarrow{U_R}) = 0 \end{cases}$ 	
Inductance	$\begin{cases} Z_L = \frac{U_L}{I_L} = L\omega \\ \varphi_L = (\overrightarrow{I_L}, \overrightarrow{U_L}) = \frac{+\pi}{2} \text{ rad} \end{cases}$ 	
Capacité	$\begin{cases} Z_C = \frac{U_C}{I_C} = \frac{1}{C\omega} \\ \varphi_C = (\overrightarrow{I_C}, \overrightarrow{U_C}) = \frac{-\pi}{2} \text{ rad} \end{cases}$ 	

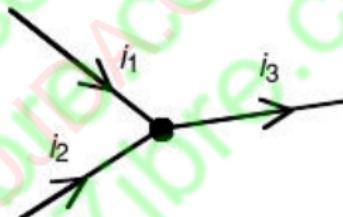
Lois des nœuds et des mailles

Elles restent valables à condition de les transposer au calcul vectoriel.

Loi des nœuds (deux formulations)

- ▶ La somme des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme des courants qui en partent.

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 = \vec{I}_3.$$



- ▶ La somme algébrique des courants aboutissant à un nœud est nulle.

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 - \vec{I}_3 = \vec{0}.$$

Lois des nœuds et des mailles

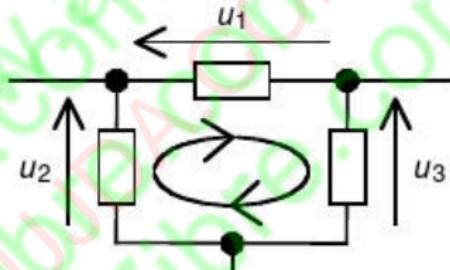
Loi des mailles (deux formulations)

- ▶ La somme des tensions dans le sens de parcours de la maille est égale à la somme des tensions en sens inverse.

$$\vec{U}_2 = \vec{U}_1 + \vec{U}_3.$$

- ▶ La somme algébrique des tensions dans le sens de.

$$\vec{U}_2 - \vec{U}_1 - \vec{U}_3 = \vec{0}.$$



Notation complexe : loi d'Ohm

Objectifs :

Objectifs : Étudier, par les nombres complexes, les tensions et courants d'un circuit électrique linéaire en régime sinusoïdal permanent.

TABLE : Transposition complexe :

Grandeur sinusoïdale	Nombre complexe associé
Valeur instantanée : $u = u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \phi_u)$	$\leftrightarrow \bar{U} = [U; \phi_u] = U e^{j\phi_u}$
Valeur efficace : $U = U_{\text{eff}}$	\leftrightarrow Module : $ \bar{U} = U$
Phase initiale (à $t = 0$) : ϕ_u	\leftrightarrow Argument : $\text{Arg}(\bar{U}) = \phi_u$

Loi d'Ohm généralisée

$\bar{U} = [U; \phi_u]$ est le nombre complexe associé à la tension sinusoïdale u ,
 $\bar{I} = [I; \phi_i]$ le nombre complexe associé au courant sinusoïdal i , \bar{Z} l'impédance complexe du dipôle et \bar{Y} son admittance complexe.



FIGURE : Loi d'Ohm généralisée

Interprétation géométrique de la loi d'Ohm généralisée

$$\bar{U} = \bar{Z} \times \bar{I} \Leftrightarrow \begin{cases} U = ZI \text{ (valeurs efficaces)} \\ \text{Arg}(\bar{U}) = \text{Arg}(\bar{Z}) + \text{Arg}(\bar{I}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} U = ZI \text{ (valeurs efficaces)} \\ \phi_u = \phi + \phi_i \text{ (modulo } 2\pi) \end{cases}$$

Loi d'Ohm généralisée

- ▶ L'impédance complexe peut s'écrire :

$$Z = [Z; \phi] = Ze^{j\phi} = R + jX = Z \cos \phi + jZ \sin \phi \text{ où}$$

$$Z = |\bar{Z}| = U/I \text{ est l'impédance.}$$

$\text{Arg}(Z) = \phi = \phi_u - \phi_i$ (modulo 2π) le déphasage entre u et i , u en avance de phase par rapport à i si ϕ positif.

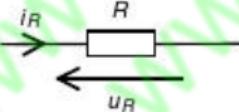
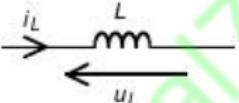
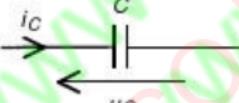
$R = \text{Re}(Z) = Z \cos \phi$ la résistance, et $X = \text{Im}(Z) = Z \sin \phi$ la réactance. Z , R et X s'expriment en ohms (Ω).

- ▶ L'admittance complexe peut s'écrire :

$$\bar{Y} = [Y; -\phi] = G + jB = Y \cos \phi - jY \sin \phi \text{ où}$$

$Y = |\bar{Y}| = 1/Z = 1/U$ est l'admittance, $G = \text{Re}(\bar{Y})$ la conductance, et $B = \text{Im}(\bar{Y})$ la susceptance. Y , G et B s'expriment en siemens (S) ou ohms $^{-1}$

Dipôles linéaires élémentaires

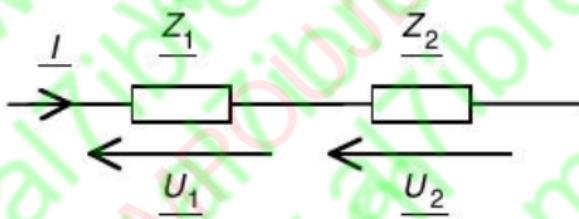
		Impédance complexe	Impédance (Ω) Déphasage (rad)	Résistance (Ω) Réactance (Ω)
Résistance		$Z_R = R$	$\begin{cases} Z_R = R \\ \varphi_R = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} R_R = R \\ X_R = 0 \end{cases}$
Inductance		$Z_L = jL\omega$ $= L\omega \times e^{+j\pi/2}$	$\begin{cases} Z_L = L\omega \\ \varphi_L = \frac{+\pi}{2} \text{ rad} \end{cases}$	$\begin{cases} R_L = 0 \\ X_L = L\omega \end{cases}$
Capacité		$Z_C = \frac{1}{jC\omega}$ $= \frac{1}{C\omega} \times e^{-j\pi/2}$	$\begin{cases} Z_C = \frac{1}{C\omega} \\ \varphi_C = \frac{-\pi}{2} \text{ rad} \end{cases}$	$\begin{cases} R_C = 0 \\ X_C = \frac{-1}{C\omega} \end{cases}$

Association d'impédances en série

Deux dipôles sont en série s'ils sont traversés par le même courant

$$\bar{U}_{\text{tot}} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2 = \bar{Z}_{\text{eq}} \bar{I}$$

avec $\bar{Z}_{\text{eq}} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$

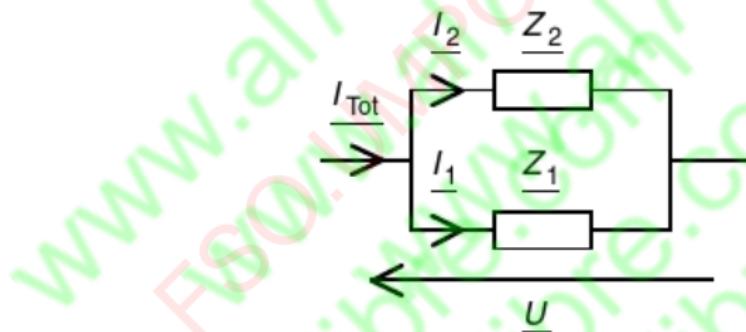


Association d'impédances en parallèle

Deux dipôles sont en parallèle s'ils ont leurs bornes communes

$$\bar{I}_{\text{tot}} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{Y}_{\text{eq}} \bar{U} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_{\text{eq}}}$$

avec $\bar{Y}_{\text{eq}} = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2$ ou $\bar{Z}_{\text{eq}} = \frac{\bar{Z}_1 \times \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}$

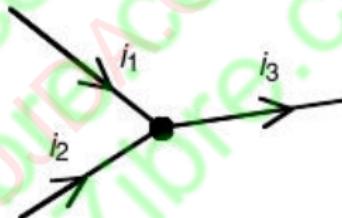


Lois des nœuds et des mailles

Elles restent valables à condition de les transposer au calcul complexe. .

Loi des nœuds (deux formulations)

- ▶ La somme des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme des courants qui en partent.



$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{I}_3.$$

- ▶ La somme algébrique des courants aboutissant à un nœud est nulle.

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 - \bar{I}_3 = 0.$$

Lois des nœuds et des mailles

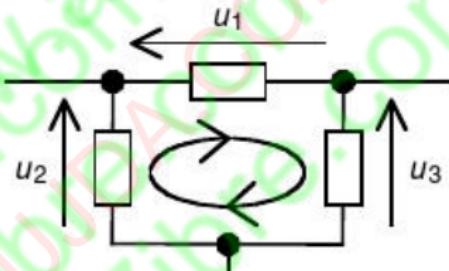
Loi des mailles (deux formulations)

- ▶ La somme des tensions dans le sens de parcours de la maille est égale à la somme des tensions en sens inverse. .

$$\bar{U}_2 = \bar{I}_1 + \bar{I}_3.$$

- ▶ La somme algébrique des tensions dans le sens de.

$$\bar{U}_2 - \bar{U}_1 - \bar{U}_3 = 0.$$



Règle de transposition d'une somme

La somme de deux grandeurs sinusoïdales de même nature (tensions ou courants) et de même fréquence f est une sinusoïde de fréquence f ; le module et la phase de cette somme sont donnés par la somme complexe associée.

Somme de deux grandeurs sinusoïdales	↔	Somme complexe associée
$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$		$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$

Attention, les valeurs efficaces ne s'ajoutent pas en général :

$$U \neq U_1 + U_2.$$

Passage de l'équation différentielle à la notation complexe

On passe de l'équation différentielle à la notation complexe en remplaçant $u(t)$ par \bar{U} , d/dt par $j\omega$ et plus généralement d^k/dt^k par $(j\omega)^k$.

Dérivation et intégration

TABLE : Transposition complexe

Grandeur sinusoïdale	Nombre complexe associé
Valeur instantanée :	
$u = u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_u)$	$\leftrightarrow \bar{U} = U; \phi_u = U e^{j\phi_u}$
$\frac{du}{dt} = -\omega U\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_u)$	$\leftrightarrow j\omega \bar{U} = \omega U e^{j(\phi_u + \pi/2)}$
$\int u dt = U\sqrt{2}/\omega \sin(\omega t + \phi_u)$	$\leftrightarrow \frac{U}{j\omega} = \frac{U}{\omega} e^{j(\phi_u - \pi/2)}$

Dipôles élémentaires

- ▶ Résistance

$$u_R = R i_R \leftrightarrow \bar{U}_R = R \times \bar{I}_R \Rightarrow \bar{Z}_R = R = [R; 0].$$

- ▶ Capacité

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \leftrightarrow \bar{I}_C = C \times j\omega \bar{U}_C \Rightarrow \bar{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = \left[\frac{1}{C\omega}; -90^\circ \right].$$

- ▶ Inductance

$$u_L = L \frac{di}{dt} \leftrightarrow \bar{U}_L = L \times j\omega \bar{I}_L \Rightarrow \bar{Z}_L = jL\omega = [L\omega; +90^\circ]$$

Intérêt de la notation complexe : étude du circuit RC en régime sinusoïdal

Étude du dipôle RC : Loi des mailles

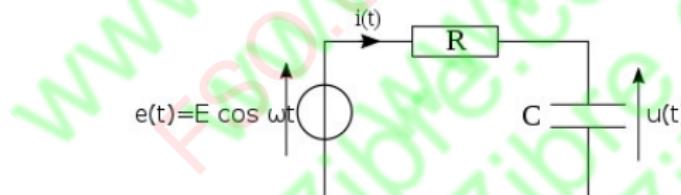
On étudie le dipôle RC en régime sinusoïdal : un générateur impose aux bornes de ce dipôle la tension $e(t) = E \cos(\omega t + \phi)$. Appliquons la loi des mailles :

$$u(t) + R i(t) = e(t) \quad (9)$$

Puis utilisons la notation complexe :

$$\bar{u}(t) + R \bar{i}(t) = \bar{e}(t) \quad (10)$$

$$\iff \boxed{\bar{u}(t) + R \bar{i}(t) = E e^{j(\omega t)}} \quad (11)$$



Intérêt de la notation complexe : étude du circuit RC en régime sinusoïdal

Étude du dipôle RC : Loi des mailles

Or $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$ donc $\bar{i}(t) = C \frac{d\bar{u}(t)}{dt} = jC\omega\bar{u}(t)$ (la relation entre $\bar{i}(t)$ et $\bar{u}(t)$ est linéaire).

L'équation (11) devient :

$$\bar{u}(t) + jRC\omega\bar{u}(t) = Ee^{j(\omega t)} \quad (12)$$

$$\iff \boxed{\bar{u}(t) = \frac{Ee^{j(\omega t)}}{1 + jRC\omega}} \quad (13)$$

Notation complexe : théorèmes

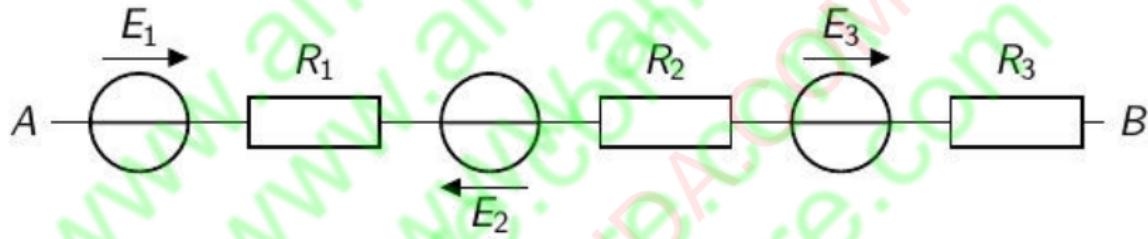
Théorème de Thévenin

On peut remplacer tout circuit linéaire, qui alimente par les bornes A et B un dipôle D, par un générateur de tension idéal en série avec une résistance R_{Th} . La fem E_{Th} du générateur est égale à la ddp mesurée entre A et B quand le dipôle D est débranché. La résistance R_{Th} est égale à la résistance mesurée entre A et B quand le dipôle D est débranché et que les générateurs sont remplacés par leurs résistances internes.

Le théorème de Thévenin est à privilégier lorsqu'on s'intéresse à des dipôles en série.

Théorème de Thévenin : exemple d'application I

Déterminer l'équivalent de Thévenin du « dipôle » AB :



1^{re} étape : Lorsque le dipôle AB est débranché, à vide, le courant est nul : $I = 0$. La force électromotrice totale aux bornes du dipôle vaut alors :

$$E_{Th} = E_1 - E_2 + E_3$$

Théorème de Thévenin : exemple d'application II

2^e étape : Lorsque les générateurs E_1, E_2 et E_3 sont remplacés par leurs résistances internes (qui sont nulles pour des générateurs de tension idéaux), on obtient le graphe suivant :

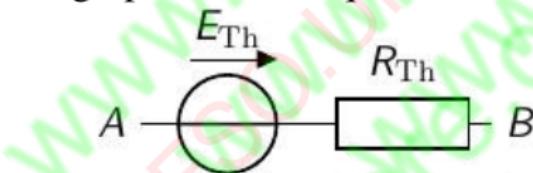


La résistance équivalente de ces résistances placées en parallèle vaut

$$R_{Th} = R_1 + R_2 + R_3.$$

Bilan

Le graphe AB est équivalent au dipôle de Thévenin suivant :



Avec $R_{Th} = R_1 + R_2 + R_3$ et $E_{Th} = E_1 - E_2 + E_3$.

Puissance et énergie en régime sinusoïdal

Objectifs :

Calculer et mesurer la puissance absorbée par un circuit électrique linéaire en régime sinusoïdal permanent

Soit un dipôle passif, constitué par un ou plusieurs éléments simples. Ce dipôle est traversé par un courant sinusoïdal $i(t)$. Nous trouvons à ses bornes une tension sinusoïdale $u(t)$. Nous pouvons définir plusieurs types de puissances :

- ▶ La puissance instantanée

La puissance instantanée consommée par un dipôle est définie comme le produit de la tension $u(t)$ qui apparaît aux bornes du dipôle par l'intensité du courant $i(t)$ qui le parcourt. Elle s'exprime en watt (W) : $p(t) = u(t).i(t)$

Puissance et énergie en régime sinusoïdal I

Nous distinguons deux cas selon le signe de $p(t)$:

- ▶ $p(t)$ est positif, l'énergie est fournie aux dipôles, le dipôle joue le rôle d'un récepteur ;
- ▶ $p(t)$ est négatif, le dipôle renvoie de l'énergie, le dipôle joue le rôle d'un générateur.

En régime sinusoïdal permanent, $u(t)$ et $i(t)$ se mettent sous la forme :

$$i(t) = I_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi_1) \text{ et } u(t) = U_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi_2) \text{ d'où}$$

$$p(t) = U_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi_2) \cdot I_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi_1)$$

soit en utilisant la relation trigonométrique classique suivante

$$\cos(p) \cdot \cos(q) = 0,5 [\cos(p - q) + \cos(p + q)]$$

Nous trouvons l'expression de la puissance instantanée :

un terme constant qui représente la valeur moyenne de la puissance :

$$U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos(\phi_2) = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos(\Delta\phi) = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos(\phi)$$

Puissance et énergie en régime sinusoïdal II

et un terme sinusoïdal : $U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos(2\omega t + \Delta\phi)$. La pulsation de l'expression de la puissance instantanée est deux fois la pulsation du signal sinusoïdal (2ω au lieu de ω). Si le terme constant est nul, la puissance est donc alternativement positive et négative durant une demi-période du signal courant ou du signal tension.

Puissance active

Dans le cas général, la puissance moyenne ou puissance active s'exprime par la relation :

$$P_{\text{moyenne}} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\phi)$$

$\cos(\phi)$, qui représente le rapport de P_{moyenne} sur le produit $U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ s'appelle facteur de puissance. Sa valeur est comprise entre 0 et 1.

Puissance complexe

Puissance complexe

La puissance est le produit de la tension par le courant. Ce n'est pas une grandeur linéaire. Il faut manipuler la notation complexe avec précaution : $P(t) = u(t).i(t)$ ne s'identifie pas à $Re [\bar{u}(t).\bar{i}(t)]$

Notons que nous avons : $\bar{u}(t).\bar{i}^*(t) = u_m i_m e^{-j\phi}$

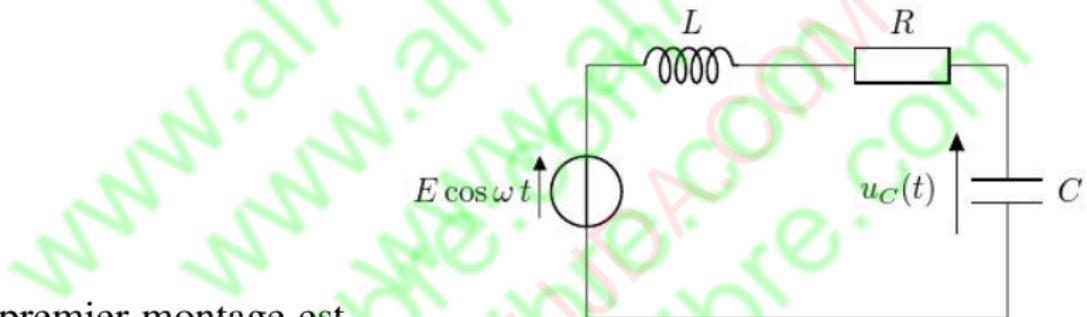
où ϕ est le déphasage entre la tension et l'intensité

Puissance complexe

La puissance moyenne absorbée par un dipôle en régime sinusoïdal est, en convention récepteur :

$$\frac{1}{2}Re [\bar{u}(t).\bar{i}(t)]$$

Résonance du circuit RLC série



Le premier montage est celui où l'on enregistre la tension aux bornes du condensateur.

Dans celui-ci, on étudie la charge q du condensateur ($u_C = \frac{q}{c}$).

FIGURE : M est repéré par ces coordonnées cylindriques.

Etude de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur

Équation différentielle, régime transitoire, régime permanent

Si l'on étudie classiquement le circuit de la figure ??, on établit l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ à l'aide de la loi des mailles ; on obtient :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = E \cos \omega t$$

La solution de cette équation différentielle est la somme de la solution de l'équation homogène (équation différentielle avec second membre nul) et d'une solution particulière.

On rappelle que :

- ▶ La **solution de l'équation homogène** correspond au **régime transitoire** ;
- ▶ La **solution particulière** correspond au **régime permanent**.

Etude de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur

On ne s'intéressera qu'à la solution particulière (régime forcé).

Solution particulière et notation complexe

Pour exprimer cette solution, on utilise le diviseur de tension en notation complexe sur la figure. On a ainsi :

$$\bar{u}_C(t) = \frac{\bar{Z}_C}{\bar{Z}_C + \bar{Z}_L + \bar{Z}_R} \bar{e}(t) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R} \bar{e}(t) = \frac{\bar{e}(t)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Toutes les informations pour caractériser le signal réel sont contenues dans l'amplitude complexe définie par :

$$\bar{U}_C = \frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Intéressons-nous à l'amplitude du signal réel et à son déphasage (déphasage de $u_C(t)$ par rapport à $e(t)$) :

Amplitude

L'amplitude de $u_C(t)$ est donnée par le module de l'amplitude complexe :

$$U_C = \frac{E}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}}$$

On peut introduire dans cette expression les variables réduites, soit

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre du circuit, on définit une grandeur sans dimension $x = \frac{\omega}{\omega_0}$; on utilise également le facteur de qualité :

$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$. Ce qui donne :

$$U_C = \frac{E}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

Déphasage

Pour obtenir ϕ , on prend l'argument de \bar{U}_C . Celui-ci vaut :

$$\begin{aligned}\phi &= \text{Arg}(\bar{U}_C) = \text{Arg} \left(\frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \right) \\ &= \text{Arg}(E) - \text{Arg}(1 - LC\omega^2 + jRC\omega) \\ &= -\text{Arg}(1 - LC\omega^2 + jRC\omega)\end{aligned}$$

On modifie l'équation ci-dessus de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\phi &= -\text{Arg}(1 - LC\omega^2 + jRC\omega) \\ &= -\text{Arg}(j(RC\omega - j(1 - LC\omega^2))) \\ &= -\text{Arg}(j) - \text{Arg}(j(RC\omega - j(1 - LC\omega^2))) \\ &= -\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{-(1 - LC\omega^2)}{RC\omega} \right) \\ \iff \phi &= -\frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{(1 - LC\omega^2)}{RC\omega} \right)\end{aligned}$$

En effet avec cette astuce et sachant que

$\text{Arg}(z \times z') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')$, on fait apparaître l'argument d'un nombre complexe dont la partie réelle est positive, donc le cosinus de l'argument de ce complexe est positif et on peut écrire $\phi' = \arctan()$.

On peut alors introduire les variables réduites :

$$\boxed{\phi = -\frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{1-x^2}{\frac{x}{Q}} \right)}$$

Étude du phénomène de résonance

Cette étude consiste à tracer, en fonction de la pulsation d'excitation ω (ou de la fréquence) ou en fonction de notre variable réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, le comportement de l'amplitude du signal $u_C(t)$ et de son déphasage par rapport à $e(t)$.

Étude de l'amplitude

Rappelons l'expression de celle-ci : $U_C = \frac{E}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$

Si on veut connaître le sens de variation de U_C , on peut se référer à celui de

$$f(x) = (1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2.$$

Comme $U_C = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ et que la fonction $\sqrt{}$ est croissante, U_C varie de manière inverse à $f(x)$.

Étude de la fonction $f(x)$

Pour étudier celle-ci, il nous faut sa dérivée :

$$f'(x) = 2 \times (-2x) \times (1-x^2) + \frac{2x}{Q^2} = -4x + 4x^3 + \frac{2x}{Q^2} = 4x \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} \right)$$

Cette dérivée s'annule pour $x = 0$ et pour $x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} = 0$.

Cette deuxième condition implique que $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ si et seulement si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$ soit $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

On distingue alors deux cas :

Cas d'un petit facteur de qualité : $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$

La dérivée $f'(x)$ ne s'annule que pour $x = 0$, $f(x)$ est croissante (4x croissant et $x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2}$ croissant) de $]0, +\infty[$.

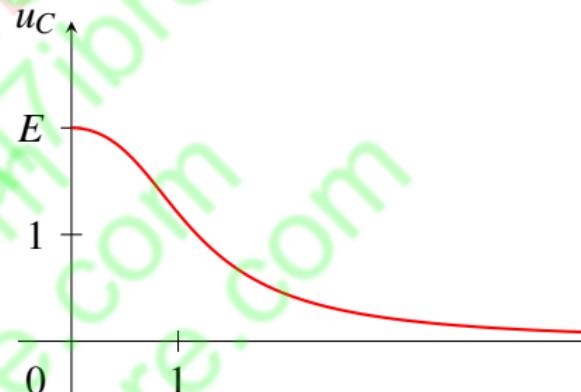
Donc la fonction d'amplitude U_C est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Ces limites sont :

- $\lim_{x \rightarrow 0} U_C = E$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_C = 0$;

L'allure de cette fonction est donc dessinée ci-contre.

Pas de résonance en tension aux bornes du condensateur lorsque $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$



Cas d'un grand facteur de qualité : $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ I

Cette fois $f'(x)$ possède deux racines, $x = 0$ et $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, racine du polynôme du second degré contenu dans $f'(x)$.

$f'(x)$ est du signe du polynôme du second degré, donc du signe du " a " de ce polynôme partout sauf entre les racines. On sait aussi que U_C varie de façon inverse à $f(x)$.

Du coup, on peut dresser le tableau de variation suivant :

x	0	$x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	Décroissante		Croissante
U_C	Croissante	$U_{\max} = \frac{2Q^2 E}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$	décroissante

Cas d'un grand facteur de qualité : $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ II

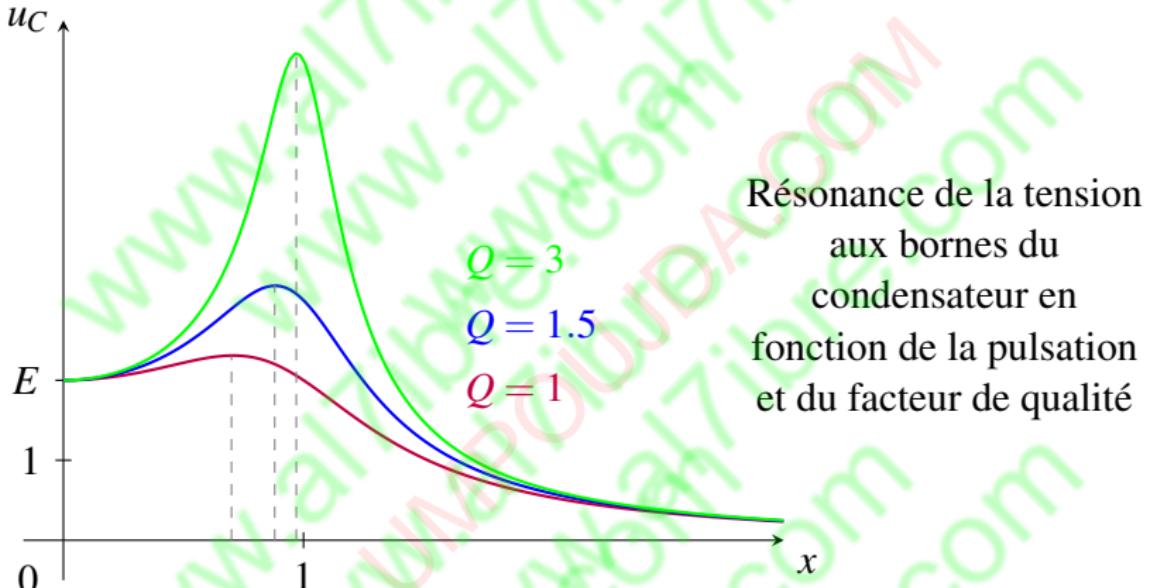
Il y a donc un maximum d'amplitude pour $x = x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, c'est ce phénomène que l'on appelle **résonance en tension**.

A la résonance, U_C est maximum et est supérieure à E : c'est ce que l'on appelle la surtension.

De plus, les limites de U_C sont les mêmes que pour le cas précédent.

Dessinons l'allure de l'amplitude U_C en fonction de x pour plusieurs valeurs de facteur de qualité :

Cas d'un grand facteur de qualité : $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ III



Nous observons que :

Cas d'un grand facteur de qualité : $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ IV

- ▶ La résonance est d'autant plus aigüe (pic étroit) que le facteur de qualité est grand ;
- ▶ Plus ce facteur est grand, plus la pulsation de résonance tend vers la pulsation propre du circuit (puisque $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ tend vers 1) en restant toujours inférieure à elle ;
- ▶ La surtension est d'autant plus grande que le facteur de qualité est grand.